This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

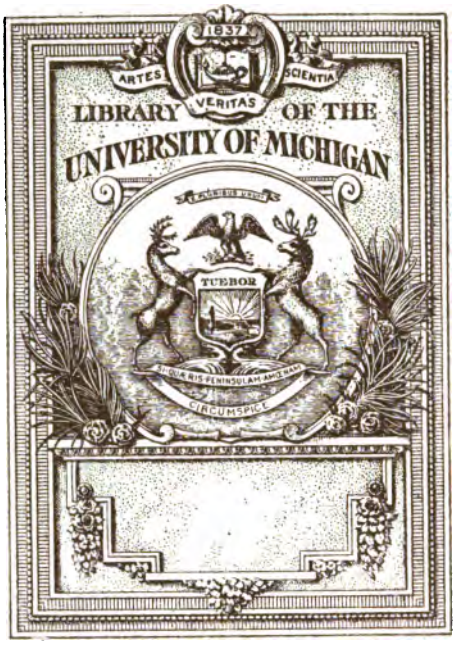
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

B 447308



THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET

QA
805
.W5
1877

Lehrbuch

der

Mechanik

in

elementarer Darstellung

mit

Uebungen und Anwendungen

auf

Maschinen- und Bau-Constructionen.

Holzſtiche
aus dem xylographiſchen Atelier
von Friedrich Vieweg und Sohn
in Braunſchweig.

Papier
aus der mechaniſchen Papier-Fabrik
der Gebrüder Vieweg zu Wendhauſen
bei Braunſchweig.

136 Alexander Ziwet 56

Lehrbuch

der

Mechanik

in

elementarer Darstellung

mit

Uebungen und Anwendungen

auf

Maschinen- und Bau-Constructionen.

Für

den Unterricht an Gewerbe- und Realschulen, sowie zum Privatstudium für angehende Maschinenbauer und Architekten bearbeitet

von

Gustav Ad. Wernicke,
Königlichem Gewerbeschul-Director zu Gleiwitz, ord. Lehrer für Mathematik, Mechanik und Maschinenlehre, Ehrenmitglied der Gewerbevereine zu Görlitz und Schweidnitz.

In zwei Theilen.

Zweiter Theil.

Mechanik flüssiger Körper.

Mit 202 in den Text eingedruckten Holzstichen.

Zweite verbesserte und vermehrte Auflage.

Braunschweig,
Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.
1873.

Alex. Zinet
gt.
8-31-1922

Die Herausgabe einer Ueberſetzung in franzöſiſcher und engliſcher Sprache, ſowie in anderen modernen Sprachen wird vorbehalten.

Vorrede.

Bei der Umarbeitung des zweiten Theiles meiner Mechanik habe ich die Bedürfnisse der reorganisirten Gewerbeschulen besonders im Auge gehabt. Es kam mir darauf an, neben der eigentlichen Theorie die nothwendigsten Ausgangspunkte für die in der Maschinenlehre zur Behandlung kommenden Maschinen zu geben, ähnlich wie die Festigkeitslehre im ersten Theile für die Berechnung der Maschinentheile die Grundlage bildet. Hieraus erklärt sich die Aufnahme der Kraft- und verschiedener Arbeits-Maschinen in den auf die einzelnen Capitel folgenden Uebungen, sowie die gesonderte Betrachtung der atmosphärischen Luft und des Wasserdampfes, wozu die Grundbegriffe der mechanischen Wärme-Theorie herangezogen werden mußten. Die Behandlung, welche eine elementare ist, geht in dem theoretischen Theile des Buches von der Flüssigkeit im allgemeinsten Sinne aus, und bringt dann die erhaltenen Resultate auf tropfbar-flüssige und luftförmige Körper in Anwendung.

Der diesem Theile beigegebene Anhang, die Elemente der Graphostatik enthaltend, ist auf besonderen Wunsch einiger Freunde des Buches hinzugefügt worden. Obgleich derselbe eine bessere Stelle zu Ende des ersten Theiles gefunden hätte, bin ich doch gern auf diese Wünsche eingegangen, weil dadurch das Buch auch in Bezug auf diese erst in den letzten Jahren in Anwendung gekommene Behandlung der Mechanik, als Leitfaden für den Unterricht benutzt werden kann.

Eine Vergleichung mit der ersten Auflage wird, abgesehen von der Umrechnung nach dem neuen Maß und Gewicht, mannichfache Verbesserungen, Vereinfachungen und Vermehrungen zeigen und den Fachgenossen den Beweis liefern, daß ich mir Mühe gegeben habe, das Buch auf

406406

die Höhe der heutigen Wissenschaft zu bringen. Von größeren Werken sind für meine Zwecke benutzt worden:

Redtenbacher, Wasserräder, Rittinger, Ventilatoren, Weisbach, Ingenieur- und Maschinen-Mechanik, Werner, Turbinen Kreiselpumpen und Ventilatoren, Zeuner, mechanische Wärmetheorie, Zeuner, Locomotiv-Blaserohr, der von Grashof bearbeitete Anhang zu Redtenbacher's Resultaten für den Maschinenbau und Bauschinger, die graphische Statik.

Die Verlagsbuchhandlung hat sich die sorgfältige Ausstattung des Buches besonders angelegen sein lassen. Die meisten Figuren sind neu gestochen, einige derselben aus anderen in demselben Verlage erschienenen Werken benutzt worden.

Indem ich hiermit die mir gestellte Aufgabe, ein Lehrbuch der Mechanik in elementarer Darstellung für den Schulgebrauch zu verfassen, als erledigt ansehe, hoffe ich durch die vorliegende Bearbeitung zur Belebung des Unterrichtes in der Mechanik beigetragen zu haben.

Gleiwitz, im Mai 1873.

Ad. Wernicke.

Inhalt.

Seite

Einleitung 1

Vierter Abschnitt.

Mechanik flüssiger Körper.

Erstes Capitel (S. 3 bis 84).

Allgemeine Gesetze über das Gleichgewicht und den Druck von Flüssigkeiten.

§.

1 — 3 Fortpflanzung des Druckes 3
4 — 5 Allgemeine Gleichgewichtsbestimmungen 5
6 Bodendruck einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit 10
7 Druck der atmosphärischen Luft 12
8 — 9 Druck einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit gegen eine zum Horizont geneigte Ebene und gegen krumme Gefäßwände 14
10 — 14 Verhalten der permanenten Gase. Isothermische Curve. Specifische Wärme. Mechanisches Wärme-Aequivalent. Adiabatische Curve. 17
15 — 18 Wasserdampf 24
Uebungen 33
Erddruck 44
Hydraulische Presse 51
Wandstärke der Gefäße 58
Luftpumpe 62
Höhenmessung durch Barometer 66
Manometer 70
Arbeitgröße einer elastischen Flüssigkeit 79

Zweites Capitel (S. 85 bis 147).

Vom Gleichgewicht der Flüssigkeiten mit eingetauchten Körpern.

§.

19 — 20 Auftrieb 85
21 — 22 Schwimmen, Stabilität eines schwimmenden Körpers 87
23 — 24 Specifisches Gewicht 92
Uebungen 96

Seite
Lufthermometer 109
Brennstoffe, Heizkraft 113
Kreisproceß 118
Luftmaschinen 122
Dampfmaschinen 134

Drittes Capitel (S. 148 bis 254).

Ueber den Ausfluß der Flüssigkeiten aus Gefäßen und Röhren.

§.
25 — 26 Bewegung der Flüssigkeiten 148
27 — 29 Ausfluß einer tropfbaren Flüssigkeit 150
30 Ausfluß der permanenten Gase 156
31 Ausfluß des gesättigten Wasserdampfes 160
32 Bewegung von Flüssigkeiten durch Röhren 162
33 Bewegung des Wassers in Röhren 164
34 — 35 Bewegung luftförmiger Körper in Röhren 168
Uebungen 173
Wassersäulenmaschinen 188
Wasserpumpen 195
Gebläse 219
Saugstrahlpumpen 228
Schornsteine 242
Kesselapparat 248
Sicherheitsventile 251

Viertes Capitel (S. 255 bis 354).

Von der Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen.

§.
36 — 38 Bewegung des Wassers in Flüssen 255
39 — 41 Bewegung des Wassers in Canälen 258
42 — 43 Aufstauung des Wassers durch Ueberfallwehre 262
44 Aufstauung des Wassers durch Schleusenwehre 266
45 — 46 Stauweite 270
Uebungen 275
Stoß des Wassers 282
Wasserräder 287
Turbinen 307
Centrifugalpumpen 335
Ventilatoren 340
Windmühlen und Segel 348

Anhang (S. 355 bis 387).

Graphische Statik.

§.
1 — 5 Graphisches Rechnen 355
6 — 14 Graphische Statik 361
Uebungen 374

Einleitung.

Eine Flüssigkeit ist eine Verbindung von einer zahlreichen Menge materieller Punkte (Atome), welche in so geringen Abständen neben einander gelagert sind, daß das Ganze als eine stetige Masse angesehen werden darf, wobei die einzelnen Flüssigkeitsatome die Eigenschaft besitzen, sich neben einander nach jeder beliebigen Richtung, ohne jegliche Reibung zu bewegen. Der innere Zusammenhang zwischen den Flüssigkeitstheilchen ist hiernach so gering, daß jede noch so kleine Kraft ein Verschieben der einzelnen Theilchen bewirken kann. In Folge dieser Erklärung lassen sich die Flüssigkeiten nach jeder beliebigen Richtung auf leichte Weise zertheilen, sie haben keine bestimmte Form und nehmen die Gestalt der Gefäße an, durch welche sie eingeschlossen werden. Die Flüssigkeiten zerfallen in tropfbare und gasförmige. Der hauptsächlichste Unterschied beider besteht darin, daß sich zwischen den einzelnen Atomen der tropfbaren Flüssigkeiten noch eine gewisse Anziehungskraft zeigt, wodurch sich unter gewissen Verhältnissen kleine zusammenhängende sphärische Körper, Tropfen genannt, bilden können; die Atome der gasförmigen Körper stoßen sich dagegen ab, so daß sie ins Feinste zerfließen, sobald der Druck dem sie ausgesetzt sind aufgehoben wird. Die tropfbaren Flüssigkeiten heißen auch unzusammendrückbar, unelastisch, weil man lange Zeit der Meinung war, es sei unmöglich, ihr Volumen durch Druck zu verringern. Obgleich man jetzt eine andere Ansicht gewonnen, so ist doch die Zusammendrückbarkeit der tropfbaren Flüssigkeiten so gering, daß wir sie ganz vernachlässigen dürfen. Die tropfbaren Flüssigkeiten besitzen hiernach, den elastischen Flüssigkeiten gegenüber, trotz ihrer Formlosigkeit, wenigstens ein bestimmtes Volumen, so lange wir von der Zusammendrückbarkeit absehen.

Die gasförmigen Körper theilen sich in permanente Gase und Dämpfe. Zu den ersteren rechnen wir alle diejenigen gasförmigen Körper, die bis jetzt entweder gar nicht oder nur sehr schwierig in den tropfbarflüssigen Zustand übergeführt worden sind, während sich das bei den Dämpfen verhältnißmäßig leichter ausführen läßt.

Die Gase und Dämpfe sind vollkommen durchsichtig, und erst in dem Augenblicke wenn ein Dampf in den tropfbaren Zustand übergeführt wird, bilden sich sichtbare Körper, die man Dunst, Nebel, Wolken ꝛc. zu nennen pflegt. Jedes Flüssigkeitsatom ist der Schwerkraft unterworfen, hat also Gewicht, das sich n. F. 99, Thl. I. durch das Product aus Volumen in das specifische Gewicht der Flüssigkeit messen läßt oder sich n. F. 28, Thl. I. durch das Product aus Masse in die Acceleration der Schwere bestimmt. Für die tropfbaren Flüssigkeiten wird man bei Annahme der Unzusammendrückbarkeit eine constante Dichtigkeit zulassen können, bei den elastischen Flüssigkeiten wird sich dagegen die Dichtigkeit mit dem Drucke der auf die Flüssigkeit ausgeübt ist ändern, da durch den Druck eine Volumverminderung, eine Verdichtung, eintritt. In Folge des Gewichts der Flüssigkeitsatome drücken die oberen Flüssigkeitstheilchen auf die darunter befindlichen, so daß ein Flüssigkeitstheilchen um so mehr Druck auszuhalten hat, eine um so größere Anzahl von Flüssigkeitsatomen sich senkrecht darüber befinden.

In dem Folgenden soll die Mechanik der tropfbaren zugleich mit der der gasförmigen Flüssigkeiten behandelt werden, und zwar fangen wir auch hier wieder mit der Lehre vom Gleichgewicht, mit der Statik der Flüssigkeiten, an, wozu wir also nach der Einleitung des ersten Theiles Hydrostatik und Aerostatik rechnen. Für die tropfbaren Flüssigkeiten dient dabei das Wasser, für die elastischen die Luft als Repräsentant, da sich für die übrigen Flüssigkeiten die erhaltenen Resultate bei Benutzung der zugehörigen specifischen Gewichte leicht umändern lassen.

Vierter Abschnitt.

Mechanik flüssiger Körper.

Erstes Capitel.

Allgemeine Gesetze über das Gleichgewicht und den Druck von Flüssigkeiten.

Die Gesetze über das Gleichgewicht sind für alle Körper dieselben und 1
hängen nicht von dem größeren oder geringeren Zusammenhange der Körpertheilchen ab, die Bedingungen des Gleichgewichts für ein flüssiges System von materiellen Punkten sind deshalb genau dieselben, die wir im ersten Capitel der Statik fester Körper gefunden.

Denken wir nämlich eine Flüssigkeit, gleichviel ob tropfbar oder elastisch, unter der Einwirkung von Kräften im Gleichgewicht, so kann dasselbe dadurch in keiner Weise gestört werden, wenn wir die flüssige Masse mit einem Male fest werden lassen, d. h. die Bedingungen des Gleichgewichts für den flüssigen Zustand genügen dem plötzlich festgewordenen, oder umgekehrt die für feste Körper entwickelten Gleichgewichtsbedingungen sind auf flüssige vollkommen in Anwendung zu bringen.

Sind zwei Körper mit einander in Berührung und sind ihre Oberflächen vollkommen glatt, so heben diese nur die zu den Oberflächen normal gerichteten Kräfte auf, und die Körper entwickeln nur nach diesen Richtungen einen Widerstand, der stets gleich dem ausgeübten Drucke ist. Die Flüssigkeitsatome sollen sich der Erklärung gemäß ohne jegliche Reibung neben einander bewegen können, sie sind also als Körper mit vollkommen glatten Oberflächen aufzufassen, die nur die normal zu ihrer Oberfläche wirksamen Drucke aufzuheben vermögen, wobei der Widerstand jedesmal gleich dem ausgeübten Drucke ist.

Der hauptsächlichste Unterschied zwischen festen und flüssigen Körpern liegt 2
in der Fortpflanzung eines gegen den Körper ausgeübten Druckes. Während

bei den festen Körpern der Druck sich nur nach der eigenen Richtung fortpflanzt, überträgt sich derselbe in einer Flüssigkeit von dem Punkte der Einwirkung nach allen Richtungen, auf alle Flüssigkeitsatome in derselben Größe. Dies Gesetz kann man als Erfahrungsresultat auffassen, oder es läßt sich dasselbe leicht auf Grund der oben hingestellten Erklärung der Flüssigkeiten wie folgt nachweisen. Die einzelnen Flüssigkeitsatome können sich unter der Annahme des vollkommenen Gleichgewichts vollständig frei bewegen, sie besitzen vollkommene Beweglichkeit. Erleiden nun einzelne Atome einen Druck, so haben diese das Bestreben der angeregten Bewegung Folge zu leisten; der ausgeübte Druck wird aber durch einen gleich großen Widerstand der umgebenden Flüssigkeitsatome aufgehoben, welche dadurch denselben Druck erleiden, ihrerseits in Bewegung zu kommen suchen und auf dieselbe Weise den Druck auf die umgebenden Flüssigkeitsatome übertragen, so daß sich die angeregte Bewegung durch die ganze Flüssigkeit fortpflanzt, d. h. jedes einzelne Flüssigkeitsatom erleidet denselben Druck. Die Fortpflanzung des Druckes geschieht plötzlich, so lange die Masse vollkommen flüssig ist; die Uebertragung des gleich großen Druckes auf alle Flüssigkeitsatome findet jedoch, sobald der Gleichgewichtszustand hergestellt ist, bei jeder Flüssigkeit, unabhängig von der größeren oder geringeren Verschiebbarkeit statt. Hieraus folgt unmittelbar, daß die Wände des Gefäßes, welches die flüssige Masse enthält, in jedem Punkte ebenfalls denselben normalen Druck auszuhalten haben, den irgend ein Flüssigkeitsatom erleidet.

3 Die beistehende Figur 1 stelle ein Gefäß, welches irgend eine Flüssigkeit enthält, vor; A, B, C, D seien festschließende Kolben von gleichem Flächen-

Fig. 1.

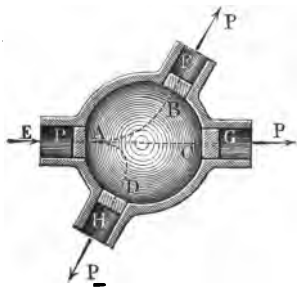
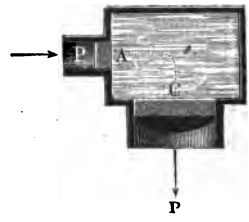


Fig. 2.



inhalte, in derselben Höhe über dem horizontalen Fußboden. Die Masse sei im Gleichgewicht und mittelst des Kolbens A werde ein Druck P gegen die Flüssigkeit ausgeübt. Nach dem allgemeinen Gesetze über die Fortpflanzung des Druckes müssen die Kolben B, C und D denselben Druck von innen nach außen erleiden, so daß die Bewegung derselben gehindert und der Gleichgewichtszustand nur wieder hergestellt werden kann, wenn man auf jeden dieser Kolben von außen nach innen denselben Druck P einwirken läßt.

Haben die beiden Kolben A und C (Fig. 2) dagegen ungleichen Flächeninhalt f und f_1 und ist $f_1 = nf$, so ist auch der darauf ausgeübte Druck P_1

das $n$fache des Druckes P, oder es muß zur Erhaltung des Gleichgewichts ein Druck $P_1 = nP$ von außen nach innen gegen den Kolben C wirken, d. h. die gegen einzelne Theile der Gefäßwand ausgeübten Drucke sind den Inhalten der gedrückten Fläche proportional:

$$P : P_1 = f : f_1.$$

Dieses Gesetz, auf jede beliebige Flüssigkeit anwendbar, entspricht bei unzusammendrückbaren Flüssigkeiten dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten (§. 40, Thl. I.).

Es bezeichnen $f_1, f_2, f_3 \ldots$ die Inhalte der Kolbenflächen, p den Druck auf die Flächeneinheit (Quadratcentimeter, Quadratmeter ...) und $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots$ die virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspunkte der Kräfte gleich mit Rücksicht auf die Zeichen, so muß, da durch die Bewegung eine Zusammendrückbarkeit nicht stattfinden soll:

$$f_1\sigma_1 + f_2\sigma_2 + f_3\sigma_3 + \cdots = 0$$

sein. Die Multiplication mit p läßt die Gleichung bestehen, daher ist auch:

$$f_1 p\sigma_1 + f_2 p\sigma_2 + f_3 p\sigma_3 + \cdots = 0,$$

d. h. für den Gleichgewichtszustand ist die algebraische Summe der virtuellen Momente gleich Null.

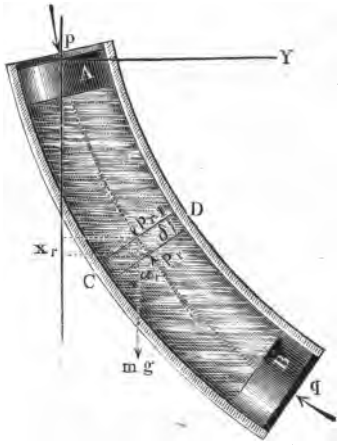
Auf diesem Hauptgesetze der Fortpflanzung des Druckes durch Flüssigkeiten beruhen vielfache Constructionen in der Praxis, die täglich in Anwendung sind. Die Sicherheitsventile bei Dampfkesseln und hydraulischen Pressen wirken nur deshalb in der Weise, weil, wenn an irgend einer Stelle der Druck die Größe erreicht, daß ein Zersprengen des Gefäßes die Folge sein könnte, derselbe Druck in demselben Augenblicke das Ventil aufheben wird, welches sich erst dann wieder schließt, wenn im Innern des Gefäßes ein der Belastung des Ventils entsprechender Druck an allen Punkten hergestellt ist. Hieraus folgt unmittelbar, daß es ganz gleichgültig ist, an welcher Stelle des Dampfkessels oder der Zuleitungsröhre bei der hydraulischen Presse das Sicherheitsventil angebracht wird, die Größe desselben ist dagegen durch den nicht zu überschreitenden Druck vollkommen bestimmt. Bei Blasebälgen ist es völlig unwesentlich, an welcher Stelle die Oeffnung für die Röhre angebracht wird, welche die Luft in das Feuer führt; von Bedeutung ist allein die Größe der Oeffnung, da von dieser die Größe des Winddruckes abhängt.

Die gleichmäßige Fortpflanzung des Druckes durch die Flüssigkeit geschieht nur dann in der angegebenen Weise, wenn die einzelnen Flüssigkeitsatome nicht noch außerdem durch Kräfte in Anspruch genommen sind, wenn also vor allen Dingen die einzelnen Flüssigkeitstheilchen ohne Gewicht wären. Das angeführte Gesetz wird daher nur bei Vernachlässigung des eigenen Gewichtes auf alle Flüssigkeiten vollkommene Anwendung finden, in der Wirklichkeit wird dasselbe vielmehr durch das Gewicht der Flüssigkeitsatome einigermaßen geändert.

Die Fig. 3 (a. f. S.) stellt eine Röhre von sehr kleinem constanten 4
Querschnitt f vor, deren Achse eine beliebige krumme Linie sein mag. Die Röhre ist mit einer Flüssigkeit gefüllt, deren Atome durch die Schwerkraft an-

gegriffen werden, und außerdem wirken gegen die festschließenden Kolben A und B an den beiden Enden der Röhre zwei Kräfte, deren Druck auf die Flächeneinheit p und q Kilogramme betragen mag. Wir nehmen die durch den Angriffspunkt p gelegte Horizontalebene als ZY Ebene, die X Achse in senkrechter Richtung durch denselben Punkt mit dem positiven Theile nach unten gerichtet, und bestimmen für die auf einander folgenden Punkte der Röhrenachse die Gleichgewichtsbedingungen. Eine Flüssigkeitsscheibe von sehr geringer Dicke kann sich bei den gemachten Voraussetzungen durch die Röhre nur in der Weise bewegen, daß ihr Schwerpunkt dabei die Achse der Röhre beschreibt. Es ist eine solche Bewegung deshalb als eine auf vorgeschriebener Curve anzusehen, wobei die Tangentialkräfte allein die Bewegung erhalten. Für den verlangten Gleichgewichtszustand müssen sich daher die Tangentialkräfte an jedem Punkte der Röhrenachse aufheben.

Fig. 3.



Es sei CD eine solche Flüssigkeitsscheibe von der Stärke δ und dem Gewichte mg. Für die angenommene Lage mag x_r die Projection von δ auf der X Achse vorstellen, p_{r-1} und p_r seien die normal zur Oberfläche der Scheibe CD auf die Flächeneinheit wirksamen Drucke. Die für die angenommene Lage der Scheibe CD zur Röhrenachse construirte Tangente bilde mit der X Achse den Winkel α_r. Das Gewicht mg, in Richtung der X Achse wirksam, wird in eine Tangential- und Normal-Componente zerlegt. Die Gleichgewichtsbedingung für die angenommene Lage ist deshalb, da p_{r-1} und p_r bereits nach tangentialer Richtung wirksam sind,

$$f p_{r-1} + mg \cos \alpha_r - f p_r = 0.$$

Wenn die Flüssigkeitsscheibe sich auf der Röhrenachse um den Bogen δ fortbewegt, so erhält man die Projectionen von δ auf den drei Coordinatenachsen, wenn man δ mit dem Cosinus der Winkel multiplicirt, den die Tangente zur Röhrenachse an der betreffenden Stelle mit den Coordinatenachsen bildet.

Hiernach ist

$$\delta \cos \alpha_r = x_r$$

oder

$$\cos \alpha_r = \frac{x_r}{\delta}.$$

Substituiren wir diesen Werth in der obigen Gleichgewichtsbedingung und setzen außerdem statt des Gewichtes mg das Product aus Volumen $f\delta$ in das specifische Gewicht γ der Flüssigkeit, so entsteht:

$$f p_{r-1} + f \delta \gamma \frac{x_r}{\delta} - f p_r = 0.$$

$$p_r = p_{r-1} + \gamma x_r \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Aus dieser Gleichung erfährt man den Druck p_r auf die Flächeneinheit für einen beliebigen Punkt der Flüssigkeitssäule, so lange das Gleichgewicht nicht gestört ist. Führen wir dies für die einzelnen Flüssigkeitsscheiben zwischen den beiden Kolben A und B durch, so erhalten wir folgende Gleichungen, aus denen sich der Druck p_r an irgend einer Stelle vollkommen bestimmen läßt, wenn die Dichtigkeit γ der Flüssigkeit entweder constant oder ihr Aenderungsgesetz bekannt ist.

Es ist für eine constante Dichtigkeit

$$\begin{aligned} p_1 &= p + \gamma x_1, \\ p_2 &= p_1 + \gamma x_2, \\ p_3 &= p_2 + \gamma x_3, \\ p_4 &= p_3 + \gamma x_4 \quad \text{u. s. w. bis} \\ p_r &= p_{r-1} + \gamma x_r. \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir:

$$p_r = p + \gamma (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots x_r).$$

Für die letzte Flüssigkeitsscheibe, die mit dem Kolben B unmittelbar in Berührung steht, ist $p_r = q$, daher ist für diese:

$$q = p + \gamma (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots),$$

worin wir noch statt der Summe $x_1 + x_2 + \cdots$ der Projectionen die senkrechte Entfernung x der ersten und letzten Flüssigkeitsscheibe setzen wollen:

$$q = p + \gamma x \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Ist andererseits eine elastische Flüssigkeit vorgelegt, die also das Bestreben sich auszudehnen hat, so haben wir unter dem ausgeübten Drucke p_r zugleich die Kraft zu verstehen, welche die Ausdehnung bewirkt. Diese Kraft bei einer elastischen Flüssigkeit, die Elasticität, Spannkraft oder Expansivkraft genannt, äußert sich bei jeder Dichtigkeit der Flüssigkeit, wodurch sie sich hauptsächlich von der Elasticität der festen Körper unterscheidet. Diesem Ausdehnungsbestreben wirkt die Schwerkraft in den einzelnen Punkten der Flüssigkeit entgegen.

Die Dichtigkeit ist bei einer elastischen Flüssigkeit nicht constant, sie ändert sich vielmehr gleichzeitig mit der Temperatur und dem Druck. Sehen wir vorläufig von der Aenderung durch die Temperatur ab, nehmen wir dieselbe also durch die ganze Flüssigkeit als constant an, so läßt sich das Gesetz von Mariotte zur Bestimmung der Dichtigkeit in Anwendung bringen. Nach diesem Gesetze verhalten sich die Druckkräfte (Expansivkräfte) in einer elastischen Flüssigkeit umgekehrt wie die Volumina. Bezeichnen wir mit p und p_1 die Drucke auf die Flächeneinheit, mit v und v_1 die Volumina der Gewichtseinheit, die sogenannten specifischen Volumina, so drückt sich das Mariotte'sche Gesetz durch die Gleichung aus:

$$p v = p_1 v_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Berücksichtigen wir ferner, daß wir die Dichtigkeit durch das specifische Gewicht γ, d. i. das Gewicht der Volumeinheit, messen, so ist $v\gamma = v_1\gamma_1 = 1$, und deshalb können wir das Mariotte'sche Gesetz auch durch die Gleichung

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

wiedergeben, d. h. die Drucke in einer elastischen Flüssigkeit sind den Dichtigkeiten proportional. Für ein und dieselbe Flüssigkeit ist hiernach das Product pv oder der Quotient $\frac{p}{\gamma}$ constant und soll derselbe mit c bezeichnet werden. Für atmosphärische Luft fand Regnault beim mittleren Atmosphärendruck, d. h. für $p = 10334$ Kilogramm pr. Quadratmeter, das Gewicht γ eines Kubikmeters gleich 1,29318 Kilogramm, woraus sich für Luft dieser constante Werth $c = 7991{,}2$ ergiebt.

In der allgemeinen Gleichung (1) können wir hiernach mit Zugrundelegung des Mariotte'schen Gesetzes $\gamma = p_{r-1} : c$ setzen und erhalten dadurch

$$p_r = p_{r-1}\left(1 + \frac{x_r}{c}\right).$$

Bestimmen wir in gleicher Weise die Drucke für die einzelnen Flüssigkeitsscheiben, von dem oberen Kolben A bis zur Scheibe CD, so erhalten wir:

$$p_1 = p\left(1 + \frac{x_1}{c}\right), \quad p_2 = p_1\left(1 + \frac{x_2}{c}\right), \quad p_3 = p_2\left(1 + \frac{x_3}{c}\right),$$

$$\text{u. s. w. bis } p_r = p_{r-1}\left(1 + \frac{x_r}{c}\right).$$

Werden aus diesen Gleichungen die Drucke p_1 bis p_{r-1} eliminirt, so entsteht

$$p_r = p\left(1 + \frac{x_1}{c}\right)\left(1 + \frac{x_2}{c}\right)\left(1 + \frac{x_3}{c}\right)\left(1 + \frac{x_4}{c}\right) \ldots \left(1 + \frac{x_r}{c}\right),$$

worin wir $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots x_r$ setzen können, da dadurch sehr kleine Abschnitte auf der X Achse bezeichnet wurden. Das obige Resultat erhält dadurch die Form

$$p_r = p\left(1 + \frac{x_1}{c}\right)^r$$

oder, wenn wir bis zum Kolben B herabgehen und von A bis B, n solcher Schichten annehmen:

$$q = p\left(1 + \frac{x_1}{c}\right)^n.$$

Bezeichnen wir auch hier die senkrechte Entfernung der untersuchten Flüssigkeitsscheibe von dem oberen Kolben mit x, so können wir $x_1 = \frac{x}{n}$ setzen, unter n eine unendlich große Zahl verstanden, und erhalten demnach

$$q = p\left(1 + \frac{x : c}{n}\right)^n.$$

Es ist aber $lim\left[\left(1+\frac{\varepsilon}{n}\right)^n\right]$ für die Annahme, daß n eine bis ins Unendliche wachsende Zahl vorstellt, gleich e^{ε} und deshalb der Druck q gegen den unteren Kolben

$$q = pe^{\frac{x}{c}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Die Dichtigkeit γ an der betreffenden Stelle finden wir dem Gesetze von Mariotte $q : \gamma = c$ gemäß

$$\gamma = \frac{p}{c} e^{\frac{x}{c}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Sind die einzelnen Flüssigkeitsatome noch von anderen Kräften angegriffen, so ist in ganz ähnlicher Weise die Gleichgewichtsbedingung für eine beliebig gewählte Flüssigkeitsscheibe aufzustellen und daraus die Bestimmung des letzten Druckes q mit Hülfe der höheren Analysis vorzunehmen.

Wir haben hiernach sowohl für die zusammendrückbaren als auch für die 5
elastischen Flüssigkeiten den auf die Einheit ausgeübten Druck q bestimmt, der zur Herstellung des Gleichgewichts in der vorgelegten sehr dünnen Röhre gegen den Kolben B ausgeübt werden muß. Ersetzen wir diesen Kolben durch eine feste Wand, so wird q in gleicher Weise den auf die Flächeneinheit ausgeübten Druck gegen dieselbe ausdrücken.

Es ist hierbei noch zu bemerken, daß die Achse der Röhre eine beliebige krumme Linie war, und daß sich der Druck q ganz unabhängig von der Form dieser krummen Linie bestimmt hat.

Uebertragen wir jetzt das Gesagte auf ein beliebiges Gefäß von beliebiger Größe, das mit einer Flüssigkeit angefüllt ist, welche unter der Einwirkung der Kräfte p, q und der Schwerkraft im Gleichgewichte sein soll. Das Gleichgewicht wird nicht gestört werden, wenn wir die ganze Flüssigkeitsmasse plötzlich fest werden lassen, mit Ausnahme einer sehr feinen Röhre von beliebiger Form zwischen den Punkten A und B. Das Gleichgewicht in derselben besteht aber nach §. 4, wenn für jeden beliebigen Punkt C der Röhrenachse die Gleichung 1

$$p_r = p_{r-1} + \gamma x_r$$

stattfindet.

Zwischen den Punkten A und B kann man aber eine unzählige Masse feiner Canäle von beliebiger Form denken, und bei dem vorhandenen Gleichgewichte muß für jeden Punkt eines solchen Canals die angeführte Gleichung ihre Gültigkeit behalten. Andererseits kann man die beiden Punkte A und B in der Flüssigkeit beliebig wählen und jedesmal für einen dazwischen gedachten feinen Canal die Richtigkeit der Gleichung für jeden Punkt nachweisen. Hieraus folgt unmittelbar, die Gleichung

$$p_r = p_{r-1} + \gamma x_r$$

muß für jeden beliebigen Punkt einer Flüssigkeit bestehen, wenn dieselbe unter der Einwirkung der angegebenen Kräfte im Gleichgewichte sein soll, d. h. die

obige Gleichung liefert die Gleichgewichtsbedingung für eine beliebige Flüssigkeit. Der auf die Flächeneinheit ausgeübte Druck q aber ist, je nachdem wir es mit einer unzusammendrückbaren oder elastischen Flüssigkeit zu thun haben,

$$q = p + \gamma x$$

$$q = p e^{\frac{x}{c}},$$

worin x die senkrechte Entfernung des untersuchten Punktes von dem Angriffspunkte der Kraft p bezeichnet.

Folgerungen. 1. In der obigen Grundformel

$$p_r = p_{r-1} + \gamma x$$

setzen wir $\gamma = 0$, so erhalten wir $p_r = p_{r-1}$, d. h. der Druck auf die Flächeneinheit ist durch die ganze Flüssigkeit nur dann derselbe, wenn die Flüssigkeitsatome kein Gewicht haben.

2. Der Druck q ändert sich allein mit der senkrechten Entfernung x, es werden daher alle Punkte derselben Horizontalebene, unabhängig von der Form des Gefäßes, denselben Druck auszuhalten haben.

3. Diejenigen Punkte einer Flüssigkeit, welche denselben Druck erleiden, bilden in ihrer Aufeinanderfolge die sogenannte Niveaufläche. Für unsere bisherige Annahme, wo die einzelnen Flüssigkeitsatome allein von der Schwerkraft angegriffen werden, sind die Niveauflächen in der Flüssigkeit Horizontalebenen. Nehmen wir jedoch eine Flüssigkeit von sehr großer Ausdehnung, für welche die Richtung der Schwerkraft in den einzelnen Punkten nicht mehr parallel zu denken ist, wobei vielmehr die Schwerkraft als eine vom Mittelpunkte der Erde aus wirksame Centralkraft aufzufassen ist, so sind auch die Niveauflächen nicht mehr Horizontalebenen, sondern Kugelflächen, da nur diejenigen Punkte durch die Schwerkraft gleiche Anziehung (Druck) erleiden, die sich in gleicher Entfernung von dem Mittelpunkte der Erde befinden. In beiden Fällen ist die Richtung der Schwerkraft zu den Elementen der Niveauflächen normal, woraus allgemein geschlossen werden kann, wenn noch andere Kräfte außer der Schwerkraft die einzelnen Flüssigkeitsatome angreifen, daß die Mittelkraft der auf die Flüssigkeitsatome wirksamen Kräfte zu den Elementen der Niveauflächen normal gerichtet sein muß.

6 Wir wollen jetzt eine unzusammendrückbare Flüssigkeit von durchgehends gleicher Dichtigkeit näher in Betracht ziehen, wenn die Flüssigkeit in einem Gefäße von beliebiger Form enthalten ist.

Die Niveauflächen im Innern der Flüssigkeit sind Horizontalebenen, die freie Oberfläche muß ebenfalls eine Niveaufläche, also eine Horizontalebene sein. Der Druck auf die Flächeneinheit in jedem Punkte der Flüssigkeit oder in jedem Punkte der festen Wandung ist, wenn wir die obigen Bezeichnungen beibehalten, n. F. 2:

$$q = p + \gamma x,$$

so daß die Flüssigkeit hiernach im Gleichgewichte ist, so lange die Gefäßwände vermöge ihrer Festigkeit diesem Drucke Widerstand zu leisten vermögen. Ist

das Gefäß an seiner obersten Stelle offen, also auch nicht durch einen beweglichen Kolben geschlossen, so ist deshalb der constante Druck p doch nicht Null, sondern es repräsentirt p dann den von der atmosphärischen Luft herrührenden Druck auf die Flächeneinheit. Hiernach besteht die auf jeden Punkt der Flüssigkeit oder Gefäßwandung ausgeübte Pressung:

1. aus dem Atmosphärendrucke p, der sich durch die Flüssigkeitsmasse in unveränderter Weise fortpflanzt;
2. aus dem durch das Gewicht der Flüssigkeitstheilchen hervorgerufenen Drucke, der für die einzelnen Punkte der Flüssigkeitsmasse verschieden ist und mit der Entfernung x des Punktes von der freien Oberfläche wächst.

Für die einzelnen Punkte derselben Horizontalebene ist der Gesammtdruck natürlich immer derselbe. Man nennt die Tiefe x eines Flüssigkeitstheilchens unter der freien Oberfläche (Wasserspiegel) die Druckhöhe und bezeichnet sie gewöhnlich mit h. Hiernach ist der Druck einer Flüssigkeit gegen einen horizontalen Boden oder gegen einen horizontalen Theil der Gefäßwand, dessen Inhalt durch f bezeichnet werden mag:

$$\left.\begin{aligned} fq &= fp + fh\gamma \quad \text{oder} \\ fq &= fh\gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

wenn man von dem Atmosphärendrucke absieht, d. h. der Druck gegen eine horizontale Fläche ist gleich dem Gewichte der über ihr stehenden Flüssigkeitssäule fh. Der horizontale Boden DC bei den verschiedenartigen Gefäßen (Fig. 4) wird also denselben Druck auszuhalten haben, wenn nur der Boden DC denselben Flächeninhalt hat und überall dieselbe Druckhöhe vorhanden ist. Ebenso hat der horizontale Theil BC des Gefäßes (Fig. 5) einen Druck auszuhalten, dessen Größe gleich dem Gewichte $fh\gamma$ der darüber stehenden Flüssigkeitssäule ist. Die Höhe h derselben ist BH, und ihre Grundebene hat mit BC denselben Flächeninhalt f.

Diese Resultate bleiben richtig, welche Form das vorgelegte Gefäß haben mag, sie sind daher auch dann in Anwendung zu bringen, wenn die freie Ober-

Fig. 4.

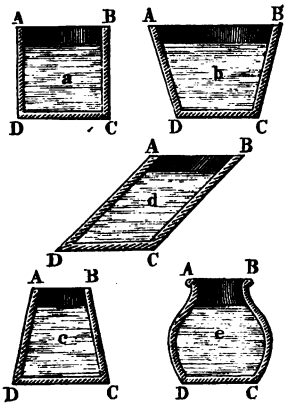


Fig. 5.

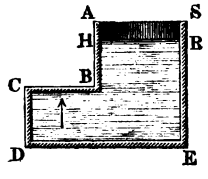
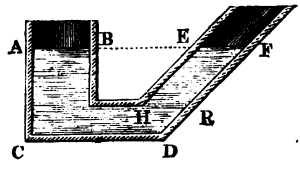


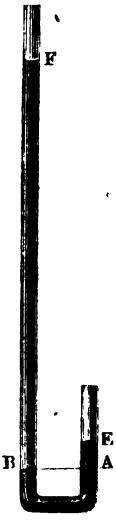
Fig. 6.



fläche aus mehreren getrennten Theilen besteht. Diese verschiedenen Theile der freien Oberfläche müssen in derselben Horizontalebene liegen und für die Punkte einer und derselben Horizontalebene muß der Gesammtdruck auf die Flächeneinheit immer derselbe sein. Hiernach steht eine Flüssigkeit in communicirenden Röhren (Fig. 6 a. vor. S.) gleich hoch, d. h. die Spiegel AB und EF liegen in derselben Horizontalebene.

Befinden sich in demselben Gefäße mehrere tropfbare Flüssigkeiten von verschiedener Dichtigkeit, und findet unter ihnen keine gegenseitige chemische Einwirkung statt, so werden sich die Flüssigkeiten unter Annahme des vollständigen Gleichgewichtes nach ihrer größeren Dichtigkeit unter einander stellen, so daß die specifisch leichteste die oberste Lage einnimmt. Die einzelnen Flüssigkeiten werden sich durch Horizontalebenen trennen, deren Punkte dieselbe Dichtigkeit haben. Die freie Oberfläche, von der leichtesten Flüssigkeit gebildet, wird ebenfalls eine Horizontalebene sein müssen. Um den Druck q für die Flächeneinheit an einer beliebigen Stelle der flüssigen Masse zu bestimmen, seien die Dichtigkeiten der darüber stehenden Flüssigkeiten γ_1, γ_2, γ_3 ..., die Stärken der Flüssigkeitslagen in senkrechter Richtung gemessen seien x_1, x_2, x_3 ..., und p bezeichne wieder den Atmosphärendruck auf die Flächeneinheit. Für diese Annahmen ist

Fig. 7.



$$q = p + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 + \ldots$$

Denken wir weiter in eine communicirende Röhre (Fig. 7), welche eine Flüssigkeit von der Dichtigkeit γ_1 enthält, eine zweite Flüssigkeit von geringerer Dichtigkeit γ_2 gegossen, so muß immer noch der Druck auf die Flächeneinheit für die einzelnen Punkte derselben Horizontalebene derselbe sein, wenn das Gleichgewicht fortbestehen soll. Hieraus folgt aber, daß die Höhe BF der leichteren Flüssigkeit über der die beiden Flüssigkeiten trennenden Horizontalebene AB größer sein muß, als die Höhe AE der schwereren Flüssigkeit über derselben Horizontalebene. Bezeichnen wir AE mit h_1 und BF mit h_2, so ist

$$q = p + \gamma_1 h_1 = p + \gamma_2 h_2$$

oder

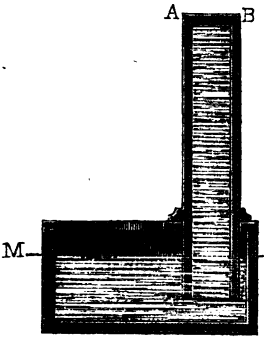
$$\gamma_1 h_1 = \gamma_2 h_2$$
$$h_1 : h_2 = \gamma_2 : \gamma_1,$$

d. h. für den Gleichgewichtszustand zweier Flüssigkeiten von verschiedener Dichtigkeit verhalten sich die Höhen der Flüssigkeitssäulen in communicirenden Röhren über der sie trennenden Horizontalebene umgekehrt wie die Dichtigkeiten.

7 Liegt ein Theil der Flüssigkeit, der von der Gefäßwand AB (Fig. 8) begrenzt ist, höher als die freie Oberfläche MM, so wird die horizontale Wand AB auf die Flächeneinheit einen Druck q erleiden, dessen Werth im Allgemeinen

geringer als der Atmosphärendruck ist und den wir erhalten, wenn wir in der obigen allgemeinen Formel 2:

Fig. 8.



$$q = p + \gamma x,$$

statt $+ x$, $- x$ setzen. Es ist für diesen Fall

$$q = p - \gamma x,$$

unter x die senkrechte Entfernung der freien Oberfläche MM von dem horizontalen Theile AB verstanden.

Wenn q gleich Null wird, so hält die über MM bis AB stehende Flüssigkeitssäule dem Atmosphärendrucke das Gleichgewicht, und es giebt die letzte Gleichung ein Mittel, die Größe des Luftdruckes, sowie die Höhe x zu berechnen, auf welche sich die verschiedenen Flüssigkeiten in einem vollkommen leeren Raume erheben, wenn die atmosphärische Luft auf die freie Oberfläche der Flüssigkeit drücken kann. Aus

$$0 = p - \gamma x$$

folgt

$$\left.\begin{aligned} p &= \gamma x \quad \text{und} \\ x &= \frac{p}{\gamma} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Der Druck der Luft wird durch Barometer gemessen, indem man aus der beobachteten Steighöhe der verwendeten Flüssigkeit nach der letzten Gleichung den Druck auf die Flächeneinheit berechnet.

Für einen mittleren Zustand der Atmosphäre, an Orten, die ungefähr im Niveau des Meeres liegen, beträgt die Steighöhe für Quecksilber 760^{mm}. Nehmen wir das specifische Gewicht des Quecksilbers zu 13,597, so läßt sich der Luftdruck in Kilogrammen pr. Quadratmeter Fläche aus der obigen Gleichung leicht berechnen.

Da 1 Kubikdecimeter Quecksilber 13,597 Kilogramm wiegt, so ist der Druck auf 1 Quadratdecimeter $= 13{,}597 \cdot 7{,}6$, daher der gesuchte Druck pr. Quadratmeter

$$p = 100 \cdot 13{,}597 \cdot 7{,}6 = 10334 \text{ Kilogramm.}$$

Es läßt sich nun auch die Höhe x einer Wassersäule von 1 Quadratmeter Querschnitt berechnen, deren Gewicht den Atmosphärendruck angiebt:

$$x = \frac{10334}{1000} = 10{,}334 \text{ Meter.}$$

Es ist in der Mechanik gebräuchlich, den mittleren Atmosphärendruck als Einheit zu benutzen und andere hydrostatische Drucke darauf zu beziehen, die hiernach also in Atmosphärendrucken oder schlechtweg in Atmosphären angegeben werden. Ist der ausgeübte Druck gleich a Atmosphären, und bezeichnen wir

die zum Gleichgewicht dieses Druckes nothwendige Wasserhöhe in Metern mit h, die beziehliche Queckſilberhöhe in Millimetern mit h_1, ſo haben wir

$$\left.\begin{aligned} 10334\,a &= p \\ 10{,}334\,a &= h \\ 760\,a &= h_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

8 Es ſei die Größe des Normaldruckes einer unzuſammendrückbaren Flüſſigkeit (Waſſer) für eine gegen den Horizont geneigte Ebene zu beſtimmen.

Wir denken die gegen den Horizont geneigte Gefäßwand vom Inhalte f aus ſehr kleinen Flächenelementen $f_1, f_2, f_3 \ldots$ beſtehend, für welche das Geſetz in Bezug auf eine horizontal liegende Wandung in Anwendung gebracht werden darf. Die zugehörigen Druckhöhen ſeien $h_1, h_2, h_3 \ldots$ Wenden wir das in §. 6 entwickelte Geſetz auf die einzelnen Flächenelemente an, ſo haben wir es mit parallelen Kräften $f_1 q_1$, $f_2 q_2 \ldots$ zu thun, deren Reſultante R nach §. 37 Thl. I. in der algebraiſchen Summe gegeben iſt:

$$\Sigma f_1 q_1 = R = p \Sigma f_1 + \gamma \Sigma f_1 h_1.$$

In dieſer Gleichung iſt ſtatt Σf_1 der Inhalt f der gedrückten Fläche und ſtatt $\Sigma f_1 h_1$ das ſtatiſche Moment fh derſelben in Bezug auf die Ebene des Waſſerſpiegels zu ſetzen, wenn man mit h den Schwerpunktsabſtand der gedrückten Fläche von dem Waſſerſpiegel bezeichnet. Hiernach iſt:

$$R = pf + fh\gamma,$$

oder

$$R = fh\gamma,$$

wenn von dem Atmoſphärendrucke abgeſehen wird.

Nennt man hier ebenfalls h die Druckhöhe, ſo gilt für ebene Flächen des Gefäßes ganz allgemein:

Der hydroſtatiſche Druck iſt gleich dem Gewichte einer Flüſſigkeitsſäule, die zur Baſis die gedrückte Fläche und zur Höhe die Druckhöhe der Fläche hat.

Der Angriffspunkt dieſes hydroſtatiſchen Druckes in der gedrückten Fläche, d. h. der Mittelpunkt der parallelen Kräfte, heißt hier Mittelpunkt des Druckes.

War die gedrückte Fläche horizontal gelegen, ſo erleidet jeder Punkt denſelben Druck, und der Mittelpunkt des Druckes muß daher mit dem Schwerpunkte der gedrückten Fläche zuſammenfallen.

Um für eine gegen den Horizont geneigte Ebene als Gefäßwand den Mittelpunkt des Druckes zu beſtimmen, nehmen wir die Durchſchnittslinie der gedrückten Ebene mit der freien Flüſſigkeitsoberfläche als XAchſe, eine zu derſelben normal gerichtete, in der Gefäßwand liegende Linie als YAchſe, geben die einzelnen Punkte der gedrückten Fläche durch ihre Coordinaten $x_1 y_1$, $x_2 y_2 \ldots$, und beſtimmen die Coordinaten x und y des Mittelpunktes der parallelen Kräfte.

Es iſt allgemein nach §. 37, F. 87, Thl. I.

$$x = \frac{\Sigma P_1 x_1}{\Sigma P_1} \quad \text{und} \quad y = \frac{\Sigma P_1 y_1}{\Sigma P_1}.$$

Für den vorliegenden Fall ist statt der Kräfte P_1, P_2, $P_3 \ldots f_1 h_1 \gamma$, $f_2 h_2 \gamma$, $f_3 h_3 \gamma \ldots$ zu setzen, weshalb sich nach Wegheben des constanten Factors γ folgende Werthe für x und y ergeben:

$$x = \frac{\Sigma f_1 h_1 x_1}{\Sigma f_1 h_1}$$

$$y = \frac{\Sigma f_1 h_1 y_1}{\Sigma f_1 h_1}.$$

Ist die gedrückte Ebene unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigt, so ist

$$y_1 \sin\alpha = h_1, \quad y_2 \sin\alpha = h_2 \ldots,$$

und nach Substitution dieser Werthe erhalten wir, wenn der constante Factor $\sin\alpha$ gehoben wird:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\Sigma f_1 x_1 y_1}{\Sigma f_1 y_1} \\ y &= \frac{\Sigma f_1 y_1^2}{\Sigma f_1 y_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

als Coordinaten des Druckmittelpunktes. Es bezeichnet in dem Ausdrucke für y, $\Sigma f_1 y_1^2$ das Trägheitsmoment der gedrückten Fläche für die in der freien Oberfläche liegende XAchse, und $\Sigma f_1 y_1$ das statische Moment der Gefäßwand für dieselbe Achse.

Das Erstere läßt sich für jeden vorliegenden Fall aus den Angaben in dem Capitel über die Festigkeit berechnen, das Zweite ist durch die Gesetze des Schwerpunktes bestimmt.

Der Mittelpunkt des Druckes fällt der Lage nach mit dem Schwingungsmittelpunkte und dem Stoßmittelpunkte zusammen, wenn man die angenommene XAchse als Drehungsachse und die gedrückte Fläche als schwingenden oder gestoßenen Körper ansieht.

Es sei der Druck der Flüssigkeit gegen eine krumme Gefäßwand zu 9
bestimmen.

Die Normaldrucke gegen die einzelnen Punkte der Fläche finden sich nach der hergeleiteten Grundgleichung 2:

$$q = p + \gamma x,$$

oder, wenn wir von dem Luftdrucke absehen, durch

$$q = \gamma x.$$

Diese Normaldrucke wirken im Raume nach beliebigen Richtungen, so daß ihre Vereinigung zu einer einzigen Resultante im Allgemeinen unmöglich ist. Aus dem Grunde suchen wir den Druck der Flüssigkeit nach horizontaler und verticaler Richtung zu bestimmen.

Die freie Flüssigkeitsoberfläche sei die ZYEbene, die XAchse liegt also

in senkrechter Richtung. Wir nehmen in der ZYEbene irgendwo den Coordinatenanfangspunkt, ziehen durch diesen die drei Achsen. Die einzelnen Punkte der Gefäßwand vom Querschnitte ω geben wir durch die Coordinaten x_1, y_1, z_1; $x_2, y_2, z_2 \ldots$; und die Richtung der Kräfte durch die Winkel $\alpha_1, \beta_1, \delta_1$; $\alpha_2, \beta_2, \delta_2 \ldots$, und zerlegen die Normaldrucke $\omega\gamma x_1$, $\omega\gamma x_2 \ldots$ nach Richtung der drei Achsen. Hierdurch reduciren sich die sämmtlichen Normaldrucke auf drei Kräfte, die den drei Achsen parallel wirken, die sich also durch algebraische Addition vereinigen lassen. Wir erhalten hiernach:

$\Sigma\gamma x_1 \omega \cos\alpha_1$ als Druck parallel der XAchse
$\Sigma\gamma x_1 \omega \cos\beta_1$ als Druck parallel der YAchse
$\Sigma\gamma x_1 \omega \cos\delta_1$ als Druck parallel der ZAchse.

Betrachten wir den Druck auf die ganze Gefäßwand unter der Annahme des vorhandenen Gleichgewichtes, so kann in keiner Horizontalebene nach irgend einer Richtung ein überwiegender Druck bestehen, da dieser das Gleichgewicht sogleich stören müßte. Zwei in derselben Horizontalebene sich gerade gegenüberliegende Elemente der Gefäßwand müssen also gleich stark gedrückt werden, oder die darauf ausgeübten Drucke müssen einander aufheben. Hieraus folgt: die algebraische Summe der Componenten in Richtung der Y und ZAchse ist gleich Null.

Handelt es sich um den Horizontaldruck für einen Theil der Gefäßwand, so ist deren Größe in Richtung der Achsen ebenfalls durch die Ausdrücke

$$\Sigma\gamma x_1 \omega \cos\beta_1 \quad \text{und} \quad \Sigma\gamma x_1 \omega \cos\delta_1$$

gegeben. Der Winkel β, den die Normale des Flächenelementes mit der YAchse bildet, ist zugleich der Neigungswinkel des Flächenelementes zur XZEbene, $\omega \cos\beta_1$ stellt daher die Projection des Elementes auf der XZEbene vor. Ebenso ist $\omega \cos\delta_1$ die Projection des Flächenelementes auf der XYEbene.

Allgemein ist hiernach der Horizontaldruck auf ein Flächenelement von der Projection desselben auf einer Verticalebene, die normal zur Richtung des Druckes steht, abhängig.

Bei Anwendung der Schwerpunktsgesetze sind deshalb die Ausdrücke

$$\Sigma x_1 \omega \cos\beta_1 \quad \text{oder} \quad \Sigma x_1 \omega \cos\delta_1$$

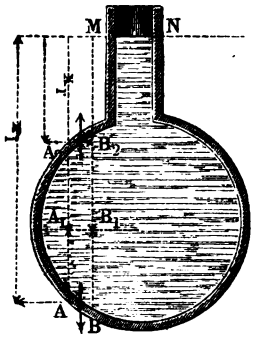
gleich dem Producte aus der Projection der gedrückten Fläche auf einer zur Druckrichtung normalen (Vertical-) Ebene, und der Entfernung des Schwerpunktes der Projection von der freien Flüssigkeitsoberfläche.

Der nach irgend einer Richtung wirksame horizontale Druck ist daher für einen beliebigen großen Theil der Gefäßwand gleich $fh\gamma$, gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, deren Basis f die Projection der gedrückten Fläche auf einer zur Druckrichtung normalen Verticalebene und deren Höhe h die Druckhöhe dieser Projection ist.

Als resultirender Druck aus den Normaldrucken bleiben hiernach für den Gleichgewichtszustand nur die Componenten parallel der XAchse übrig. In dem Ausdrucke $\Sigma\gamma x_1 \omega \cos\alpha_1$ ist $\omega \cos\alpha_1$ die Projection eines Elementes

AB (Fig. 9) der Gefäßwand auf einer Horizontalebene, und $x_1\,\omega\cos\alpha_1$ giebt n. F. 106, Thl. I. das Volumen des über dem Elemente ω stehenden Flüssigkeitsprisma an, von dem $\omega\cos\alpha_1$ den normalen Querschnitt A_1B_1 und x_1 die Entfernung des Elementes ω bis zur freien Oberfläche MN bezeichnet. Es ist demnach $\gamma\,x_1\,\omega\cos\alpha_1$ das Gewicht der über dem Elemente ω stehenden Flüssigkeitssäule. Ebenso ist der Druck in Richtung der XAchse für ein Element A_2B_2, das senkrecht über dem ersten in der Entfernung x_r von der freien Oberfläche liegt, gleich dem Gewichte der darüberstehenden Flüssigkeitssäule. Beide Drucke wirken nach entgegengesetzter Richtung, der resultirende Druck ist deshalb

Fig. 9.



$$\gamma\,\omega\cos\alpha_1\,(x_1 - x_r),$$

d. h. gleich dem Gewichte der zwischen AB und A_2B_2 befindlichen Flüssigkeit; der gesammte abwärtswirkende Verticaldruck $\Sigma\gamma\,x_1\,\omega\cos\alpha_1$ ist hiernach gleich dem Gewichte der eingeschlossenen Flüssigkeit.

Für den Gleichgewichtszustand einer elastischen Flüssigkeit haben wir in 10
§. 4 die Gleichung $q = p\,e^{\frac{x}{c}}$ gefunden, worin p und q die Drucke für die Flächeneinheit bezeichnen die sich in der senkrechten Entfernung x von einander befinden. Mit Hülfe dieser Gleichung ist man im Stande die Entfernung x zweier Horizontalebenen zu bestimmen, in welchen auf die Flächeneinheit die Drucke p und q ausgeübt werden. Diese Drucke lassen sich für die atmosphärische Luft mittelst des Barometers, wie in §. 7 gezeigt worden ist, durch Beobachtung finden, weshalb das Barometer mit Anwendung der obigen Formel zu Höhenmessungen benutzt werden kann. Wir logarithmiren die obige Gleichung, so entsteht, da $\frac{1}{\log e} = 2{,}3026$ ist,

$$x = 2{,}3026\,c\,.\,\log\frac{q}{p},$$

worin auch statt der Drucke q und p die entsprechenden Quecksilber- oder Wasserhöhen des benutzten Barometers gesetzt werden können.

Nehmen wir die Horizontalebene, in welcher der constante Druck q stattfindet, als die ZYEbene an, so ist in der Formel statt $+\,x$, $-\,x$ zu setzen, und wir erhalten den Druck:

$$q = p\,e^{-\frac{x}{c}},$$

die Dichtigkeit:

$$\gamma = \frac{p}{c}\,e^{-\frac{x}{c}},$$

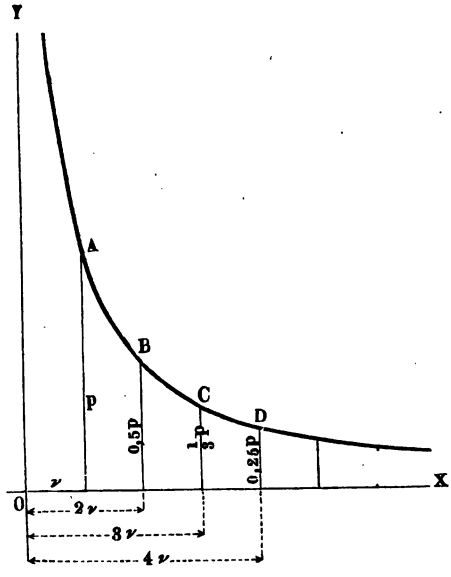
die Höhe:

$$x = 2{,}3026\, c \,.\, log \frac{p}{q}.$$

Aus der letzten Gleichung läßt sich die Höhe x einer elastischen Flüssigkeit berechnen, so daß die obersten Schichten gar keinen Druck auszuhalten haben, oder gar keine Expansivkraft besitzen. Substituiren wir zu dem Ende in der obigen Gleichung statt p Null, so wird $log \frac{p}{q} = log\, 0 = -\infty$, d. h. die Höhe einer solchen Flüssigkeitssäule müßte unendlich groß werden oder da sich mit der Verminderung der Expansivkraft zugleich die Dichtigkeit vermindert, so daß beide zu gleicher Zeit Null werden, so läßt sich aus diesem Resultate schließen, daß sich die Höhe einer elastischen Flüssigkeit nicht angeben läßt. Elastische Flüssigkeiten haben daher vermöge ihrer Expansivkraft keine freie Oberfläche, wie die tropfbaren Flüssigkeiten, sondern können nur in vollkommen geschlossenen Gefäßen aufbewahrt werden. Es folgt weiter hieraus, daß sich der Druck der unbegrenzten Atmosphäre mit Hülfe der abgeleiteten Formel nicht berechnen läßt, sondern daß man eine Säule einer tropfbaren Flüssigkeit in Anwendung bringen muß, um dem Atmosphärendrucke das Gleichgewicht zu halten, d. h. denselben zu messen. Für die atmosphärische Luft dient, wie schon angegeben, hierzu das Barometer, für andere elastische Flüssigkeiten benutzt man Monometer und Ventile.

11 Das Gesetz von Mariotte, welches nur für constante Temperaturen anwendbar ist, läßt sich durch folgendes Verfahren bildlich vor Augen führen.

Fig. 10.



Denkt man die specifischen Volumina v auf der XAchse eines rechtwinkligen Coordinatensystems (Fig. 10) und die zugehörigen Spannungen als Ordinaten abgetragen, so bilden deren Endpunkte die Curve $ABCD$, welche das Gesetz darstellt, nach welchem die Spannungen beim Wachsthum der specifischen Volumina abnehmen. Die krumme Linie heißt die isothermische Curve der permanenten Gase.

Ein zweites nach Gay-Lussac benanntes Gesetz, bestimmt die Volumenveränderung einer elastischen Flüssigkeit unter Voraus-

setzung einer constanten Spannung und zwar ist nach demselben die Volumenänderung der Temperaturzunahme proportional. Für atmosphärische Luft ist die Verhältnißzahl α oder der Ausdehnungscoefficient, der die Volumenzunahme für eine Temperaturerhöhung von 1° Celsius angiebt gleich 0,003663 $= \frac{1}{273}$, welcher Werth auch für andere elastische Flüssigkeiten als annähernd richtig gelten kann.

Es seien die specifischen Volumina der elastischen Flüssigkeit bei 0°, t_1^0 und t_2^0 gleich v_0, v_1, v_2, die entsprechenden Dichtigkeiten gleich γ_1, γ_2, die betreffenden Spannungen gleich p_0, p_1, p_2, dann ist nach dem Gesetze von Mariotte $p_0 v_0 = p_1 v_1 = p_2 v_2$ und nach dem Gesetze von Gay-Lussac

$$v_1 = v_0 (1 + \alpha t_1), \quad v_2 = v_0 (1 + \alpha t_2).$$

Werden beide Gesetze mit einander verbunden, so erhalten wir die Beziehungen zwischen p, v, t bei einer elastischen Flüssigkeit in der sich Spannung und Temperatur gleichzeitig ändern. Dieses combinirte, das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz genannt, stellt sich durch die folgende Doppelproportion dar:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \begin{cases} \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2} \\ \frac{p_2}{p_1} \end{cases} = \frac{V_1}{V_2},$$

unter V_1 und V_2 die Volumina derselben Luftmasse von gleichem aber beliebigem Gewichte verstanden, d. h. aber

$$\frac{p_1 v_1}{1 + \alpha t_1} = \frac{p_2 v_2}{1 + \alpha t_2} \quad \text{oder} \quad \frac{p_1}{\gamma_1 (1 + \alpha t_1)} = \frac{p_2}{\gamma_2 (1 + \alpha t_2)}.$$

Setzen wir $\alpha = \frac{1}{273}$, so ist demnach $\frac{p_1 v_1}{273 + t_1} = \frac{p_2 v_2}{273 + t_2}$, woraus sich erkennen läßt, daß für eine bestimmte elastische Flüssigkeit der Werth $\frac{p v}{273 + t}$ eine constante Größe ist. Bezeichnen wir diese Größe allgemein mit R und setzen wir für $273 + t$, welcher Werth die absolute Temperatur genannt wird, T so spricht sich das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz durch eine der beiden folgenden Gleichungen aus

$$pv = RT = \frac{p}{\gamma} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Für atmosphärische Luft fand Regnault bei $t = 0°$ und beim mittlern Atmosphärendruck von 760^{mm} Quecksilbersäule, also für den Druck $p = 10334$ Kilogramm pr. Quadratmeter, das Gewicht von einem Kubikmeter Luft, d. i. den Werth $\gamma = 1{,}29318$ Kilogramm. Bei Benutzung dieser Größen ergiebt sich für atmosphärische Luft $R = 29{,}272$.

Die folgende Zusammenstellung giebt die Versuchsresultate Regnault's für diejenigen chemisch einfachen Gase, die wir zu den permanenten zählen:

	Werthe von γ.	Werthe von R.
Atmoſphäriſche Luft . .	1,29318	29,272
Stickſtoff	1,25616	30,134
Sauerſtoff	1,42980	26,475
Waſſerſtoff	0,08957	422,612

Beſtimmen wir mit Zugrundelegung von Formel 11 die Gleichgewichtsbedingung für eine begrenzte Luftmaſſe, die ſich in ſenkrechter Richtung x Meter in die Höhe erſtreckt und bei der ſich die Temperatur ändert, ſo iſt in der Grundgleichung 1:

$$p_r = p_{r-1} + \gamma x_r, \qquad \gamma = \frac{p_{r-1}}{R(273+t)}$$

zu ſetzen und dann ebenſo wie in §. 4 zu verfahren. Das Ergebniß der Rechnung liefert

$$\left.\begin{aligned} q &= p e^{\frac{x}{RT}} \quad \text{und} \\ x &= RT \ln \frac{q}{p} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

12 Die Wärmemenge, welche nothwendig iſt, 1 Kilogramm Waſſer von 0° auf 1° Celſius zu erwärmen, wird als Einheit bei der Beſtimmung anderer Wärmemengen benutzt und mit Wärmeeinheit oder Calorie bezeichnet. Bei anderen Körpern als Waſſer wird für dieſelbe Temperaturerhöhung eine größere oder kleinere Wärmemenge nothwendig ſein, und man nennt dieſelbe die ſpecifiſche Wärme oder Wärmecapacität des Körpers bei gleichem Gewichte, oder kurz die Gewichtscapacität. Die Zahl wird eine andere werden, wenn man nicht gleiche Gewichte, ſondern gleiche Volumina mit einander vergleicht, und man hat deshalb auch noch die ſpecifiſche Wärme der Körper bei gleichem Volumen, oder kurz die Raumcapacität in Betracht zu ziehen. Bezeichnen wir die erſte mit c, die letztere mit ω, das Gewicht von einem Kubikmeter des Körpers mit γ_1, das Gewicht von einem Kubikmeter Waſſer aber mit γ, ſo iſt die Wärmemenge um γ_1 Kilogramm des Körpers um 1° zu erwärmen $= c\gamma_1$, und diejenige welche γ Kilogramm Waſſer um 1° zu erwärmen vermag $= \gamma$. Die beiden Ausdrücke ſind zugleich die Wärmemengen, welche 1 Kubikmeter des Körpers reſp. des Waſſers um 1° erwärmen; demnach iſt die Raumcapacität

$$\omega = \frac{\gamma_1}{\gamma} c.$$

Da nun aber $\frac{\gamma_1}{\gamma}$ das ſpecifiſche Gewicht des Körpers, bezogen auf Waſſer, vorſtellt, welches mit ε bezeichnet werden mag, ſo iſt allgemein

$$\omega = \varepsilon c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Bei den luftförmigen Körpern iſt die ſpecifiſche Wärme nicht unter allen Umſtänden conſtant, ſie iſt vielmehr von dem Zuſtande abhängig, in dem ſich die Luftmaſſe während der Erwärmung befindet. Fand die Erwärmung unter conſtantem Druck ſtatt, ſo wollen wir die ſpecifiſche Wärme mit c und ω_p

bezeichnen, wurde dagegen das Volumen constant erhalten, so seien die Wärmecapacitäten c_v und ω_v. Hat nämlich eine Luftmasse unter Ueberwindung eines äußern unveränderlichen Druckes ein größeres Volumen angenommen und dabei eine Temperaturerhöhung von t_1^0 erfahren, so wird diese Luftmasse, wenn wir sie jetzt auf ihr ursprüngliches Volumen zusammendrücken eine weitere Temperaturerhöhung um t_2^0 erfahren, ohne daß man nothwendig hat von Neuem Wärme zuzuführen. Dieselbe Wärmemenge, welche die Temperatur dieser Luftmasse um t_1^0 zu erhöhen im Stande ist, wenn eine Ausdehnung bei unverändertem Drucke gestattet ist, wenn also die Luftmasse äußere Arbeit verrichtet, wird eine Temperaturerhöhung von $t_1 + t_2$ Graden hervorbringen wenn keine Ausdehnung stattfinden kann. Es ist demnach für dieselbe Temperaturerhöhung im ersten Falle der Luftmasse eine größere Wärmemenge als im letztern Falle zuzuführen, oder die Wärmecapacität bei constantem Drucke muß größer sein als die bei constantem Volumen. Die neuesten Versuche über die specifische Wärme verdanken wir Regnault, und zwar sind von demselben die Gewichtscapacitäten bei constantem Drucke bestimmt worden, während die bei constantem Volumen sich bis jetzt durch Versuche nicht haben finden lassen. In der folgenden Tabelle sind für die chemisch einfachen Gase, die wir als permanente kennen, die specifischen Gewichte, die Gewichts- und Raumcapacitäten bei constantem Drucke auf Wasser bezogen zusammengestellt.

	ε	c_p	ω_p
Atmosphärische Luft .	0,00129318	0,23751	0,00030714
Stickstoff	0,00125616	0,24380	0,00030625
Sauerstoff	0,00142980	0,21751	0,00031099
Wasserstoff	0,00008957	3,40900	0,00030533

Wenn sich nun auch nicht, wie schon oben angegeben, die Wärmecapacität bei constantem Volumen durch Versuche bestimmen läßt, so kann man jedoch dieselbe für atmosphärische Luft indirect berechnen, da sich das Verhältniß zwischen c_p und c_v auf verschiedene Weise ermitteln läßt. Als den zuverlässigsten Werth für $\frac{c_p}{c_v} = \varkappa$ nimmt man jetzt 1,410, woraus sich die Gewichtscapacität c_v bei constantem Volumen für Luft zu 0,16844 ergiebt. In den meisten Fällen läßt sich dieser Werth $\varkappa = 1{,}410$ für sämmtliche oben aufgeführte permanente Gase benutzen.

Eine Luftmasse, welche unter Ueberwindung eines äußern constanten Druckes 13
erwärmt wird verrichtet eine äußere Arbeit und es verschwindet dabei ein Theil der zugeführten Wärme. Es sind demnach Arbeit und Wärme äquivalent, und es ist der Arbeitswerth der Wärmeeinheit oder kurz das mechanische Wärmeäquivalent zu entwickeln.

Es sei 1 Kubikmeter Luft von 0° unter dem normalen Drucke von p Kilogrammen pr. □Meter und dem specifischen Gewicht von γ Kilogrammen

gegeben. Die Luft werde bei demselben Volumen um 1^0 erwärmt, so ist die dazu nöthige Wärmemenge $= \gamma c_v$, und die Spannung p_1 der Luft bestimmt sich nach dem Gesetze von Mariotte und Gay-Lussac zu $p \frac{273 + 1}{273}$. Könnte man jetzt den Raum, in welchem sich der Kubikmeter Luft befindet, mit einem vollkommen luftleeren Raume in Verbindung bringen, so würde, da sich die Luft ohne äußere Arbeit zu verrichten ausdehnt, die Temperatur von 1^0 erhalten bleiben, und wenn wir noch voraussetzen daß der zweite Raum $\frac{1}{273}$ Kubikmeter Inhalt hat, so wird dem Gesetze von Mariotte zufolge, der Druck pr. □Meter wieder zu p Kilogrammen geworden sein. Wir hätten demnach erhalten $\left(1 + \frac{1}{273}\right)$ Kubikmeter Luft, deren Temperatur 1^0, deren Spannung p Kilogramm ist und wozu wir die Wärmemenge γc_v verbraucht haben.

Es sei jetzt andererseits 1 Kubikmeter Luft von 0^0 unter dem normalen Drucke von p Kilogrammen pr. □Meter dem specifischen Gewichte von γ Kilogrammen gegeben, und während der Luftmasse unter Ueberwindung desselben Druckes eine Ausdehnung gestattet ist, möge dieselbe um 1^0 erwärmt werden. Es ist hierbei die größere Wärmemenge γc_p zugeführt worden, und dennoch hat man wie bei dem ersten Falle $\left(1 + \frac{1}{273}\right)$ Kubikmeter Luft erhalten, deren Temperatur 1^0 und deren Spannung p Kilogramm pr. □Meter ist. Im letzten Falle ist aber äußere Arbeit verrichtet worden, und zwar ist der Druck p um $\frac{1}{273}$ Meter fortgeschoben worden, wenn wir den Querschnitt des Luftbehälters zu 1 Quadratmeter annehmen. Die von der Luftmasse verrichtete Arbeitsgröße ist deshalb $p \frac{1}{273}$ km. Die beiden Luftquantitäten waren zu Anfang identisch, und sind es auch im Endzustande, demnach muß die überschüssige Wärmemenge $\gamma (c_p - c_v)$ die oben angegebene Arbeit verrichtet haben. Bezeichnet man das „mechanische Wärmeäquivalent“ mit $\frac{1}{A}$, d. i. also die Arbeitsgröße in Kilogrammmetern, welche die Wärmeeinheit zu erzeugen vermag, welche also der Erwärmung von 1 Kilogramm Wasser von 0^0 auf 1^0 Celsius entspricht, so erhalten wir als Gleichung

$$\frac{1}{A} \gamma (c_p - c_v) = p \frac{1}{273}$$

$$c_p - c_v = \frac{p}{\gamma} \frac{1}{273} \cdot A.$$

Nach Formel 11 können wir aber $\frac{p}{\gamma} \frac{1}{273} = R$ setzen und wir haben deshalb:

$$\left.\begin{aligned} c_p - c_v &= AR \quad \text{und} \\ \omega_p - \omega_v &= AR\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Bei Benutzung der für atmosphärische Luft angegebenen Werthe, nämlich $R = 29{,}272$; $c_p = 0{,}23751$; $c_v = 0{,}16844$ findet sich das mechanische Wärmeäquivalent

$$\frac{1}{A} = 423{,}80^{\text{km}},$$

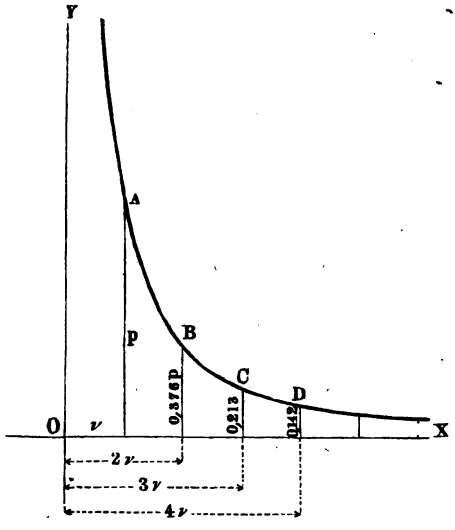
wofür jetzt allgemein 424^{km} genommen wird. Der reciproke Werth A heißt der Wärmewerth der Arbeitseinheit, d. h. 1^{km} kann 1 Kilogramm Wasser von 0^0 um $\frac{1}{424}$ Grad Celsius erwärmen. Allgemein haben wir hiernach:

Durch Multiplication der Wärmeeinheiten Q mit $\frac{1}{A}$ erhält man die repräsentirte Arbeit L in Kilogrammmetern und durch Multiplication einer Arbeitsgröße L in Kilogrammmetern mit A entstehen die entsprechenden Wärmeeinheiten Q:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{A}\, Q &= L \\ A\, L &= Q \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Dehnt sich ein Gas unter Verrichtung einer äußeren Arbeit aus, ohne 14
daß demselben von außen Wärme zugeführt wird, so kann die äußere Arbeit nur auf Kosten der Temperatur (Schwingungsarbeit) geleistet werden. Mit der Abnahme der Temperatur sinkt aber auch die Spannung. Diese nimmt also sowohl in Folge der Volumenvergrößerung, als auch in Folge der Temperaturveränderung ab. Drückt man umgekehrt ein Gas zusammen, ohne demselben zugleich Wärme zu entziehen, so wird die äußere Arbeit sich als Temperaturerhöhung bemerkbar machen, die innere oder Schwingungsarbeit wird sich hierbei vergrößern und die Spannung muß in Folge der Raumverminderung und der Temperaturerhöhung zunehmen. Die

Fig. 11.



Beziehung zwischen Spannung p und dem specifischen Volumen v kann hiernach nicht durch das Gesetz von Mariotte wiedergegeben werden, vielmehr ist das von Poisson zuerst aufgestellte Gesetz in Anwendung zu bringen:

$$p v^{\varkappa} = p_1 v_1^{\varkappa} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

worin $\varkappa$ das in §. 12 bestimmte Verhältniß zwischen der Wärmecapacität bei constantem Druck und der bei constantem Volumen bezeichnet und welches Verhältniß für permanente Gase constant gleich 1,41 genommen werden kann.

Durch Verbindung von Formel 16 mit Formel 11 ergiebt sich noch

$$\frac{273+t}{273+t_1} = \frac{T}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{\varkappa-1} = \left(\frac{\gamma}{\gamma_1}\right)^{\varkappa-1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \quad \ldots \quad (17)$$

Denkt man die specifischen Volumina v auf der XAchse eines rechtwinkligen Coordinatensystems, die Spannkraft p als zugehörige Ordinaten aufgetragen und die Endpunkte der letzteren verbunden, so stellt die Curve ABC (Fig. 11) das Gesetz dar, nach welchem die Spannungen mit wachsendem Volumen abnehmen. Diese krumme Linie heißt die adiabatische Curve der permanenten Gase.

15 Diejenigen luftförmigen Körper welche aus einer tropfbaren Flüssigkeit, gewöhnlich durch Wärmemittheilung entstanden und die umgekehrt gewöhnlich durch Wärmeentziehung wieder in den flüssigen Zustand zurückgebracht werden können, nennt man Dämpfe. Steht Dampf mit der Flüssigkeit aus welcher derselbe entstanden in Berührung, so bewirkt die geringste Abkühlung eine theilweise Condensation, während eine weitere Erwärmung eine neue Flüssigkeitsmenge in Dampf verwandelt. Dies Verhalten ist wesentlich verschieden von dem der permanenten Gase, und es läßt sich deshalb auch das Gesetz von Mariotte und Gay-Lussac auf derartige Dämpfe nicht in Anwendung bringen. Ist dagegen der Dampf von seiner Flüssigkeit befreit, so kann derselbe durch Erwärmung, Compression ꝛc. in einen Zustand versetzt werden, welcher dem der permanenten Gase um so ähnlicher wird je weiter sich der Dampf von seinem Condensationspunkte entfernt befindet, d. h. von dem Punkte wo die geringste Abkühlung eine Condensation zur Folge haben würde. Dämpfe der ersten Art nennt man gesättigte Dämpfe, dagegen heißen die der zweiten Art ungesättigte oder überhitzte Dämpfe.

Wir beschäftigen uns hier allein mit dem für die Praxis wichtigsten Dampfe, dem Wasserdampfe, und wollen für diesen die Beziehungen zwischen Expansivkraft, Temperatur und Dichtigkeit aufzustellen versuchen.

In einem Gefäße sei Wasser enthalten, welches durch Mittheilung von Wärme allmälig in Dampf übergeführt werden soll. Bei der Dampfbildung wird zuerst neben dem Dampfe auch noch Wasser vorhanden sein und wir haben es also mit gesättigtem Dampfe zu thun. Für diesen ist der Druck auf die Flächeneinheit, die Expansivkraft p, allein von der Temperatur t abhängig, dagegen hat die Dichtigkeit des Dampfes darauf keinen Einfluß. Vermehrt oder vermindert man nämlich das Gefäßvolumen, wird dabei aber die Temperatur

auf der constanten Höhe t erhalten, so wird sich auch der Druck p nicht ändern, vorausgesetzt, daß noch Flüssigkeit zu weiterer Dampfbildung vorhanden ist. Bei der Erhöhung oder Erniedrigung der Temperatur dagegen ändert sich der Druck sofort und es ist deshalb für den gesättigten Wasserdampf der Druck p nur eine Function der Temperatur t, im Gegensatz zu den permanenten Gasen, für die n. F. 11 der Druck p von der Dichtigkeit γ und der Temperatur t abhängig ist.

Setzen wir die oben angefangene Dampfbildung weiter fort, indem wir die Temperatur t bei Erweiterung des Gefäßes constant erhalten und deshalb auch dieselbe Spannkraft p behalten, so wird schließlich der letzte Tropfen Flüssigkeit in Dampf verwandelt. Von diesem Punkte an zeigt nun der Dampf bei fortgesetzter Wärmezuführung, Erweiterung des Gefäßes und Erhaltung der constanten Temperatur t ein ganz anderes Verhalten, seine Expansivkraft p ist jetzt von der Temperatur und der Dichtigkeit γ abhängig, und endlich wird sich der Dampf in seinem Verhalten von einem permanenten Gase nicht mehr unterscheiden, das Gesetz von Mariotte und Gay-Lussac wird auf derartigen überhitzten Wasserdampf Anwendung finden. Denken wir jetzt umgekehrt den erhaltenen überhitzten Wasserdampf comprimirt, indem wir jederzeit für Erhaltung der constanten Temperatur Sorge tragen, so wächst der Druck mit der Abnahme des Volumens bis zu dem Punkte, wo der Dampf gesättigt ist. Von hier ab bleibt p wieder constant, bis durch allmälige Condensation das letzte Dampftheilchen sich wieder in Flüssigkeit verwandelt hat. Es ist hiernach für gesättigten Wasserdampf bei einer bestimmten Temperatur eine Druckerhöhung nicht möglich und man sagt deshalb, gesättigter Wasserdampf befindet sich im Maximo seiner Spannung. Der überhitzte Wasserdampf hat dagegen bei der Temperatur t jederzeit eine geringere Spannung als gesättigter Wasserdampf von derselben Temperatur oder umgekehrt, zeigen beide Arten der Wasserdämpfe gleiche Spannungen so hat der überhitzte Dampf eine höhere Temperatur, wovon die Benennung überhitzter Dampf hergenommen worden ist.

Bei gesättigtem Dampfe von bestimmter Temperatur t und ohne Beimischung von Wasser hat andererseits die Dichtigkeit γ oder das specifische Volumen v dieses Dampfes einen bestimmten Werth, und können diese Größen wiederum als Functionen der Temperatur t angesehen werden. Als Endergebniß der Versuche mit gesättigtem Wasserdampf haben sich hiernach die beiden Gleichungen

$$p = f_t \quad \text{und} \quad \gamma = F_t$$

ergeben, deren specielle Form bis jetzt jedoch nicht gefunden worden ist.

Die Beziehung zwischen der Spannkraft p und der Temperatur t des gesät- 16
tigten Wasserdampfes ist nur durch Versuche bekannt, und zwar sind es vor Allem die berühmten Versuche Regnault's, welche hierbei maßgebend sind, um so mehr als sie durch die von Magnus mit gleicher Sorgfalt durchgeführten Versuche bestätigt werden.

Regnault hat seine Versuchsresultate graphisch dargestellt, indem er die Temperatur t als Abscisse und den beobachteten Druck p als Ordinate aufgetragen. Die durch Verbindung der Punkte sich ergebende Curve stellt die zwischen p und t bestehende Beziehung vor, jedoch ist bis jetzt das wahre Gesetz dieser Curve nicht gefunden worden. Aus dieser graphischen Darstellung hat Regnault nach dem Vorgange von Biot folgende Formel aufgestellt, deren constante Werthe durch die Versuche bestimmt worden sind:

$$\log p = a + b\,\alpha^{\tau} + c\,\beta^{\tau} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

In dieser Formel ist $\tau = t - t_0$, worin t die Temperatur des Dampfes nach Celsius bezeichnet, t_0 ist dagegen eine constante Größe und von Regnault so gewählt worden, daß sie die Temperatur desjenigen der fünf Versuche ist, welcher dem kleinsten Druck entspricht. Der Druck p ist durch eine Quecksilbersäule in Millimetern ausgedrückt.

Zur Bestimmung der fünf Constanten gehören fünf Versuche, wenn die fünf Werthe von p bei gleichen Temperaturdifferenzen gewählt werden. Bezeichnet man mit t_0 die Temperatur für den Versuch, welcher dem kleinsten Druck entspricht, und ist t_1 die Temperatur des nächstfolgenden Versuches, so sind hiernach die Versuchsresultate für die Temperaturdifferenzen $0\,(t_1 - t_0)$, $1\,(t_1 - t_0)$, $2\,(t_1 - t_0)$, $3\,(t_1 - t_0)$ und $4\,(t_1 - t_0)$ zu benutzen. Setzt man diese Werthe in Formel 18 und bezeichnet $\log p$ mit y, so heißen die fünf Gleichungen, zur Berechnung der Constanten a, b, c, α und β:

$$\begin{aligned}
y_0 &= a + b + c \\
y_1 &= a + b\,\alpha^{t_1 - t_0} + c\,\beta^{t_1 - t_0} = a + b\,\alpha_1 + c\,\beta_1 \\
y_2 &= a + b\,\alpha_1^2 + c\,\beta_1^2 \\
y_3 &= a + b\,\alpha_1^3 + c\,\beta_1^3 \\
y_4 &= a + b\,\alpha_1^4 + c\,\beta_1^4.
\end{aligned}$$

Behufs Auflösung dieser Gleichungen setzen wir $y_1 - y_0 = \delta y_0$, $y_2 - y_1 = \delta y_1$, $y_3 - y_2 = \delta y_2$ und $y_4 - y_3 = \delta y_3$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\delta y_0 &= b\,(\alpha_1 - 1) + c\,(\beta_1 - 1) \\
\delta y_1 &= b\,\alpha_1\,(\alpha_1 - 1) + c\,\beta_1\,(\beta_1 - 1) \\
\delta y_2 &= b\,\alpha_1^2\,(\alpha_1 - 1) + c\,\beta_1^2\,(\beta_1 - 1) \\
\delta y_3 &= b\,\alpha_1^3\,(\alpha_1 - 1) + c\,\beta_1^3\,(\beta_1 - 1).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\delta y_1 \delta y_2 = b^2 \alpha_1^3 (\alpha_1 - 1)^2 + bc\alpha_1^2 \beta_1 (\alpha_1 - 1)(\beta_1 - 1) + bc\alpha_1 \beta_1^2 (\alpha_1 - 1)(\beta_1 - 1) + c^2 \beta_1^3 (\beta_1 - 1)^2$$

$$\delta y_0 \delta y_3 = b^2 \alpha_1^3 (\alpha_1 - 1)^2 + bc\alpha_1^3 (\alpha_1 - 1)(\beta_1 - 1) + bc\beta_1^3 (\alpha_1 - 1)(\beta_1 - 1) + c^2 \beta_1^3 (\beta_1 - 1)^2$$

$$\delta y_0 \delta y_2 = b^2 \alpha_1^2 (\alpha_1 - 1)^2 + bc\alpha_1^2 (\alpha_1 - 1)(\beta_1 - 1) + bc\beta_1^2 (\alpha_1 - 1)(\beta_1 - 1) + c^2 \beta_1^2 (\beta_1 - 1)^2$$

$$\delta y_1^2 = b^2 \alpha_1^2 (\alpha_1 - 1)^2 + c^2 \beta_1^2 (\beta_1 - 1)^2 + 2bc\alpha_1 \beta_1 (\alpha_1 - 1)(\beta_1 - 1)$$

$$\delta y_1^2 - \delta y_0 \delta y_2 = -bc(\alpha_1 - 1)(\beta_1 - 1)(\alpha_1 - \beta_1)^2$$

$$\delta y_1 \delta y_2 - \delta y_0 \delta y_3 = -bc(\alpha_1 - 1)(\beta_1 - 1)(\alpha_1 + \beta_1)(\alpha_1 - \beta_1)^2.$$

Daher 1) $$\alpha_1 + \beta_1 = \frac{\delta y_1 \delta y_2 - \delta y_0 \delta y_3}{\delta y_1^2 - \delta y_0 \delta y_2}.$$

Ferner ist

$$\delta y_2^2 = b^2 \alpha_1^4 (\alpha_1 - 1)^2 + c^2 \beta_1^4 (\beta_1 - 1)^2 + 2bc\alpha_1^2 \beta_1^2 (\alpha_1 - 1)\beta_1 - 1)$$

$$\delta y_1 \delta y_3 = b^2 \alpha_1^4 (\alpha_1 - 1)^2 + bc\alpha_1^3 \beta_1 (\alpha_1 - 1)\beta_1 - 1) + bc\alpha_1 \beta_1^3 (\alpha_1 - 1)(\beta_1 - 1) + c^2 \beta_1^4 (\beta_1 - 1)^2$$

$$\delta y_2^2 - \delta y_1 \delta y_3 = -bc\alpha_1 \beta_1 (\alpha_1 - 1)(\beta_1 - 1)(\alpha_1 - \beta_1)^2$$

$$\delta y_1^2 - \delta y_0 \delta y_2 = -bc(\alpha_1 - 1)(\beta - 1)(\alpha_1 - \beta_1)^2.$$

Daher 2) $$\alpha_1 \beta_1 = \frac{\delta y_2^2 - \delta y_1 \delta y_3}{\delta y_1^2 - \delta y_0 \delta y_2}.$$

Nachdem aus 1 und 2, α_1 und β_1 gefunden, ergiebt sich:

3) $$b = \frac{\beta_1 \delta y_0 - \delta y_1}{(\alpha_1 - 1)(\beta_1 - \alpha_1)}$$

4) $$c = \frac{\delta y_1 - \alpha_1 \delta y_0}{(\beta_1 - 1)(\beta_1 - \alpha_1)}$$

5) $$\alpha = y_0 - b - c$$

6) $$log\, \alpha = \frac{1}{t_1 - t^0}; log\, \alpha_1$$

7) $$log\, \beta = \frac{1}{t_1 - t_0} \cdot log\, \beta_1.$$

Auf diese Weise ergeben sich bei Benutzung der entsprechenden Versuchsresultate von Regnault, nach Zeuner folgende Formeln, welche die Beziehung zwischen dem Drucke p in Millimeter Quecksilbersäule und der Temperatur t des Dampfes nach Celsius angeben:

a) Für Wasserdämpfe von 0 bis 100 Grad Wärme

$$log\, p = a - b\alpha^\tau + c\beta^\tau \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

$$a = 4{,}7393707; \quad log(b\alpha^\tau) = 0{,}6117408 - 0{,}003274463\, t$$

$$log(c\beta^\tau) = -1{,}8680093 + 0{,}006864937\, t.$$

b) Für Wasserdämpfe von 100 bis 200 Grad Wärme

$$\log p = a - b\alpha^\tau - c\beta^\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

$$a = 6{,}2640348;\ \log(b\alpha^\tau) = 0{,}6593123 - 0{,}001656138\,t$$

$$\log(c\beta^\tau) = 0{,}0207601 - 0{,}005950708\,t.$$

17 Die Dichtigkeit des Wasserdampfes hängt wie in §. 15 nachgewiesen, ebenso wie bei allen luftförmigen Körpern von der Temperatur und Spannkraft zu gleicher Zeit ab. Da jedoch beim gesättigten Wasserdampfe die Expansivkraft durch die Temperatur allein bestimmt wird, so kann man eine der beiden Größen eliminirt denken und die Dichtigkeit als eine Function von der Spannkraft oder von der Temperatur betrachten. Mit Hülfe der mechanischen Wärmetheorie sind die specifischen Dampfvolumina, das sind die Volumina der Gewichtseinheit, berechnet worden und der reciproke Werth hiervon liefert das Gewicht der Volumeneinheit, d. i. die Dichtigkeit γ. Aus den auf diese Weise erhaltenen Werthen hat Zeuner folgende Formel zwischen der Dichtigkeit γ und der Spannkraft des Dampfes ausgedrückt durch die Anzahl a der Atmosphären aufgestellt, welche die Dichtigkeiten fast genau übereinstimmend mit den nach der oben angegebenen Methode berechneten wiedergiebt.

$$\gamma = 0{,}6061\, a^{0{,}9393} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Ersetzen wir γ durch das specifische Volumen v, so liefert die Formel

$$a\, v^{1{,}0646} = 1{,}7042,$$

d. i. $a v_m$ gleich einem constanten Werth, während nach dem Gesetze von Mariotte $a v$ constant sein würde.

18 Es bleibt noch übrig, die Wärmemenge anzugeben, welche nothwendig ist, um Wasser von gegebener Temperatur in Dampf von bestimmter Temperatur zu verwandeln. Hierbei sind wieder allein die Versuche von Regnault maßgebend, durch die wir sowohl erfahren welche Wärmemenge übertragen werden muß um das Wasser von 0^0 auf t^0 zu erwärmen, als wir auch Aufschluß erhalten über die Wärmemenge welche die Verwandlung des Wassers in Dampf ermöglicht. Unter der Flüssigkeitswärme q des Wassers, bei einer gewissen Temperatur t, versteht man die Wärmemenge welche einem Kilogramm Wasser zugeführt werden muß, um dasselbe von der Temperatur von 0^0 ohne Aenderung des Aggregatzustandes auf die Temperatur t^0 zu bringen. Regnault hat aus seinen Versuchen für q folgende empirische Formel abgeleitet:

$$q = t + 0{,}00002\,t^2 + 0{,}0000003\,t^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Unter der Verdampfungswärme r gesättigten Wasserdampfes von einer gewissen Temperatur t, oder von entsprechendem Drucke p, wird ferner diejenige Wärmemenge verstanden welche einem Kilogramm Wasser von der Temperatur t zugeführt werden muß, um dasselbe unter Ueberwindung des constanten äußeren Druckes p in gesättigten Dampf von derselben Temperatur zu verwandeln. Die Summe aus der Flüssigkeitswärme q welche der Temperatur t

entspricht, und der Verdampfungswärme r, heißt die Gesammtwärme des gesättigten Wasserdampfes und wird mit W bezeichnet:

$$W = q + r \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Die von Regnault für die Gesammtwärme des gesättigten Wasserdampfes von der Temperatur t aus seinen Versuchen abgeleitete Formel ist:

$$W = 606{,}5 + 0{,}305\,t \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

Mit Benutzung von Formel 22 erhalten wir daher die Verdampfungswärme

$$r = 606{,}5 - 0{,}695\,t - 0{,}00002\,t^2 - 0{,}0000003\,t^3.$$

Die Dampfbildung aus Wasser können wir nur in der Weise vorgenommen denken, daß sich das Wasser in einem Cylinder mit beweglichem Kolben befindet auf den ein äußerer Druck von p Kilogrammen pr. □ Meter ausgeübt wird. Sobald sich nun Dampf aus dem Wasser bildet, so wird dieser sich Raum zu verschaffen suchen und dabei den Kolben mit constantem Druck p zurückschieben. Hierbei verrichtet der Dampf eine äußere Arbeit, welcher eine bestimmte Wärmemenge entspricht, die daher in dem Dampfe nicht mehr enthalten sondern verschwunden ist. Bezeichnen wir das specifische Volumen des gebildeten Dampfes mit v, das der Flüssigkeit vor dem Beginn der Verdampfung mit ω so ist der Raum, den sich der Dampf verschaffen muß $v - \omega$. Hierbei wird der constante Druck p überwunden, weshalb der Dampf die äußere Arbeit $p(v - \omega)$ verrichtet welche einer Wärmemenge $Ap(v - \omega)$ entspricht. Setzen wir noch zur Abkürzung $v - \omega$, worin ω als constant zu betrachten ist, gleich u so ist die bei der Dampfbildung verloren gegangene Wärme gleich

$$Apu$$

und der Dampf von der Temperatur t enthält demnach die Wärmemenge

$$i = W - Apu,$$

welchen Werth wir nach Zeuner die Dampfwärme nennen wollen. Subtrahiren wir die der äußeren Arbeit entsprechende Wärmemenge Apu, äußere Verdampfungswärme genannt, von der Verdampfungswärme r, so erhalten wir nach Zeuner die innere Verdampfungswärme ϱ. Demnach ist

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= r - Apu = W - q - Apu \\ i &= W - Apu = q + \varrho \\ r &= W - q = \varrho + Apu \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (25)$$

Nach den Untersuchungen von Zeuner läßt sich die innere Verdampfungswärme ϱ sehr genau durch die folgende Formel wiedergeben

$$\varrho = 575{,}40 - 0{,}791\,t \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Bei Benutzung derselben, sowie der von Regnault aufgestellten Formeln 22 und 23 für die Flüssigkeitswärme q und die Gesammtwärme W findet man dann auch die äußere Verdampfungswärme

$$Apu = 31{,}10 + 0{,}096\,t - 0{,}00002\,t^2 - 0{,}0000003\,t^3 \ldots \quad (27)$$

Tabelle für gesättigte Wasserdämpfe aus den Grundzügen der mechanischen Wärmetheorie von Dr. Zeuner.

Dampfspannung in			Temperatur Celsius	Dichtigkeit oder Gewicht von 1 Kubikmeter in Kilogrammen	Flüssigkeitswärme	Innere Verdampfungswärme	Aeußere Verdampfungswärme
Atmosphären	Millimeter Quecksilbersäule	Kilogramm pro □ Meter					
a	h_1	p	t (Regnault)	γ	q (Regnault)	ϱ	Apu
0,1	76	1033,4	46,21	0,0687	46,282	538,848	35,464
0,2	152	2066,8	60,45	0,1326	60,589	527,584	36,764
0,3	228	3100,2	69,49	0,1945	69,687	520,433	37,574
0,4	304	4133,6	76,25	0,2553	76,499	515,086	38,171
0,5	380	5167,0	81,71	0,3153	82,017	510,767	38,637
0,6	456	6200,4	86,32	0,3744	86,662	507,121	39,045
0,7	532	7233,8	90,32	0,4330	90,704	503,957	39,387
0,8	608	8267,2	93,88	0,4910	94,304	501,141	39,688
0,9	684	9300,6	97,08	0,5487	97,543	498,610	39,957
1	760	10334,0	100,00	0,6059	100,500	496,300	40,200
1,1	836	11367,4	102,68	0,6628	103,216	494,180	40,421
1,2	912	12400,8	105,17	0,7194	105,740	492,210	40,626
1,3	988	13434,2	107,50	0,7757	108,104	490,367	40,816
1,4	1064	14467,6	109,68	0,8317	110,316	488,643	40,993
1,5	1140	15501,0	111,74	0,8874	112,408	487,014	41,159
1,6	1216	16534,4	113,69	0,9430	114,389	485,471	41,315
1,7	1292	17567,8	115,54	0,9983	116,269	484,008	41,463
1,8	1368	18601,2	117,30	1,0534	118,059	482,616	41,602
1,9	1444	19634,6	118,99	1,1084	119,779	481,279	41,734
2	1520	20668,0	120,60	1,1631	121,417	480,005	41,861
2,1	1596	21701,4	122,15	1,2177	122,995	478,779	41,981
2,2	1672	22734,8	123,64	1,2721	124,513	477,601	42,096
2,3	1748	23768,2	125,07	1,3264	125,970	476,470	42,207
2,4	1824	24801,6	126,46	1,3805	127,386	475,370	42,314
2,5	1900	25835,0	127,80	1,4345	128,753	474,310	42,416
2,6	1976	26868,4	129,10	1,4883	130,079	473,282	42,515
2,7	2052	27901,8	130,35	1,5420	131,354	472,293	42,610
2,8	2128	28935,2	131,57	1,5956	132,599	471,328	42,702
2,9	2204	29968,6	132,76	1,6490	133,814	470,387	42,791
3	2280	31002,0	133,91	1,7024	134,989	469,477	42,876
3,1	2356	32035,4	135,03	1,7556	136,133	468,591	42,960
3,2	2432	33068,8	136,12	1,8088	137,247	467,729	43,040

Fortsetzung der Tabelle für gesättigte Wasserdämpfe ꝛc.

Dampfspannung in			Temperatur	Dichtigkeit oder Gewicht von 1 Kubikmeter in Kilogrammen	Flüssigkeitswärme	Innere Verdampfungswärme	Aeußere Verdampfungswärme
Atmosphären	Millimeter Quecksilbersäule	Kilogramm pro □ Meter	Celsius				
a	h_1	p	t (Regnault)	γ	q (Regnault)	ϱ	Apu
3,3	2508	34102,2	137,19	1,8618	138,341	466,883	43,119
3,4	2584	35135,6	138,23	1,9147	139,401	466,060	43,196
3,5	2660	36169,0	139,24	1,9676	140,438	465,261	43,269
3,6	2736	37202,4	140,23	2,0203	141,450	464,478	43,342
3,7	2812	38235,8	141,21	2,0729	142,453	463,703	43,413
3,8	2888	39269,2	142,15	2,1255	143,416	462,959	43,480
3,9	2964	40302,6	143,08	2,1780	144,368	462,224	43,548
4	3040	41336,0	144,00	2,2303	145,310	461,496	43,614
4,1	3116	42369,4	144,89	2,2826	146,222	460,792	43,677
4,2	3192	43402,8	145,76	2,3349	147,114	460,104	43,739
4,3	3268	44436,2	146,61	2,3871	147,985	459,431	43,799
4,4	3344	45469,6	147,46	2,4391	148,857	458,759	43,859
4,5	3420	46503,0	148,29	2,4911	149,708	458,103	43,918
4,6	3496	47536,4	149,10	2,5430	150,539	457,462	43,975
4,7	3572	48569,8	149,90	2,5949	151,360	456,829	44,030
4,8	3648	49603,2	150,69	2,6467	152,171	456,204	44,085
4,9	3724	50636,6	151,46	2,6984	152,961	455,595	44,139
5	3800	51670,0	152,22	2,7500	153,741	454,994	44,192
5,1	3876	52703,4	152,97	2,8016	154,512	454,401	44,243
5,2	3952	53736,8	153,70	2,8531	155,262	453,823	44,293
5,3	4028	54770,2	154,43	2,9046	156,012	453,246	44,343
5,4	4104	55803,6	155,14	2,9560	156,741	452,684	44,392
5,5	4180	56837,0	155,85	3,0073	157,471	452,123	44,441
5,6	4256	57870,4	156,54	3,0586	158,181	451,577	44,487
5,7	4332	58903,8	157,22	3,1098	158,880	451,039	44,533
5,8	4408	59937,2	157,90	3,1610	159,579	450,501	44,579
5,9	4484	60970,6	158,56	3,2122	160,259	449,979	44,623
6	4560	62004,0	159,22	3,2632	160,938	449,457	44,667
6,1	4636	63037,4	159,87	3,3142	161,607	448,943	44,710
6,2	4712	64070,8	160,50	3,3652	162,255	448,444	44,753
6,3	4788	65104,2	161,14	3,4161	162,915	447,938	44,794
6,4	4864	66137,6	161,76	3,4670	163,553	447,448	44,836
6,5	4940	67171,0	162,37	3,5178	164,181	446,965	44,876

Fortsetzung der Tabelle für gesättigte Wasserdämpfe ꝛc.

Dampfspannung in			Temperatur	Dichtigkeit oder Gewicht von 1 Kubikmeter in	Flüssigkeitswärme	Innere Verdampfungswärme	Aeußere Verdampfungswärme
Atmosphären	Millimeter-Quecksilbersäule	Kilogramm pro □ Meter	Celsius	Kilogrammen			
a	h_1	p	t (Regnault)	γ	q (Regnault)	ϱ	Apu
6,6	5016	68204,4	162,98	3,5685	164,810	446,483	44,916
6,7	5092	69237,8	163,58	3,6192	165,428	446,008	44,956
6,8	5168	70271,2	164,18	3,6699	166,047	445,534	44,994
6,9	5244	71304,6	164,76	3,7206	166,645	445,075	44,032
7	5320	72338,0	165,34	3,7711	167,243	444,616	45,070
7,25	5510	74921,5	166,77	3,8974	168,718	443,485	45,162
7,50	5700	77505,0	168,15	4,0234	170,142	442,393	45,250
7,75	5890	80088,5	169,50	4,1490	171,535	441,325	45,337
8	6080	82672,0	170,81	4,2745	172,888	440,289	45,420
8,25	6270	85255,5	172,10	4,3997	174,221	439,269	45,501
8,50	6460	87839,0	173,35	4,5248	175,514	438,280	45,578
8,75	6650	90422,5	174,57	4,6495	176,775	437,315	45,654
9	6840	93006,0	175,77	4,7741	178,017	436,366	45,727
9,25	7030	95589,5	176,94	4,8985	179,228	435,440	45,798
9,50	7220	98173,0	178,08	5,0226	180,408	434,539	45,868
9,75	7410	100756,5	179,21	5,1466	181,579	433,645	45,935
10	7600	103340,0	180,31	5,2704	182,719	432,775	46,001
10,25	7790	105923,5	181,38	5,3941	183,828	431,928	46,064
10,50	7980	108507,0	182,44	5,5174	184,927	431,090	46,127
10,75	8170	111090,5	183,48	5,6405	186,005	430,267	46,189
11	8360	113674,0	184,50	5,7636	187,065	429,460	46,247
11,25	8550	116257,5	185,51	5,8864	188,113	428,661	46,306
11,50	8740	118841,0	186,49	6,0092	189,131	427,886	46,362
11,75	8930	121424,5	187,46	6,1318	190,139	427,119	46,417
12	9120	124008,0	188,41	6,2543	191,126	426,368	46,471
12,25	9310	126591,5	189,35	6,3765	192,104	425,624	46,524
12,50	9500	129175,0	190,27	6,4986	193,060	424,896	46,576
12,75	9690	131758,5	191,18	6,6206	194,007	424,177	46,626
13	9880	134342,0	192,08	6,7424	194,944	423,465	46,676
13,25	10070	136925,5	192,96	6,8642	195,860	422,769	46,724
13,50	10260	139509,0	193,83	6,9857	196,766	422,080	46,772
13,75	10450	142092,5	194,69	7,1072	197,662	421,400	46,818
14	10640	144676,0	195,53	7,2283	198,537	420,736	46,864

Uebungen.

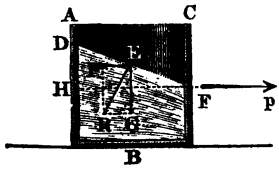
1. Vermöge der allgemeinen Eigenschaft der Flüssigkeiten werden die einzelnen materiellen Punkte derselben nur dann ihre Lage behaupten, wenn die Resultante aller darauf wirksamen Kräfte in jedem Punkte normal zu der sich bildenden Oberfläche gerichtet ist. Hieraus folgt, daß sich für jeden speciellen Fall die Form der freien Oberfläche einer Flüssigkeit bestimmen lassen wird, wenn man als Ausgangspunkt die Resultante aller auf einen Punkt wirksamen Kräfte normal zu der sich bildenden Oberfläche annimmt.

Eine tropfbare Flüssigkeit, deren einzelne materielle Punkte der Schwerkraft unterworfen sind, und die außerdem noch einen constanten Druck erleidet, bildet, wie wir gesehen haben, in ihrer freien Oberfläche eine Horizontalebene.

Wirken außer der Schwerkraft noch andere Kräfte auf die einzelnen Theile einer Flüssigkeit, so ist hiernach für jeden einzelnen Punkt die Resultante der Kräfte zu bestimmen und die Normale zu derselben wird einen kleinen Theil der gesuchten freien Oberfläche angeben. Elementar läßt sich die Sache nicht oft durchführen. Als Beispiel mögen folgende Fälle dienen.

2. Ein prismatisches Gefäß ABC (Fig. 12) mit horizontalem Boden sei mit einer tropfbaren Flüssigkeit angefüllt und werde mit der Acceleration j in horizontaler Richtung fortbewegt. Zu Anfang der Bewegung wird durch die Reaction in der Flüssigkeit von Punkt zu Punkt ein Aufstauen des Wassers herbeigeführt, und sobald die Acceleration einen constanten Werth angenommen, werden die Flüssigkeitstheilchen wieder mit einander im Gleichgewicht sein und es wird sich eine freie Oberfläche bilden. Um dieselbe der Form nach zu bestimmen, untersuchen wir die Begrenzungslinie der Oberfläche in einer durch die Richtung der Bewegung des Gefäßes gelegten Verticalebene. Auf jeden materiellen Punkt von der Masse m, z. B. E, wirkt nach verticaler Richtung das Gewicht mg, wenn wir von dem Atmosphärendruck absehen, und nach horizontaler Richtung ist, der Bewegungsrichtung entgegengesetzt, die Kraft mj wirksam. Die Resultante R aus den beiden Kräften muß zu dem Elemente der

Fig. 12.



freien Oberfläche in E normal ſtehen. Bezeichnen wir den Winkel, den das Element mit der Horizontalen bildet, durch α, ſo iſt:

$$mj : mg = \sin\alpha : \cos\alpha$$

und

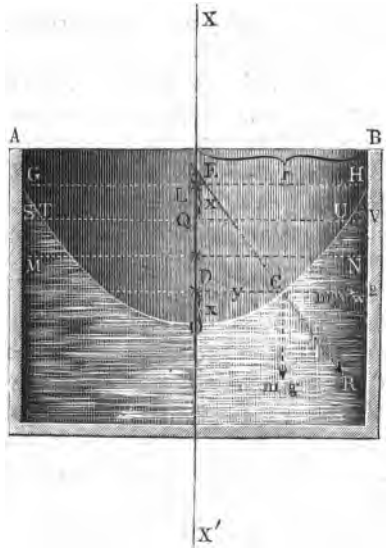
$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{j}{g}.$$

Sobald die Beſchleunigung j der Bewegung einen conſtanten Werth angenommen, wird $\frac{j}{g}$ für alle Punkte der freien Oberfläche denſelben Werth haben, es wird alſo jedes Element der Oberfläche mit der Horizontalebene den conſtanten Winkel α bilden, d. h. die freie Oberfläche der Flüſſigkeit iſt für dieſen ſpeciellen Fall eine unter dem Winkel α gegen den Horizont HF geneigte Ebene DF.

Es wird hierbei ebenſoviel Waſſer über den urſprünglichen Waſſerſtand als unter denſelben getreten ſein, ſo daß die durch die Mitte von DF gelegte Horizontalebene den urſprünglichen Waſſerſtand repräſentirt.

3. Ein cylindriſches Gefäß AB (Fig. 13) ſei mit einer tropfbaren Flüſſigkeit gefüllt, und werde um ſeine geometriſche Achſe XX' als Umdrehungsachſe gedreht.

Fig. 13.



Es iſt die Form der freien Oberfläche zu beſtimmen, ſobald die Winkelgeſchwindigkeit den conſtanten Werth ω angenommen. Wir wählen in einem beliebigen Meridianſchnitt GOH einen beliebigen Punkt C und beſtimmen für die darauf wirkſamen Kräfte die Reſultante R. Der Punkt habe die Coordinaten x und y, die Umdrehungsachſe als XAchſe, und eine durch O dazu normal gelegte Linie als YAchſe angeſehen. Die auf den Punkt einwirkenden Kräfte ſind das Gewicht mg und die Centrifugalkraft $m\,y\,\omega^2$. Sobald der Gleichgewichtszuſtand eingetreten, muß die Richtung der Reſultante R in Richtung der Normale für den Punkt C der Curve GOH fallen, und wir erhalten:

$$mg : m\,y\,\omega^2 = DE : DC$$
$$g : y\,\omega^2 = DE : y,$$

d. h.:

$$DE = \frac{g}{\omega^2}.$$

Aus diesem Resultate ist ersichtlich, daß während des Gleichgewichts für jeden beliebigen Punkt C der in gleicher Weise gebildete Abschnitt DE auf der XAchse (Subnormale genannt) den constanten Werth $g : \omega^2$ erhält.

Wir haben bereits in Nr. 66 der Uebungen des 2. Abschnittes Thl. I. gesehen, daß bei der Parabel für jeden beliebigen Punkt, der auf die oben angegebene Weise gebildete Abschnitt DE einen constanten Werth hat und zwar ist, wenn wir den Parameter der Parabel mit p bezeichnen:

$$DE = {}^1/_2\, p.$$

Hiernach bildet der Meridianschnitt GOH eine Parabel, deren Gleichung $y^2 = px$, sich nach Substitution des oben gefundenen Werthes für DE folgendermaßen umändert:

$$y^2 = 2\frac{g}{\omega^2}\, x.$$

Die freie Oberfläche der Flüssigkeit ist nach diesem eine krumme Fläche, welche durch Umdrehung der eben bestimmten Parabel um die XAchse erzeugt wird. Man nennt diese Fläche Paraboloid.

Was weiter die Vertheilung der Wassermasse über den ursprünglichen Wasserstand MN anbetrifft, so ist zu bemerken, daß der Scheitel O des Meridianschnittes um ebensoviel tiefer als MN liegt, als sich GH über MN erhoben hat. Um dies nachzuweisen, machen wir LQ gleich OD, legen durch Q und D Horizontalebenen und zeigen, daß der Querschnitt der gehobenen Wassermasse gleich dem der fehlenden ist. Der Querschnitt des Wasserkörpers in der durch Q gelegten Horizontalebene ist:

$$\pi\,(SQ^2 - TQ^2).$$

In Folge der Parabelgleichung $y^2 = px$ ist

$$SQ^2 = GL^2 = p\,.\,OL$$

und

$$TQ^2 = p\,(OL - x).$$

Daher

$$\pi\,(SQ^2 - TQ^2) = \pi\,.\,px$$
$$= \pi y^2,$$

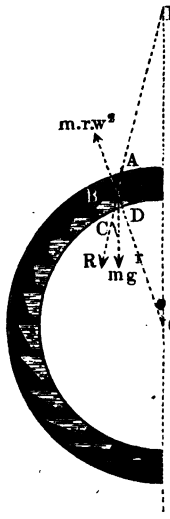
d. h. gleich dem Querschnitt der fehlenden Wassermasse für die durch D gelegte Horizontalebene. In gleicher Weise läßt sich dies für je zwei Punkte Q und D zeigen, die in gleichen Abständen von GH und O auf der XAchse gewählt werden, d. h. aber der ursprüngliche Wasserstand MN muß in der durch die Mitte von OL gelegten Horizontalebene angenommen werden. Die Steighöhe oder Fallhöhe der Flüssigkeit ist also gleich ${}^1/_2\, OL = {}^1/_2\, \frac{GL^2}{p}$.

Setzen wir den Grundebenenhalbmesser gleich r und führen wir den Werth von p ein, so ergiebt sich für diese Steighöhe:

$${}^1/_4\, \frac{(r\,.\,\omega)^2}{g}.$$

4. Es stellt $ABCD$ (Fig. 14) den Durchschnitt einer Zelle eines oberschlächtigen Rades dar.

Fig. 14.



Es ist die freie Oberfläche des in der Zelle befindlichen Wassers zu bestimmen, wenn das Rad sich mit der constanten Winkelgeschwindigkeit ω bewegt.

Die freien Oberflächen des Wassers in den Zellen bilden cylindrische Flächen, deren gemeinschaftliche Achse durch M geht. Zur Bestimmung von M findet sich die Gleichung:

$$OM = \frac{g}{\omega^2}.$$

Es ist diese Bestimmung der freien Oberfläche von Wichtigkeit, da man hierdurch finden kann, welche Zelle bei dem Rade zuerst das Wasser ausfließen läßt, oder von welcher Zelle an das Wasser auszufließen anfängt.

5. Ein prismatisches Gefäß von 0,5 Quadratmeter Bodenfläche ist auf eine Höhe von 3 Meter mit Wasser gefüllt. Wie groß ist der Druck auf den Boden?

1500 Kilogramm.

6. Ein cylindrisches Gefäß von 0,63 Meter Höhe und 0,16^m Bodendurchmesser ist mit Schwefelsäure vom specif. Gewicht 1,9 gefüllt. Wie groß ist der Druck auf den Boden?

24 Kilogramm.

7. Ein Gefäß von der Form eines abgekürzten Kegels ist mit Quecksilber gefüllt. Die Höhe des Kegels ist 0,313^m, der untere Boden hat einen Durchmesser von 0,16^m, der obere einen von 0,105^m. Wie groß ist der Druck auf den Boden? wie groß das Gewicht des in dem Gefäße vorhandenen Quecksilbers?

85,6 Kilogramm.
59,5 „

8. Wie hoch steht das Wasser in einem Gefäße, wenn der Druck auf 6,8 □^{cm} Bodenfläche 12 Kgrm. beträgt?

17,65 Meter.

9. Bei einem anatomischen Heber ist der Durchmesser der kürzeren Röhre 0,314^m, und der Unterschied in der Höhe beider Schenkel, wenn der Apparat mit Wasser gefüllt ist, 3,14^m. Welchen Druck hat der Deckel des kürzeren Schenkels auszuhalten?

243 Kilogramm.

10. Welchen Durchmesser hat der kürzere Schenkel in dem vorigen Apparat, wenn der gegen den Deckel ausgeübte Druck 300 Kgrm. betragen soll?

0,348 Meter.

11. Wie groß ist der Druck auf den □^{m}, welchen der Boden eines Schiffes in einer Tiefe von 1,6^m und 2,2^m auszuhalten hat?

1600 Kilogramm
2200 „

12. Wie groß ist der Bodendruck des Wassers in einem senkrechten prismatischen Gefäße, das 1,25^m tief, 0,9^m breit, und auf 3,14^m Höhe mit Wasser gefüllt ist?

3532,5 Kilogramm

13. Die eine Seitenwand eines 1,57^m hohen Gefäßes ist gegen den Horizont geneigt, und hat die Form eines Rechteckes von 1,25^m Grundlinie und 2,2^m Höhe.

Wie groß ist der Druck gegen diese Seitenwand, wenn das Gefäß vollständig mit Wasser gefüllt ist?

2158,75 Kilogramm.

14. Ein Gefäß von der Form einer nach unten abgestumpften Pyramide ist mit Quecksilber gefüllt. Die quadratischen Grundebenen haben 0,078^m und 0,130^m zu Seiten und die Höhe einer Seitenfläche ist 0,262^m.

Wie groß ist der Boden- und Seitendruck?

21,2 Kilogramm
43,4 „

15. Ein Gefäß mit horizontalem Boden ist mit einer tropfbaren Flüssigkeit gefüllt und wird in senkrechter Richtung mit der Acceleration g_1 fortbewegt.

Wie groß ist für die Flächeneinheit der Druck auf den Boden, wenn die Druckhöhe h ist?

a. Wenn das Gefäß tiefer bewegt wird:

$$q = p + mh\,(g - g_1).$$

Ist $g_1 = g$, so findet gar kein hydrostatischer Druck auf den Boden statt.

Ist $g_1 > g$, so wird der Ausdruck für den hydrostatischen Druck negativ, d. h. das Wasser bleibt bei der Bewegung zurück, da dasselbe mit einer geringeren Acceleration fällt, als es die stattfindende Bewegung verlangt.

b. Wenn das Gefäß senkrecht in die Höhe bewegt wird:

$$q = p + mh\,(g + g_1).$$

16. In den beiden Schenkeln einer communicirenden Röhre steht Quecksilber auf gleicher Höhe. Es soll dasselbe vermittelst einer in den einen Schenkel eingefüllten Wassermasse in dem anderen Schenkel um 0,05^m steigen. Welche Höhe erhält die Wassersäule?

0,68 Meter.

17. Ein Schutzbrett aus Eichenholz ist 0,9^m breit, 1,25^m hoch und 0,05^m stark, und das Wasser steht vor dem Brette 0,783^m hoch. Wie groß ist der Druck gegen das Brett, wie groß ist die Kraft zum Aufziehen desselben?

Specifisches Gewicht des Eichenholzes = 1,2,
Reibungscoefficient . . . . . = 0,7.

275,89 Kilogramm,
260,62 „

18. Es sind die Coordinaten des Druckmittelpunktes zu bestimmen, wenn die gedrückte Fläche eine senkrechte Lage hat.

a. Die gedrückte Fläche ist ein Rechteck mit horizontaler Grundlinie; b und h seien die Abmessungen, und die Entfernung der oberen Seite vom Wasserspiegel sei $\pm a$.

b. Die gedrückte Fläche ist ein Kreis vom Halbmesser r, und die Entfernung seines Mittelpunktes vom Wasserspiegel sei $r + a$.

c. Die gedrückte Fläche ist ein Paralleltrapez mit horizontalen Grundlinien b_1 und b_2. Die Höhe sei h und die Entfernung der oberen Grundlinie b_2 vom Wasserspiegel a.

Nehmen wir die Mittellinie der Flächen als Y Achse, so befindet sich der Mittelpunkt des Drucks in dieser Linie:

a. $$\begin{cases} y = {}^1/_6 \dfrac{4h^2 + 12ah + 12a^2}{2a + h}, \\ y = {}^2/_3 (h - a). \end{cases}$$

b. $$y = {}^1/_4 \frac{5r^2 + 8ar + 4a^2}{r + a},$$

c. $$y = \frac{h^2(3b_1 + b_2) + 4ah(2b_1 + b_2) + 6a^2(b_1 + b_2)}{6a(b_1 + b_2) + 2h(2b_1 + b_2)}.$$

19. Wie ändern sich die Coordinaten in den vorigen Beispielen, wenn die gedrückten Flächen bis an den Wasserspiegel reichen:

a. $y = {}^2/_3 h.$

b. $y = {}^5/_4 r.$

c. $$y = \frac{h}{2} \frac{3b_1 + b_2}{2b_1 + b_2}.$$

20. Bei einer Schifffahrtsschleuse beträgt die Höhe des Oberwasserspiegels $2{,}5^m$, und in der Kammer steht das Wasser am Schleusenthor noch $1{,}25^m$ hoch.

Welchen Druck hat das Schleusenthor auszuhalten und wo liegt der Angriffspunkt desselben, wenn die Breite der Kammer und des Canals $1{,}88^m$ beträgt?

4406,25 Kilogramm.

$$y = \frac{1{,}88 \,.\, 2{,}5 \,.\, 1{,}25 \,.\, {}^2/_3 \,.\, 2{,}5 \;-\; 1{,}88 \,.\, 1{,}25 \,.\, 0{,}625\,(^2/_3 \,.\, 1{,}25 + 1{,}25)}{1{,}88 \,.\, 2{,}5 \,.\, 1{,}25 \;-\; 1{,}88 \,.\, 1{,}25 \,.\, 0{,}625}$$

$y = 1{,}53^m.$

21. In einer verticalen Wand, die zu beiden Seiten vom Wasser gedrückt wird, befindet sich eine Fläche vom Inhalte f. Die Schwerpunktsabstände derselben von den beiden Wasserspiegeln seien h_1 und h_2. Wie groß ist der Druck gegen diese Fläche?

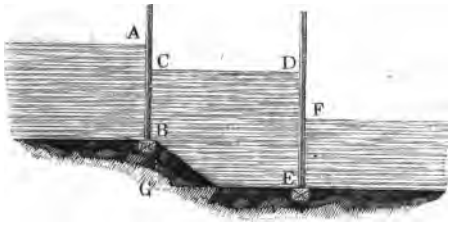
$$Q = f\gamma(h_1 - h_2),$$

d. h. dieser Ueberschuß des Normaldrucks ist gleich dem Gewicht einer Wassersäule, deren Höhe dem Abstande beider Wasserspiegel und deren Grundfläche dem Inhalte der gedrückten Fläche gleich ist.

Hieraus folgt, der Druck gegen diese Fläche wird, so lange sich der Niveauabstand der Wasserspiegel nicht ändert, stets dieselbe Größe behalten, gleichviel in welcher Tiefe sich die gedrückte Fläche befindet.

22. Wie hoch muß das Wasser in der Kammer $BCDE$ (Fig. 15) einer Schleuse stehen, wenn beide Schleusenthore AB und DE gleich stark gedrückt werden sollen?

Fig. 15.



Die Höhe AB des Oberwassers vor dem ersten Schleusenthore sei $= h_1$, die Höhe EF des Unterwassers vor dem zweiten Schleusenthore $= h_2$.

Das Gefälle von B bis E oder BG sei $= h$ und die Breite der Schleusenthore sei b. Nehmen wir die gesuchte Wasserhöhe in der Schleusenkammer gleich x, so ist der Druck Q_1 gegen AB gleich

$$^1/_2\, b\, \gamma\, h_1^2 - {}^1/_2\, b\, \gamma\, (x - h)^2$$

und der Druck Q_2 gegen ED gleich

$$^1/_2\, b\, \gamma\, x^2 - {}^1/_2\, b\, \gamma\, h_2^2.$$

Da Q_1 gleich Q_2 sein soll, so haben wir zur Bestimmung von x:

$$x^2 - h_2^2 = h_1^2 - (x - h)^2.$$

Hieraus folgt:

$$x = \frac{h + \sqrt{2\,(h_1^2 + h_2^2) - h^2}}{2}.$$

Es sei:

$h_1 = 3{,}14^{\text{m}}$; $h_2 = 3{,}77^{\text{m}}$ und $h = 1{,}25^{\text{m}}$; dann ist $x = 4{,}03^{\text{m}}$;

$BC = 4{,}03 - 1{,}25 = 2{,}78^{\text{m}}$; $AC = 3{,}14 - 2{,}78 = 0{,}36^{\text{m}}$;

$DF = 4{,}03 - 3{,}77 = 0{,}26^{\text{m}}$.

Ist die Wassertiefe vor den Oberthoren und hinter den Unterthoren gleich groß, also $h_1 = h_2$, so ist

$$x = \frac{h + \sqrt{4h_1^2 - h^2}}{2}.$$

Für $h_1 = 1{,}57^{\text{m}}$ und $h = 1{,}88^{\text{m}}$ wird:

$x = 2{,}195^{\text{m}}$; $BC = 2{,}195 - 1{,}88 = 0{,}315^{\text{m}}$;

$AC = 1{,}57 - 0{,}315 = 1{,}255^{\text{m}}$; $DF = 2{,}195 - 1{,}57 = 0{,}625^{\text{m}}$.

23. Eine Schleuse besteht aus zwei Kammern, $ACED$ und $DEHG$ (Fig. 16 a. f. S.), und hat daher in AB, DE und GH Thore. Es ist die Wasserhöhe in den beiden Kammern so zu bestimmen, daß der Druck gegen die Schleusenthore gleich groß werde.

Es sei $AB = a = 1{,}88^{\text{m}}$; $BL = b = 1{,}57^{\text{m}}$; $LK = c = 2{,}20^{\text{m}}$;

$JH = d = 1{,}88^{\text{m}}$.

Setzen wir ferner $DE = x$ und $GH = y$, so ist:

$a^2 - (x-b)^2 = x^2 - (y-c)^2 = y^2 - d^2$ und hieraus

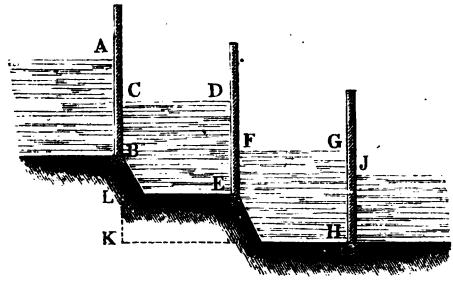
$y^2 - d^2 - a^2 + x^2 - 2xb + b^2 = 0,$

$y^2 - {}^1/_2 d^2 - {}^1/_2 x^2 - cy + {}^1/_2 c^2 = 0,$ d. h.:

$$y = \frac{d^2 + 2a^2 - 3x^2 + 4bx - 2b^2 + c^2}{2c} = \frac{4bx - 3x^2 + \alpha}{2c}$$

und $y^2 = a^2 - x^2 + 2bx - b^2 + d^2 = 2bx - x^2 + \beta$, worin der Abkürzung wegen $\alpha = d^2 + 2a^2 - 2b^2 + c^2$ und $\beta = a^2 - b^2 + d^2$ gesetzt worden ist.

Fig. 16.



Zur Berechnung von x haben wir deshalb

$$2bx - x^2 + \beta = \left(\frac{4bx - 3x^2 + \alpha}{2c}\right)^2,$$

welche Gleichung, geordnet, folgende Form annimmt:

$$x^4 - {}^8/_3 bx^3 + x^2(8b^2 + 2c^2 - 3\alpha)\,{}^2/_9 + x(\alpha - c^2)\,{}^8/_9 b + \frac{\alpha^2 - 4c^2\beta}{9} = 0.$$

Bei Benutzung der obigen Zahlenwerthe ist $\alpha = 10{,}5134$; $\beta = 4{,}6039$;

$$x^4 - 4{,}1867x^3 - 0{,}4758x^2 + 7{,}9175x + 2{,}3778 = 0.$$

Der brauchbare Werth von x muß zwischen b und $b + a$, d. i. 1,57 und 3,45 liegen. Für $x = 1{,}88$ ist $f_x = + 0{,}254$ und für $x = 2$ ist $f_x = - 1{,}184$. Demnach liegt x zwischen 1,88 und 2. Zur Berechnung eines genaueren Werthes haben wir, wenn z die Vergrößerung von 1,88 vorstellt:

$$0{,}254 : 1{,}184 = z : 0{,}12 - z,$$

$$1438 : 254 = 0{,}12 : z,$$

$$z = \frac{254 \,.\, 0{,}12}{1438} = 0{,}02.$$

Und der genauere Werth $x = 1{,}88 + 0{,}02 = 1{,}9$.

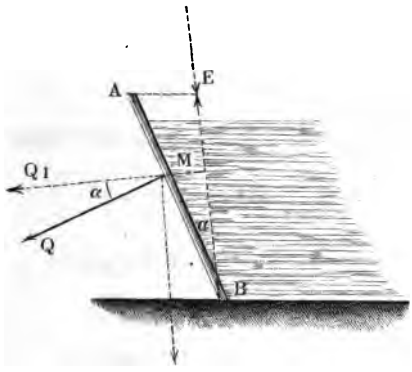
Nachdem x gefunden, haben wir

$$y = \frac{4bx - 3x^2 + \alpha}{2c} = 2{,}64.$$

24. Es ist sehr oft von Wichtigkeit, für eine beliebige ebene Seitenwand den Druck nach einer bestimmten Richtung zu ermitteln.

Es stelle AB (Fig. 17) eine gegen den Horizont geneigte ebene Seitenwand vor, deren Inhalt f und deren Druckhöhe h sein mag. Es ist der Druck Q_1, der mit dem Normaldrucke Q den Winkel α bildet, zu berechnen.

Fig. 17.



Wir zerlegen zu dem Ende den im Mittelpunkte M wirksamen Druck Q in die verlangte Richtung und normal zu derselben, so ist:

$$Q_1 = Q \cos \alpha$$

oder, da $Q = f\, h\, \gamma$:

$$Q_1 = f\, h\, \gamma \cos \alpha.$$

Denken wir die Wand AB auf eine Ebene BE normal zu Q_1 gerichtet projicirt, so ist die Projection f_1 der Fläche f gleich:

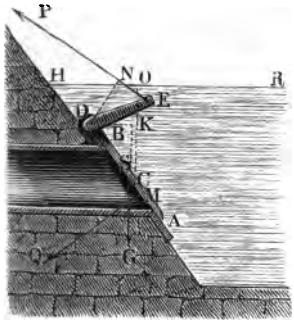
$$f \cos \alpha \quad \text{und daher} \quad Q_1 = f_1\, h\, \gamma,$$

d. h. der Druck, den eine Flüssigkeit gegen eine ebene Seitenwand nach einer **beliebigen** Richtung ausübt, ist gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, die zur Höhe die Druckhöhe der Fläche und zur Grundebene die Projection der Fläche auf einer zur Druckrichtung normalen Ebene hat.

Die am häufigsten zur Anwendung kommenden Drucke sind die nach horizontaler und verticaler Richtung. Für den Horizontaldruck ist also nach der letzten Regel die Verticalprojection und für den Verticaldruck die Horizontalprojection in Rechnung zu bringen.

25. Aus einem Wasserbehälter (Fig. 18) führt ein durch eine kreisförmige Klappe AB geschlossenes Abzugsrohr. Die Länge DA der Klappe sei $0{,}63^m$, der Durchmesser AB derselben $0{,}55^m$, der Abstand ihres Schwerpunktes S von der Drehachse D, $DS = 0{,}314^m$ und ihr Gewicht $G = 22$ Kgrm. Der Abstand DH der Drehachse D von dem Wasserspiegel HR in der Ebene der Klappe gemessen sei $0{,}471^m$ und der Neigungswinkel der Klappenebene gegen den Horizont sei $\alpha = 55^0$. Wie groß ist der Normal-Horizontal- und Verticaldruck gegen die Klappe?

Fig. 18.



Wie groß ist die Kraft P, um die Klappe aufzuziehen, wenn der Arm DN der Kraft gleich $0{,}251^m$ ist?

Ist C der Mittelpunkt der Klappe, so ist die Druckhöhe gleich

$$HC \sin 55 = 0{,}826 \,.\, \sin 55 = 0{,}677^{\mathrm{m}},$$

$$\text{Normaldruck} = \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}55^2 \,.\, 0{,}677 \,.\, 1000 = 160{,}84 \text{ Kgrm.},$$

$$\text{Horizontaldruck} = 160{,}84 \sin 55 = 131{,}75 \text{ Kgrm.},$$

$$\text{Verticaldruck} = 160{,}84 \cos 55 = 92{,}26 \text{ Kgrm.}$$

Die Entfernung y des Druckmittelpunktes M von H ist nach Aufgabe 18

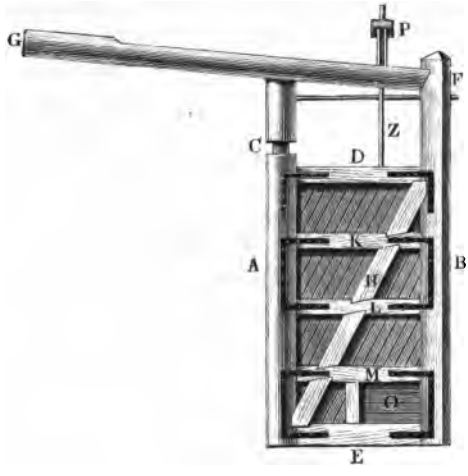
$$y = \frac{1}{4} \frac{5r^2 + 8ar + 4a^2}{r + a} = 0{,}849^{\mathrm{m}}$$

$$P \,.\, 0{,}251 = 160{,}84 \,.\, (0{,}849 - 0{,}471) + 22 \,.\, 0{,}314 \cos 55$$

$$P = 258 \text{ Kgrm.}$$

26. Die Schleusenthore (Fig. 19) bestehen in ihrem Gerippe aus der

Fig. 19.

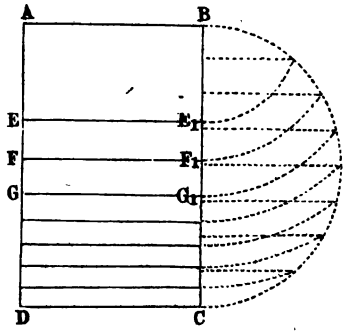


Wendesäule A mit dem Halse C als obere Drehachse des Thores, aus der Anschlagsäule B, aus den Querriegeln K, L, M und aus dem obern und untern Rahmstücke D und E. Da der Druck des Wassers gegen ein Schleusenthor von oben nach unten zunimmt, so darf man die Querriegel, welche hauptsächlich den Druck auszuhalten haben, auch nicht in gleichen Abständen anbringen, sondern dieselben vielmehr in solchen Zwischenräumen anordnen, daß jeder derselben denselben Druck erleide.

Es stelle $ABCD$ (Fig. 20) die Druckfläche eines Schleusenthores vor, die Breite AB sei $= b$, die Höhe $AD = h$.

Der Druck Q gegen das Thor ist für diese Annahmen $= {}^1/_2\, b h^2 \gamma$, der Druck Q_1 auf ein Feld $ABEE_1$ des Thores ist in ähnlicher Weise, wenn wir BE_1 mit h_1 bezeichnen:

Fig. 20.



$$Q_1 = {}^1/_2\, b h_1^2 \gamma$$

Für die Annahme, daß $Q_1 = \frac{Q}{n}$ sein soll, haben wir:

$$\frac{Q}{nQ} = \frac{{}^1/_2\, b h_1^2 \gamma}{{}^1/_2\, b h^2 \gamma}$$

$$h_1^2 = \frac{1}{n}\, h^2$$

$$\text{oder} \quad h_1 = \sqrt{h \frac{h}{n}},$$

d. h. h_1 ist die mittlere Proportionale zwischen h und $\frac{h}{n}$.

In gleicher Weise ist, wenn das Rechteck $E_1 EFF_1$ wieder den Druck $\frac{Q}{n}$ auszuhalten, das Rechteck $ABFF_1$ also dem Drucke $2\,\frac{Q}{n}$ widerstehen soll, die Höhe $BF_1 = h_2$, die mittlere Proportionale zwischen h und $2\,\frac{h}{n}$. Hiernach ergiebt sich für die Lage der Querriegel EE_1, FF_1, GG_1 ... die bekannte vorstehende Construction (Fig. 20).

Nimmt man an, daß jeder der Querriegel für sich den Druck $\frac{Q}{n}$ aushalten soll und sieht jeden als einen mit beiden Enden eingeklemmten Balken an, so erhält man die Höhe b_1 und Dicke δ eines Querriegels nach der Formel in §. 70, 4 b, Thl. I.

$${}^1/_8\, P l = k \frac{J}{e},$$

worin wir statt P, $\frac{Q}{n}$; statt l, b; statt $\frac{J}{e}$, ${}^1/_6\, b_1\, \delta^2$ zu setzen haben. Hiernach entsteht:

$${}^1/_8 \frac{Q}{n}\, b = \frac{k}{6}\, b_1\, \delta^2,$$

oder für Q den betreffenden Werth gesetzt:

$${}^1/_8 \cdot {}^1/_2\, \frac{b^2 h^2 \gamma}{n} = \frac{k}{6} b_1 \delta^2$$

$$n b_1 \delta^2 = {}^3/_8 \frac{\gamma}{k} (b h)^2,$$

woraus sich b_1 oder δ entwickeln läßt. Es war bei der vorstehenden Untersuchung vorausgesetzt, daß das Wasser nur auf einer Seite gegen das Thor drückt. Steht aber, wie es gewöhnlich der Fall ist, auf beiden Seiten vor dem Thore Wasser, so bezieht sich die obige Bestimmung über die Lage der Querriegel nur auf den Theil des Thores, welcher zwischen den beiden Wasserspiegeln liegt, da der Theil des Thores unterhalb des Unterwasserspiegels nach Aufgabe 21. einen gleichmäßigen Druck auszuhalten hat. Aus diesem Grunde ist für diesen Fall in den obigen Formeln unter h die Entfernung der beiden Wasserspiegel zu verstehen.

27. Lockere Massen, wie eine Anhäufung von Erde, Sand, Getreide-, Schrotkörner u. dergl., kann man halbflüssige Körper nennen. Dieselben haben mit den tropfbarflüssigen Körpern die Unzusammendrückbarkeit gemein, unterscheiden sich von diesen aber hauptsächlich dadurch, daß nicht jede noch so kleine Kraft ein Verschieben der einzelnen materiellen Punkte bewirken kann, daß dieselben der gegenseitigen Bewegung vielmehr einen Reibungs- und Cohäsionswiderstand entgegensetzen.

Es folgt hieraus, daß lockere Massen im Zustande des Gleichgewichts nicht nothwendigerweise eine horizontale Oberfläche haben müssen, daß sie vielmehr auch bei einer geneigten Lage ihrer Oberfläche im Gleichgewicht sein können. Wenn lose Erde aufgeschüttet wird, so bildet sich eine schräge Böschungsfläche, die nach der Beschaffenheit der Erde mehr oder weniger steil sein kann.

Ist das Gleichgewicht hergestellt, so kann man jeden der einzelnen Körpertheilchen auf einer geneigten Ebene liegend denken, dessen weitere Bewegung durch die Reibung verhindert wird. Der Reibungscoefficient ist nach §. 46 Thl. I. gleich der trigonometrischen Tangente des Reibungswinkels ϑ. Der Winkel, den die Böschungsfläche mit dem Horizont bildet, ist hiernach ein Mittel, für die verschiedenen lockeren Massen den Reibungswiderstand zu bestimmen, da durch Versuche nachgewiesen, daß derselbe für dieselbe Masse, bei derselben äußeren Beschaffenheit stets dieselbe Größe erhält.

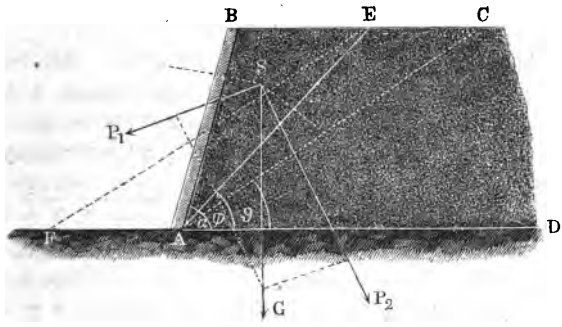
Soll nun eine Erdaufschüttung bei irgend einer anderen Böschungsfläche, als bei der ihr eigenthümlichen, natürlichen, im Gleichgewicht sein, so kann dies nur dadurch geschehen, daß man die verlangte Fläche durch eine hölzerne oder gemauerte Wand herstellt, und dadurch das Herabsinken der Erde verhindert. Besteht diese Wand aus eingerammten Pfählen mit einer Bretter- oder Bohlenverkleidung, so heißt sie ein Bohlenwerk, Bollwerk. Wird die Wand dagegen aus Ziegelsteinen oder Werkstücken aufgeführt, so nennt man sie Futtermauer. Die folgenden Untersuchungen haben den Zweck, den Druck einer lockeren Masse gegen eine solche Wand zu bestimmen und daraus die Stabilität der Futtermauer abzuleiten.

Tabelle über den Reibungswinkel und das Gewicht lockerer Massen.

Art der Masse	Reibungswinkel ϑ	Reibungscoefficient $= tang\,\vartheta$	Gewicht von 1 Kubikmeter in Kilogrammen
Angefeuchteter Sand	24 Grad	0,445	1941
Desgl. Gartenerde	27 „	0,510	2038
Trockener Sand	32 „	0,625	1617
Desgl. Gartenerde	37 „	0,754	1634
Trockene Lehmerde	40 „	0,839	1973
Desgl. Thonerde	45 „	1,000	2005
Lockerer Halbensturz aus Gneisstücken, sowie Steinkohlenhaufen u. Schlacken	38 „	0,781	1213
Roggenkörner	30 „	0,577	744
Schrotkörner	25 „	0,466	6469
Vogelbunst	22,5 „	0,414	6469

28. Eine Erdaufschüttung liege auf einer horizontalen Ebene AD (Fig. 21), sie sei oberhalb ebenfalls durch die horizontale Ebene BC abgeglichen

Fig. 21.



und werde durch die Wand AB im Gleichgewicht erhalten. Es bezeichne AC die natürliche Böschungsfläche der lockeren Masse, die Aufschüttung würde daher ohne die Wand eine der AC parallele Böschung annehmen, die wir durch die Linie EF darstellen wollen. Unter dieser Annahme ist ersichtlich, daß das Erdprisma BAE allein in Bewegung kommen würde, wenn die Wand AB beseitigt wäre; das Gewicht G dieses Prismas ruft also auch den fraglichen Druck gegen die Wand AB hervor. Das Gewicht G wird hiernach durch die beiden geneigten Ebenen AB und AE an der Bewegung gehindert. Die

Neigungswinkel dieſer beiden Ebenen ſeien α und φ, die nothwendigen Reibungscoefficienten μ und $tang\ \vartheta$, unter ϑ den Reibungswinkel CAD der unterſuchten Erde verſtanden.

Nennen wir die Reactionen der beiden ſchiefen Ebenen AB und AE, R_1 und R_2, ſo müſſen die fünf Kräfte R_1, μR_1, R_2, $R_2\ tang\ \vartheta$, und G unter ſich im Gleichgewicht ſein. Dieſe fünf Kräfte laſſen ſich leicht auf drei reduciren, wenn wir aus R_1 und μR_1, ſowie aus R_2 und $R_2\ tang\ \vartheta$ die Reſultanten P_1 und P_2 bilden, wobei wir noch ſtatt μ, $tang\ \vartheta_1$ ſchreiben wollen, unter ϑ_1 den Reibungswinkel für das Gleiten der Erde an der Wand AB verſtanden.

Es iſt $P_1 = \sqrt{R_1^2 + R_1^2\ tang\ \vartheta_1^2} = \frac{R_1}{cos\ \vartheta_1}$ und in gleicher Weiſe $P_2 = \frac{R_2}{cos\ \vartheta}$, d. h. die beiden Reactionen P_1 und P_2 bilden mit den Normalen zu den geneigten Ebenen AB und AE die Winkel ϑ_1 und ϑ. Für das verlangte Gleichgewicht muß nun G die entgegengeſetzte Reſultante zu den Reactionen P_1 und P_2 ſein und wir erhalten darnach:

$$P_1 = G\,\frac{sin\,(\varphi - \vartheta)}{sin\,(\alpha + \vartheta_1 - \varphi + \vartheta)}.$$

Bezeichnen wir die normale Entfernung der beiden Horizontalebenen BC und AD mit h, das Gewicht von 1 Kubikmeter Erdmaſſe mit γ, ſo iſt für die Länge von 1 Meter der Wand: $G = {}^1/_2 h^2 \gamma\,(cotg\,\varphi - cotg\,\alpha)$ und der Druck P_1 gegen die Wand ſtellt ſich nach einiger Umformung durch folgenden Ausdruck dar:

$$1)\quad P_1 = \frac{1}{2}\,\frac{h^2\gamma}{sin\,(\alpha + \vartheta_1)}\cdot\frac{cotg\,\varphi - cotg\,\alpha}{cotg\,(\varphi - \vartheta) - cotg\,(\alpha + \vartheta_1)}.$$

Dieſer Druck ändert ſich mit dem unbekannten Winkel φ. Für die Praxis iſt jedenfalls der größtmöglichſte Druck in Rechnung zu bringen, d. h. es iſt für φ derjenige Werth zu ſubſtituiren, der den Ausdruck für P_1 zu einem Maximum macht. Es handelt ſich hiernach um die Maximalbeſtimmung von

$$\frac{cotg\,\varphi - cotg\,\alpha}{cotg\,(\varphi - \vartheta) - cotg\,(\alpha + \vartheta_1)} = \frac{sin\,(\alpha - \varphi)\,.\,sin\,(\varphi - \vartheta)\,.\,sin\,(\alpha + \vartheta_1)}{sin\,\alpha\,.\,sin\,\varphi\,.\,sin\,(\alpha + \vartheta + \vartheta_1 - \varphi)},$$

worin wir die conſtanten Factoren im Zähler und Nenner noch weglaſſen können. Wird der benachbarte Werth mit φ_1 bezeichnet und für dieſen derſelbe Quotient gebildet, ſo hat man die beiden Quotienten einander gleich zu ſetzen:

$$\frac{sin\,(\alpha - \varphi)\,.\,sin\,(\varphi - \vartheta)}{sin\,\varphi\,.\,sin\,(\alpha + \vartheta + \vartheta_1 - \varphi)} = \frac{sin\,(\alpha - \varphi_1)\,sin\,(\varphi_1 - \vartheta)}{sin\,\varphi_1\,.\,sin\,(\alpha + \vartheta + \vartheta_1 + \varphi_1)}.$$

Nach gehöriger Umformung muß man durch $\varphi - \varphi_1$ dividiren, wobei zu berückſichtigen, daß $lim\ \frac{sin\,(\varphi - \varphi_1)}{\varphi - \varphi_1} = 1$ und darauf wird $\varphi = \varphi_1$ geſetzt und die Gleichung zur Beſtimmung von φ benutzt. Es ergiebt ſich hier:

$$2)\quad cotg\,\varphi = cotg\,(\alpha + \vartheta + \vartheta_1) + \sqrt{\frac{sin\,(\alpha + \vartheta_1)\,sin\,(\vartheta + \vartheta_1)}{sin\,\alpha\,sin\,\vartheta\,sin\,(\alpha + \vartheta + \vartheta_1)^2}}.$$

In Fällen der Anwendung ist φ aus 2) zu berechnen und dann aus 1) der Maximaldruck P_1 zu bestimmen.

Von besonderem Interesse sind folgende Fälle.

a. Läßt man die Reibung an der Wand AB außer Acht, setzt man also $\vartheta_1 = 0$, so ist $cotg\,\varphi = cotg\,(\alpha + \vartheta) + \frac{1}{sin(\alpha + \vartheta)}$, woraus sich $\varphi = \frac{\alpha + \vartheta}{2}$ ergiebt, d. h. die Linie AE halbirt den Winkel BAC zwischen der Wand AB und der natürlichen Erdböschung AC. Bei Benutzung dieses Werthes von φ erhalten wir:

$$P_1 = {}^1/_2 \frac{h^2\gamma}{sin\,\alpha}\left(\frac{sin\,\frac{\alpha - \vartheta}{2}}{sin\,\frac{\alpha + \vartheta}{2}}\right)^2.$$

b. Nimmt man die Wand AB in verticaler Lage an, setzt also $\alpha = 90^0$, so ist

$$cotg\,\varphi = \frac{-1 + \sqrt{\frac{cos\,\vartheta_1}{sin\,\vartheta\,sin(\vartheta + \vartheta_1)}}}{cotg\,(\vartheta + \vartheta_1)} \quad \text{und}$$

$$P_1 = {}^1/_2\, h^2\gamma\left(\frac{\sqrt{cos\,\vartheta_1} - \sqrt{sin\,\vartheta\,sin\,(\vartheta + \vartheta_1)}}{cos\,(\vartheta + \vartheta_1)}\right)^2.$$

c. Hat endlich die Wand AB eine verticale Lage und vernachlässigen wir die Reibung an derselben, so ist für $\alpha = 90^0$ und $\vartheta_1 = 0$

$$cotg\,\varphi = \frac{1 - sin\,\vartheta}{cos\,\vartheta} \text{ und } P_1 = {}^1/_2\, h^2\gamma\, tang\left(45 - \frac{\vartheta}{2}\right)^2.$$

d. Setzen wir noch in dem letzten Ausdrucke $\vartheta = 0$, lassen wir also für die einzelnen materiellen Punkte keine Reibung zu, so geht die lockere halbflüssige Masse in eine tropfbare Flüssigkeit über und wir erhalten in Uebereinstimmung mit §. 8

$$P_1 = {}^1/_2\, h^2\gamma,$$

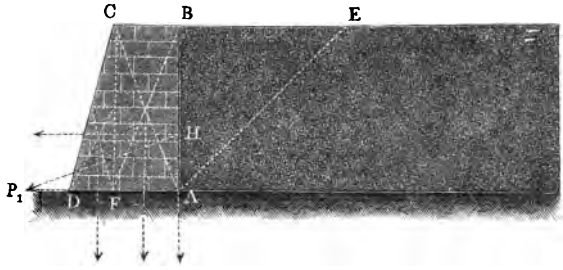
d. h. der Druck P_1 ist gleich dem Gewicht der Flüssigkeitssäule, deren Grundfläche gleich $1\,h$ und deren Druckhöhe ${}^1/_2\,h$ ist.

Aus den gefundenen Werthen des Erddruckes P_1 folgt, daß derselbe von oben nach unten, ähnlich wie der Druck von Flüssigkeiten gleichmäßig zunimmt, überhaupt der Druckhöhe sowie der gedrückten Fläche proportional ist. Unter Druckhöhe ist hier ebenfalls die senkrechte Entfernung der Oberfläche der lockeren Masse von dem Schwerpunkte der gedrückten Fläche zu verstehen. Hieraus folgt weiter, daß der Angriffspunkt des Erddruckes auf eine ebene Wand mit dem Mittelpunkte des Wasserdruckes zusammenfällt. Hat die gedrückte Wand die Form eines Rechtecks, und behalten wir die obigen Voraussetzungen in Betreff der Erdanhäufung bei, so liegt der Angriffspunkt des Erddruckes, nach Aufgabe

19, auf $^1/_3$ der Höhe von der horizontalen Basis oder auf $^2/_3$ der Höhe von der Oberfläche der lockeren Masse.

29. Es soll die obere Breite $BC = b$ (Fig. 22) einer nach Außen geböschten Futtermauer bestimmt werden, wenn die mit Erde in Berührung stehende Fläche in einer Verticalebene liegt, und die Erde auf der Oberfläche horizontal abgeglichen ist.

Fig. 22.



Die Höhe AB der Futtermauer sei h, die Böschung DF sei gleich $n.h$. Der Erddruck P_1 hat nach dem Vorstehenden seinen Angriffspunkt in H, auf $^1/_3$ der Höhe vom horizontalen Boden aus gerechnet. Der Druck P_1 ist nicht normal zur Seitenfläche AB der Mauer wirksam zu denken, sondern bildet, wie wir oben gesehen haben, mit dieser Normale den Reibungswinkel ϑ_1.

Da im Allgemeinen die Reibung zwischen Mauer und Erde größer sein wird als die Reibung zwischen den einzelnen Erdschichten, so wird man für die Praxis eine größere Sicherheit erlangen, wenn man die Reibung zwischen Mauer und Erde gleich der zwischen den einzelnen Erdschichten annimmt. Es läßt sich dies um so mehr rechtfertigen, wenn man bedenkt, daß eine sehr dünne Erdschicht an der Mauer haftet, gegen deren Normale der Druck der übrigen Erdmasse genau um den Reibungswinkel ϑ der Erde geneigt ist, so daß man das auch für die Wand selbst als annähernd richtig annehmen kann. Führen wir die ganze Untersuchung für die Mauerlänge gleich Eins durch, so ist in dem gefundenen Ausdrucke für P_1, statt ϑ_1, ϑ zu setzen.

Wir erhalten hiernach bei Benutzung der Formel:

$$P_1 = {}^1/_2 h^2 \gamma \left(\frac{\sqrt{\cos \vartheta_1} - \sqrt{\sin \vartheta \,.\, \sin (\vartheta + \vartheta_1)}}{\cos (\vartheta + \vartheta_1)} \right)$$

$$P_1 = {}^1/_2 h^2 \gamma \cos \vartheta \left(\frac{1 - \sin \vartheta \sqrt{2}}{\cos 2\vartheta} \right)^2.$$

Der Druck P_1 versucht die Mauer um die durch D gehende Kante zu drehen, die Mauer widersteht dem Umwerfen durch ihre Stabilität, Ss.

Um ein praktisch brauchbares Resultat zu erhalten, nehmen wir an, daß ein Vielfaches des berechneten Erddruckes auf Kippen wirksam werde, und bestimmen dann die Stärke b der Mauer aus der Bedingung, daß sich dieselbe gerade auf der Grenze des Gleichgewichts gegen Kippen befinde.

Wir setzen zu dem Ende statt P_1, $m \cdot P_1$, und erhalten n. F. 108, Thl. I, die Stabilität der Mauer:

$$Ss = Ga - \Sigma[P_1(y_1 \cos\alpha_1 - x_1 \cos\beta_1)].$$

Hierin ist das Σ-Zeichen fortzulassen, da wir es nur mit der einen Kraft P_1 zu thun haben, welche nach dem Vorigen

$$= {}^1/_2 m h^2 \gamma \cos\vartheta \left(\frac{1 - \sin\vartheta\sqrt{2}}{\cos 2\vartheta}\right)^2$$

zu setzen ist. Weiter ist

$$y_1 = {}^1/_3 h,\ x_1 = b + nh,\ \cos\alpha_1 = \cos\vartheta,\ \cos\beta_1 = \sin\vartheta$$

und

$$Ga = h\gamma_1 \frac{2n^2h^2 + 3b(b + 2nh)}{6},$$

wenn γ_1 das Gewicht von 1 Kubikmeter Mauermaterial bezeichnet.

Nach Einführung dieser Werthe in dem Ausdrucke für Ss entsteht:

$$Ss = \frac{h\gamma_1}{6}[2n^2h^2 + 3b(b + 2nh)] - mP_1[{}^1/_3 h\cos\vartheta - (b + nh)\sin\vartheta].$$

Soll der Körper sich auf der Grenze des Gleichgewichts gegen Kippen befinden, so ist $Ss = 0$ zu setzen, und wir erhalten hiernach zur Berechnung der Breite b die Gleichung:

$$\frac{h\gamma_1}{6}[2n^2h^2 + 3b(b + 2nh)]$$
$$= {}^1/_2 mh^2\gamma\cos\vartheta\left(\frac{1 - \sin\vartheta\sqrt{2}}{\cos 2\vartheta}\right)^2[{}^1/_3 h\cos\vartheta - (b + nh)\sin\vartheta].$$

Hieraus folgt, wenn wir zur Abkürzung $\cos\vartheta\left(\frac{1 - \sin\vartheta\sqrt{2}}{\cos 2\vartheta}\right)^2$ gleich q^2 setzen,

$$b = -\frac{h}{2}\left(2n + m\frac{\gamma}{\gamma_1}q^2\sin\vartheta\right)$$
$$+ \frac{h}{6}\sqrt{\left(6n + 3m\frac{\gamma}{\gamma_1}q^2\sin\vartheta\right)^2 + 12mq^2\frac{\gamma}{\gamma_1}(\cos\vartheta - 3n\sin\vartheta) - 24n^2}.$$

Für die gewöhnlichen Fälle in der Praxis genügt es, $m = 2$, $\frac{\gamma}{\gamma_1} = {}^2/_3$ und $\vartheta = 45^0$ zu setzen. Für die Substitution $\vartheta = 45^0$ wird aber

$$q = \sqrt{\cos\vartheta}\,\frac{1 - \sin\vartheta\sqrt{2}}{\cos 2\vartheta}$$

zu $\frac{0}{0}$, weshalb mit Hülfe der höheren Mathematik der brauchbare Werth von q für diesen speciellen Fall zu entwickeln ist. Der wahre Werth von q^2 ist ${}^1/_8\sqrt{2}$. Nach der Substitution dieser Werthe erhalten wir

α) für die Breite b einer geböschten Mauer:

$$b = -\frac{h}{12}(12n+1) + \frac{h}{12}\sqrt{(12n+1)^2 + 8(1-3n) - 96n^2}.$$

β) für die Breite b einer ungeböſchten Mauer:

$$b = \frac{h}{12}(-1 + \sqrt{1+8}) = {}^1/_6 h.$$

Der Werth von n bei einer geböſchten Mauer ſoll die Größe $^1/_6$ niemals überſchreiten. Nehmen wir für n, $^1/_{12}$, wie ſich die Anordnung in der Praxis häufig findet, ſo erhält man nach der Formel unter α, die Breite b der Mauer

$$b = \frac{h}{12}(-2 + \sqrt{2^2 + 8(1 - {}^1/_4) - {}^{96}/_{144}})$$

$$b = 0{,}0879\,h.$$

Die vorſtehenden Entwickelungen gelten allein für die Annahme, daß die Erde unten durch eine Horizontalebene geſtützt werde und eine horizontale Oberfläche bilde, in der die obere Fläche der Futtermauer liegt. Für andere Vorausſetzungen ändert ſich der für den Erddruck gefundene Werth, und die Breite b der Mauer iſt nicht mehr der Höhe h proportional.

30. Wie groß iſt der Druck P_1, den trockene Gartenerde gegen eine verticale Wand von 6,3^m Länge und 3,75^m Höhe ausübt, wenn der Sand gleiche Höhe mit der Wand hat und von der Reibung an der Mauer abgeſehen wird? Wie groß iſt der Winkel φ?

$$P_1 = {}^1/_2\, 6{,}3 \,.\, 3{,}75^2 \,.\, 1634 \,.\, tang\left(45 - \frac{37}{2}\right)^2 = 17993 \text{ Kgrm.}$$

$$cotg\,\varphi = \frac{1 - sin\,37}{cos\,37} = tang\left(45 - \frac{37}{2}\right), \text{ daher } \varphi = 63^0\,30'.$$

31. Wie breit muß die Baſis einer 3,1^m hohen Mauer aus Kalkſteinen ſein, wenn ſie dem Druck gleich hoher trockenen Sandes den gehörigen Widerſtand leiſten ſoll?

$$m = 2;\ \frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{2}{3};\ q^2 = \left(\frac{1 - sin\,32 \,.\, \sqrt{2}}{cos\,64} \cdot \sqrt{cos\,32}\right)^2 = 0{,}277.$$

$$b = -\frac{h}{2} m \frac{\gamma}{\gamma_1} q^2\, sin\vartheta + \frac{h}{6}\sqrt{\left(3m\frac{\gamma}{\gamma_1} q^2 sin\vartheta\right)^2 + 12 m q^2 \frac{\gamma}{\gamma_1} cos\vartheta}$$

$$b = \frac{h}{6}(-0{,}587 + \sqrt{4{,}10478}) = 0{,}743^m.$$

Der Druck $P_1 = {}^1/_2\, l h^2 \gamma\, cos\vartheta \left(\frac{1 - sin\vartheta\,\sqrt{2}}{cos\,2\vartheta}\right)^2$ hat auch außerdem noch das Beſtreben, die Mauer auf dem Boden fortzuſchieben, was durch die Reibung an der Baſis der Mauer verhindert wird. Nennen wir den entſprechenden Reibungscoefficienten μ, ſo iſt für dieſe Unterſuchung die Gleichgewichtsbedingung

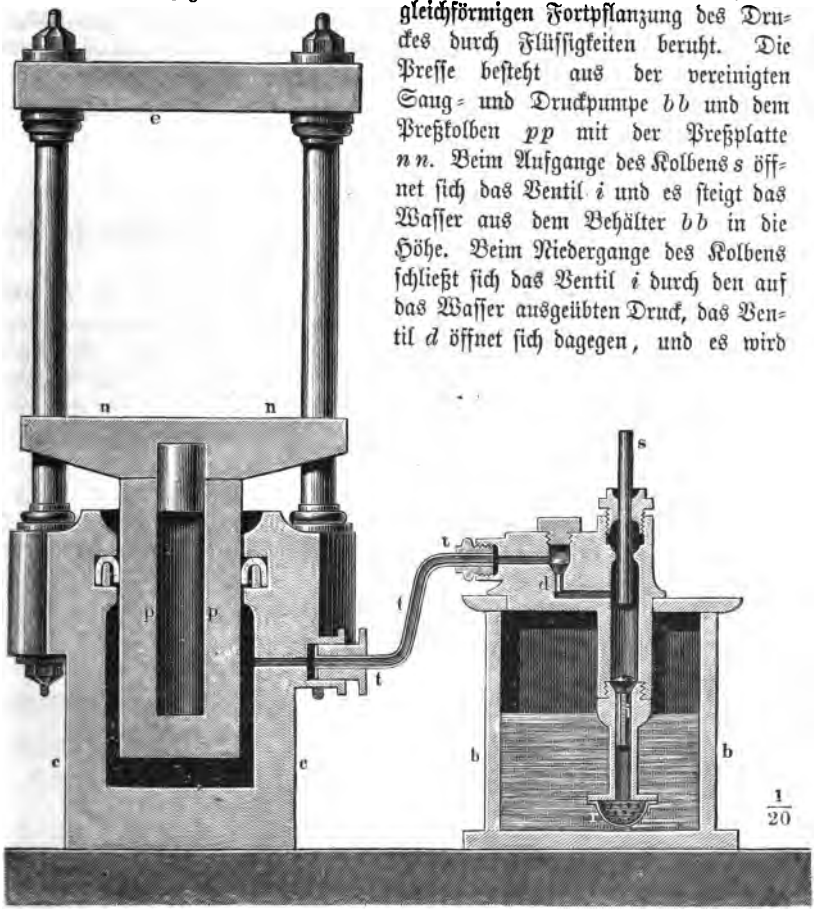
$$m P_1 cos\vartheta = \mu b l h \gamma_1, \text{ daher } b = \frac{m}{\mu} \frac{P_1}{l h \gamma_1} cos\vartheta.$$

Für $\mu = 0{,}7$ und Beibehaltung der vorstehenden Zahlenwerthe ergiebt sich:

$$b = \frac{m}{2\mu}\,\frac{\gamma}{\gamma_1}\,h\left(\cos\vartheta\,\frac{1 - \sin\vartheta\sqrt{2}}{\cos 2\vartheta}\right)^2 = 0{,}694^{\mathrm{m}}.$$

32. Die Fig. 23 stellt den Durchschnitt einer hydraulischen Presse vor, deren Wirkung hauptsächlich auf der gleichförmigen Fortpflanzung des Druckes durch Flüssigkeiten beruht. Die Presse besteht aus der vereinigten Saug- und Druckpumpe bb und dem Preßkolben pp mit der Preßplatte nn. Beim Aufgange des Kolbens s öffnet sich das Ventil i und es steigt das Wasser aus dem Behälter bb in die Höhe. Beim Niedergange des Kolbens schließt sich das Ventil i durch den auf das Wasser ausgeübten Druck, das Ventil d öffnet sich dagegen, und es wird

Fig. 23.



das vorher gestiegene Wasser durch die Röhre tt in den Cylinder cc gepreßt; durch den auf den Kolben pp ausgeübten Druck steigt dieser in die Höhe und ein zwischen der festen Platte e und der Preßplatte nn liegender Körper wird zusammengedrückt. Der Querschnitt des Pumpenkolbens s sei f_1, der des Preßkolbens p sei f_2, der auf das Wasser ausgeübte Druck sei P_1, und der auf den Preß-

kolben übertragene Druck sei Q, so ist nach §. 3, der Fortpflanzung des Druckes durch Flüssigkeiten gemäß,

$$P_1 : Q = f_1 : f_2,$$

oder bezeichnen wir die Durchmesser der Kolben mit d_1 und d_2:

$$P_1 : Q = d_1^2 : d_2^2.$$

Der hieraus entwickelte Werth von Q fällt zu groß aus, da man das Gewicht des fortzuschaffenden Wassers und die Kolbenreibung nicht berücksichtigt hat. Um die letztere in Rechnung zu bringen, nennen wir die ausgeübten und übertragenen Drucke Π_1 und Π_2, die Reibungen R_1 und R_2, so ist der ausgeübte Druck

$$\Pi_1 = P_1 - R_1,$$

der übertragene Druck

$$\Pi_2 = Q + R_2.$$

Zur Bestimmung von R_1 und R_2 seien b_1 und b_2 die Breiten der Liderungskränze bei den Kolben und μ der Reibungscoefficient.

Die Reibung an den Kolbenliderungen wird durch die Drucke Π_1 und Π_2 hervorgebracht, die wir uns als die Gewichte zweier Wassersäulen vorstellen, deren Grundflächen gleich den Kolbenquerschnitten f_1 und f_2 sind. Wir setzen demnach $\Pi_1 = f_1 h_1 \gamma$ und $\Pi_2 = f_2 h_2 \gamma$. Jedes Element ε der Kolbenliderung erleidet hiernach den Druck

$\varepsilon h_1 \gamma$ bei dem Druckkolben,
$\varepsilon h_2 \gamma$ bei dem Preßkolben.

Die hieraus entspringenden elementaren Reibungen sind daher $\mu \varepsilon h_1 \gamma$ und $\mu \varepsilon h_2 \gamma$, deren Summe die verlangten Reibungen R_1 und R_2 liefern. Hiernach erhalten wir:

$$R_1 = \mu h_1 \gamma \Sigma \varepsilon = \mu h_1 \gamma . \pi d_1 b_1$$
$$R_2 = \mu h_2 \gamma \Sigma \varepsilon = \mu h_2 \gamma . \pi d_2 b_2.$$

Setzen wir hierin noch

$$h_1 \gamma = \frac{\Pi_1}{f_1} = \frac{\Pi_1}{1/4 \pi d_1^2}$$

und

$$h_2 \gamma = \frac{\Pi_2}{f_2} = \frac{\Pi_2}{1/4 \pi d_2^2},$$

so entsteht:

$$R_1 = 4 \mu \frac{b_1}{d_1} \Pi_1$$

$$R_2 = 4 \mu \frac{b_2}{d_2} \Pi_2.$$

Nach Substitution dieser Werthe in den Gleichungen

$$\Pi_1 = P_1 - R_1 \text{ und } \Pi_2 = Q + R_2$$

ergiebt sich der ausgeübte Druck

$$\Pi_1 = \frac{P_1}{1 + 4\mu\frac{b_1}{d_1}},$$

der übertragene

$$\Pi_2 = \frac{Q}{1 - 4\mu\frac{b_2}{d_2}}.$$

Die Drucke Π_1 und Π_2 verhalten sich nun nach dem allgemeinen hydrostatischen Gesetze wie die Kolbenflächen f_1 und f_2, d. h. wie $d_1^2 : d_2^2$. Wir erhalten daher zur Bestimmung von Q die Proportion:

$$\frac{P_1}{1 + 4\mu\frac{b_1}{d_1}} : \frac{Q}{1 - 4\mu\frac{b_2}{d_2}} = d_1^2 : d_2^2$$

$$Q = \frac{1 - 4\mu\frac{b_2}{d_2}}{1 + 4\mu\frac{b_1}{d_1}}\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 P_1.$$

Der Druckkolben wird durch einen einarmigen Hebel in Bewegung gesetzt. Nehmen wir die Länge der Arme gleich l und l_1 und den auf den Hebel ausgeübten Druck gleich P, so ist

$$P_1 l_1 = P l$$

und

$$Q = \frac{1 - 4\mu\frac{b_2}{d_2}}{1 + 4\mu\frac{b_1}{d_1}}\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \frac{l}{l_1} P.$$

Für die gewöhnlichen Anordnungen ist $\mu = 0{,}25$ zu nehmen und die Verhältnisse $\frac{b_2}{d_2}$ und $\frac{b_1}{d_1}$ sind gewöhnlich gleich 0,1 bis 0,2, im Mittel also gleich 0,15. Substituiren wir diese Werthe, so erhalten wir

$$Q = 0{,}74\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \frac{l}{l_1} P.$$

Aus der Formel ergiebt sich, daß der Durchmesser d_1 des Pumpenkolbens recht klein im Verhältniß zu dem Durchmesser d_2 des Pumpenkolbens sein muß. Um das durch die praktische Ausführung bedingte Verhältniß von $d_2 : d_1$ zu vergrößern, construirt man den Kolben der Pumpe als Differential- oder Röhrenkolben (Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes in Preußen 1838).

Die Fig. 24 (a. f. S.) stellt die Construction eines Differentialkolbens dar. Der Kolben A hat unten und oben verschiedenen Durchmesser, so daß nur die Differenz der Kolbenflächen, die Ringfläche $\frac{\pi}{4}(d^2 - \delta^2)$ Druck auf

das Wasser ausübt. Der Kasten B dient zur Aufnahme des gesaugten Wassers, C ist das Saug- und D das Druckrohr. Der auf den Preßkolben ausgeübte Druck Q ist für diese Anordnung:

$$Q = 0{,}74 \frac{d_2^2}{d^2 - \delta^2} \frac{l}{l_1} P.$$

Es ist ersichtlich, daß bei dieser Construction die Druckfläche $\frac{\pi}{4}(d^2 - \delta^2)$ sehr klein hergestellt werden kann, ohne gerade den Kolben A zu sehr zu verschwächen. Da bei dem Zusammenpressen von Körpern der Widerstand allmälig größer wird, so ist es zu Anfang der Arbeit nicht nothwendig, die Druckfläche des Pumpenkolbens in dem angegebenen Maße zu verringern. Dies hat zur Construction der röhrenförmigen Kolben Veranlassung gegeben, bei denen durch eine geeignete Kuppelung eines massiven mit dem röhrenförmigen Kolben die Druckfläche zu Anfang der Pressung größer ist. Erst gegen das Ende derselben, wenn der Widerstand bedeutend zugenommen, wird die angedeutete Kuppelung wieder aufgehoben, und es ist dann der röhrenförmige Kolben mit seiner ringförmigen Druckfläche allein wirksam. Zu Anfang der Pressung wird sich der übertragene Druck Q nach der ersten Formel, zu Ende der Pressung dagegen nach der letzten berechnen. Die Fig. 25 zeigt den Durchschnitt eines röhrenförmigen Kolbens A und zwar ungekuppelt mit dem festen Kolben B, also wie die Einrichtung zu Ende der Pressung getroffen wird. An dem mit dem röhrenförmigen Kolben verschraubten Zapfenstücke C ist der Hebel der Pumpe befestigt, woraus sich bei Bewegung des letzteren die alleinige Wirkung des Kolbens A ergiebt. Die an dem massiven Kolben B vorstehenden Knaggen bb dienen dazu, diesen Kolben mit dem

Fig. 24.

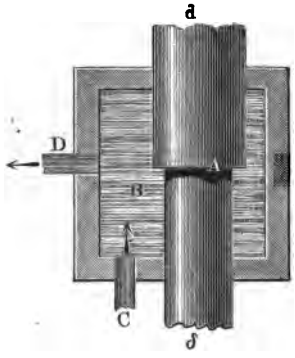
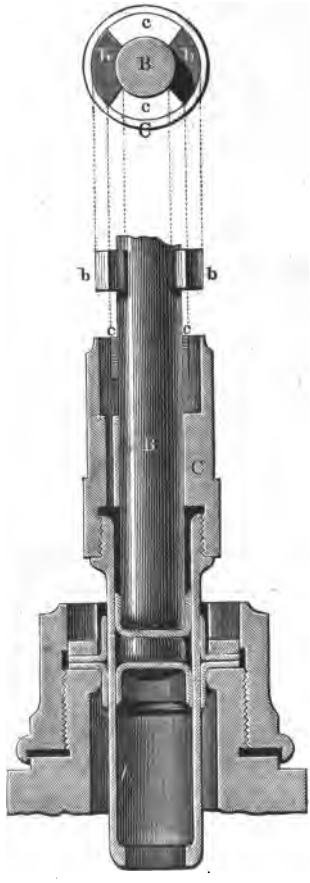


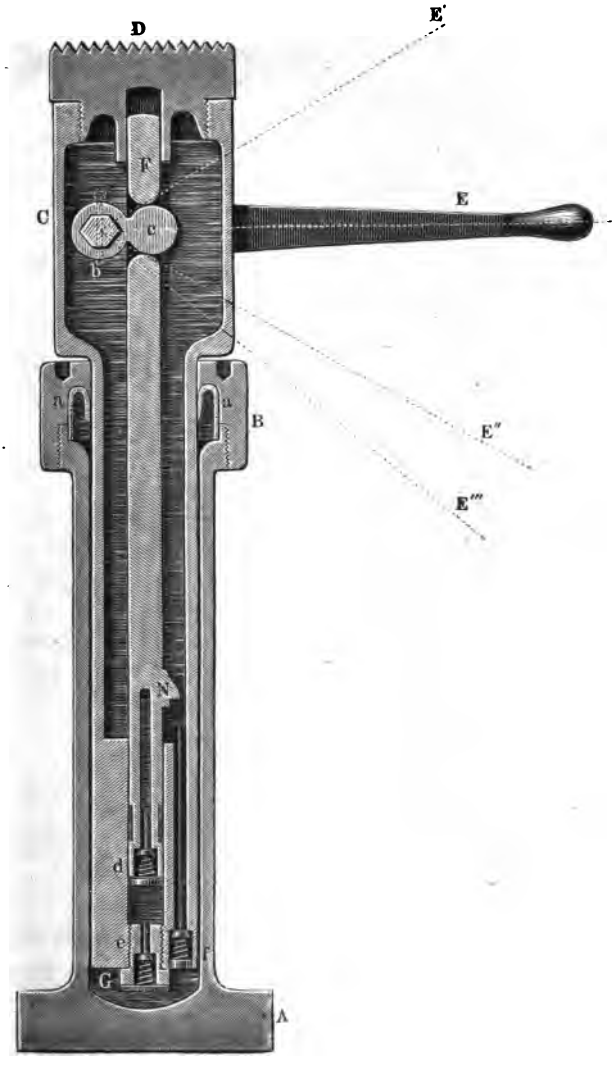
Fig. 25.



Zapfenstücke *C* zu kuppeln, wozu dasselbe in seinem Innern mit zwei ähnlichen vorspringenden Theilen *cc* versehen ist, unter welche die Knaggen *bb* bei der Kuppelung zu liegen kommen, was, nachdem der Kolben *B* so weit niedergedrückt ist, durch eine Drehung um 90° bewirkt werden kann.

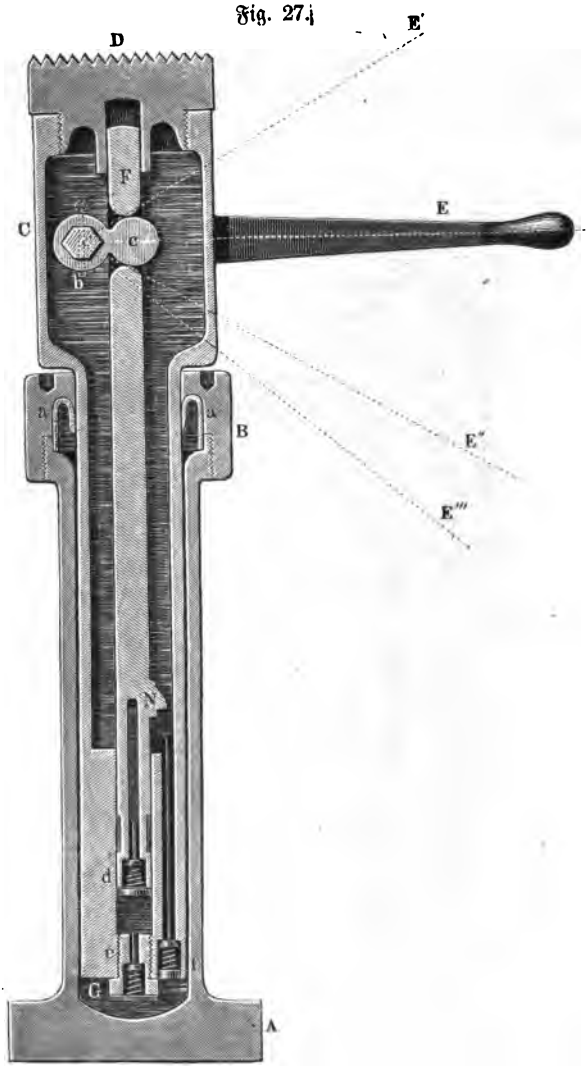
Das Princip der hydraulischen Pressen hat auch zur Construction von Winden Anwendung gefunden, welche in den letzten Jahren vielfältig in Gebrauch gekommen sind. In Fig. 26 ist eine hydraulische Winde im Durchschnitt

Fig. 26.



dargeſtellt. In dem oberen Theile des Cylinders *A* wird mittelſt des Deckels *B* die Ledermanſchette *a a* gehalten, in welcher ſich der Preßkolben *C* bewegt,

Fig. 27.



welcher mit ſeinem aufgeſchraubten Kopfſtücke *D* die zu hebende oder zu ſenkende Laſt trägt. Die Welle *b* wird durch den auf ihr ſitzenden Handhebel *E* in Schwingung verſetzt und überträgt dieſe Bewegung mittelſt des Daumens *c* auf die Stange *F*, deren unterer Theil in *C* als Pumpenkolben wirkt. Bewegt ſich der Kolben aufwärts, ſo öffnet ſich das Saugeventil *d* und läßt von dem

in C befindlichen Oele eine Quantität in den Raum zwischen d und e treten. Dasselbe Quantum wird beim Niederpumpen durch das Ventil e in den unteren Raum G gepreßt und hebt den Preßkolben C. Die punktirten Linien E' und E'' bezeichnen die äußersten Stellungen des Hebels E während des Hebens. Wird dagegen dieser Hebel bis in die Lage E''' gebracht, so öffnet die Nase N der Stange F das Ventil f und das in G befindliche Oel tritt durch dieses Ventil wieder in den inneren Raum von C zurück, wobei der Preßkolben zugleich niedergeht.

33. Es wirken zwei Menschen, jeder mit 50 Kgrm. Druck, an dem Hebel der Pumpe einer hydraulischen Presse nach der zuletzt angegebenen Construction. Das Hebelverhältniß $l : l_1$ sei 10 : 1, der auszuübende Druck sei schließlich 400000 Kgrm., der Durchmesser d_2 des Preßkolbens sei $0{,}24^{m}$ und der Durchmesser δ des massiven Kolbens sei $0{,}039^{m}$.

Welchen Querschnitt und Durchmesser erhält der röhrenförmige Kolben?

$$d = 0{,}04^{m}.$$
$$f_1 = 12{,}566\ \square^{cm}.$$

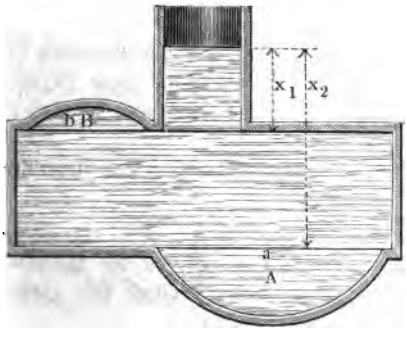
34. Ein normaler Kegel mit kreisförmiger Basis sei mit Wasser gefüllt und stehe, nachdem derselbe durch den Boden luftdicht geschlossen, auf einer horizontalen Ebene. Wie groß ist der Druck auf den Kegelmantel, der Druck auf den Boden und der verticale Druck, wenn r den Halbmesser der Grundebene und h die Höhe des Kegels bezeichnet?

a) $^2/_3\,\pi r^2 h\gamma$
b) $\pi r^2 h\gamma$
c) $^1/_3\,\pi r^2 h\gamma$.

Eine Vergleichung der Resultate unter a und c zeigt, daß der Kegel durch den auf den Mantel nach oben wirksamen Druck umgeworfen wird, wenn der Boden des Kegels mit dem Mantel nicht fest verbunden ist. Auch übersieht sich, daß der Druck auf den Boden aus dem activen Druck $^1/_3\,\pi r^2 h\gamma$ und aus der Reaction des Druckes $^2/_3\,\pi r^2 h\gamma$ gegen den Mantel besteht.

35. In dem nebengezeichneten Behälter (Fig. 28), der mit Wasser gefüllt ist, habe die untere Ausbiegung A Kubikmeter und die dazu gehörige Oeffnung a Quadratmeter Inhalt. Für die obere Ausbiegung seien die betreffenden Angaben B und b. Wie groß ist bei den Druckhöhen x_2 und x_1 der verticale Druck auf die inneren Wölbungen?

Fig. 28.



$$\gamma\,(a x_2 + A)$$
$$\gamma\,(b x_1 - B),$$

d. h. der verticale Druck auf

derartige Wölbungen ist stets dem Drucke auf ihre Horizontalprojection gleich vermehrt oder vermindert um den Druck des in der Wölbung befindlichen Wassers.

36. Eine hohle Kugel, deren innerer Durchmesser d ist, erleide von innen einen hydrostatischen Druck. Derselbe sei für die Flächeneinheit $= p$ oder gleich $h\gamma$ Kilogrammen, unter h die Druckhöhe verstanden.

Es ist die Wandstärke δ der Kugel zu berechnen, so daß die Kugel dem ausgeübten Drucke vollständig widerstehe.

Das Zerreißen wird in einem größten Kreise erfolgen, die Trennungsfläche ist daher ein Kreisring. Der Widerstand, der sich dem Zerreißen entgegensetzt, ist n. F. 139, Thl. I:

$$^1/_4\,\pi[(d+2\delta)^2-d^2]k=\pi(d\delta+\delta^2)k.$$

Die Horizontalcomponente des hydrostatischen Druckes ist, da die Projection der Halbkugel auf einer Verticalebene gleich $^1/_4\,\pi d^2$,

$$^1/_4\,\pi d^2 p \text{ oder}$$
$$^1/_4\,\pi d^2 h\gamma.$$

Wir erhalten hiernach zur Bestimmung von δ die Gleichung:

$$\pi(d\delta+\delta^2)k=^1/_4\,\pi d^2 p$$
$$d\delta\left(1+\frac{\delta}{d}\right)k=^1/_4\,d^2 p.$$

Hieraus folgt, wenn man $\frac{\delta}{d}$ gegen 1 vernachlässigt, als Näherungswerth:

$$\delta=^1/_4\,d\frac{p}{k}.$$

Der genaue Werth von δ ergiebt sich aus der quadratischen Gleichung:

$$\delta^2+d\delta=^1/_4\,d^2\frac{p}{k}$$
$$\delta=\frac{d}{2}\left(-1+\sqrt{1+\frac{p}{k}}\right).$$

37. Es soll die Wandstärke δ von cylindrischen Röhren berechnet werden, die auf die Flächeneinheit einen hydrostatischen Druck von $p=h\gamma$ Kilogrammen auszuhalten haben.

Wir nehmen an, daß sich an zwei diametral gegenüberliegenden Punkten Längenrisse bilden, da erfahrungsmäßig der Widerstand gegen Zerreißen in einem zur Röhrenachse normalen Querschnitte ungefähr doppelt so groß ist, als in jedem Längendurchschnitte.

Es sei l die Länge der Röhre, so ist der Widerstand des Zerreißens für die beiden Trennungsebenen:

$$2\delta l k.$$

Der auf Zerreißen wirksame Horizontaldruck ist, da die Projection der Röhrenhöhlung auf eine Verticalebene gleich einem Rechtecke vom Inhalte dl ist, gleich:

$$dlp.$$

Die Gleichung zur Bestimmung der Wandstärke ist daher:

$$2\delta lk = dlp$$

$$1)\quad \delta = \frac{d}{2}\frac{p}{k}.$$

Es ist bei Entwickelung dieser Formel, die zuerst von Mariotte abgeleitet worden ist, auf die Elasticität des Röhrenmaterials gar nicht Rücksicht genommen worden, so daß die nach dieser Formel berechneten Wandstärken bei einem sehr großen Drucke sich als unzureichend erweisen mußten. In Folge dessen hat Herr Brix (siehe Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes in Preußen 1834) folgende Formel mit Rücksicht auf die Elasticität des Materials aufgestellt, deren Richtigkeit sich praktisch bewährt hat und die früher auch den gesetzlichen Bestimmungen in Preußen über die Stärke von Röhren und Kesseln zu Grunde gelegt worden ist.

So lange bei der durch den Druck hervorgerufenen Ausdehnung die Elasticitätsgrenze nicht überschritten wird (was für weitere praktische Brauchbarkeit der Röhre durchaus nothwendig ist), bleiben, wie Herr Brix annimmt, die Veränderungen in der Röhrenwand so gering, daß man sie vollständig vernachlässigen darf.

Bezeichnen wir den äußeren Durchmesser der Röhre mit D und nach einer vorgekommenen Ausdehnung die entsprechenden Durchmesser mit d_1 und D_1, so ist dieser Annahme gemäß

$$\delta = \frac{D-d}{2} = \frac{D_1 - d_1}{2} = \ldots$$

Wir nehmen ein Element der Röhrenwandung in der Entfernung y vom Mittelpunkte der Röhre. Die Höhe dieses Elementes ist unendlich klein und mag durch $y_1 - y$ ausgedrückt werden, die Breite ist l und die Länge ist gleich $2\pi y$. Nennen wir die zur Verlängerung λ dieses Elementes nothwendige Kraft q, so ist n. F. 138, Thl. I:

$$q = E\frac{\lambda}{2\pi y}l(y_1 - y).$$

Das Zerreißen wird bei der innersten Wandung seinen Anfang nehmen, an dieser Stelle hat ein Element der Röhrenwandung die Länge πd, die Dehnung ist nach der obigen Voraussetzung hier ebenfalls λ, da aus $D - d = D_1 - d_1$ sich unmittelbar $\pi(d_1 - d) = \pi(D_1 - D) = \gamma$ ergiebt. Daher erhalten wir den Festigkeitsmodul

$$K = \frac{\lambda}{\pi d}E$$

oder

$$\pi K d = E\lambda.$$

Nachdem dieser Werth substituirt, ist die zur Ausdehnung nothwendige Kraft q:

$$q = K\frac{d}{2}\,l\,\frac{y_1 - y}{y}.$$

Das Zerreißen beginnt an zwei sich diametral gegenüberstehenden Stellen zu gleicher Zeit, es findet daher auch an zwei Stellen die Ausdehnung statt, so daß für jedes einzelne Element der Röhrenwandung die Kraft $2q$ nothwendig ist. Bestimmt man in gleicher Weise für sämmtliche Elemente die Kraft für die Ausdehnung, so repräsentirt $\Sigma 2q$ die Kraft, welche nothwendig ist, die ganze Röhrenwand bis zur Elasticitätsgrenze auszudehnen. Soll dies durch die Horizontalcomponente des hydrostatischen Druckes hervorgebracht werden, so ist zugleich

$$\Sigma\, 2q = d\,l\,p.$$

Es besteht daher zur Bestimmung der Wandung δ die Gleichung:

$$d\,l\,p = K d\,l\,\Sigma\frac{y_1 - y}{y},$$

wobei es sich noch um die Summe von $\frac{y_1 - y}{y}$ handelt, worin statt y nach und nach sämmtliche Werthe von $y = \frac{d}{2}$ bis $y = \frac{D}{2}$ zu setzen sind. Durch eine ähnliche Entwickelung wie in §. 4, Thl. II. ergiebt sich:

$$\Sigma\frac{y_1 - y}{y} = log\,nat\,\frac{D}{d}.$$

Die Gleichung zur Bestimmung der Wandstärke δ ist daher, wenn wir noch statt K den Sicherheitsmodul k substituiren:

$$p = k\,ln\,\frac{D}{d} \text{ oder}$$

$$D = d\,e^{\frac{p}{k}},$$

worin e die Basis 2,718218 des natürlichen Logarithmensystems bezeichnet.

Hieraus erhalten wir:

$$2)\quad \delta = \frac{D - d}{2} = \frac{d}{2}\left(e^{\frac{p}{k}} - 1\right).$$

Benutzen wir die in der Analysis entwickelte Reihe:

$$e^{\frac{p}{k}} = 1 + \frac{p}{k} + \frac{p^2}{2\,k^2} + \frac{p^3}{6\,k^3} + \frac{p^4}{24\,k^4} + \cdots,$$

so kann man die höheren Potenzen von $\frac{p}{k}$ vernachlässigen, so lange $\frac{p}{k}$ kleiner als 1 bleibt. Wir erhalten hiernach als Näherungswerth für die Wandstärke δ, wenn wir die drei ersten Summanden der Reihe benutzen:

$$3)\quad \delta = \frac{d}{2}\,\frac{p}{k}\left(1 + \frac{p}{2k}\right).$$

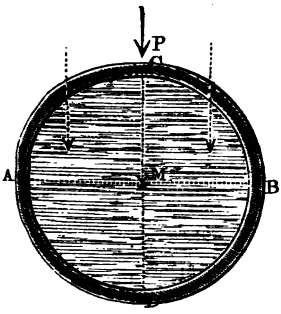
Vernachlässigen wir hierin auch noch den Summand $\frac{p}{2k}$, so entsteht die zu Anfang hergeleitete Formel von Mariotte:

$$\delta = \frac{d}{2}\,\frac{p}{k}.$$

38. Röhren, welche luftleer erhalten werden sollen, oder die auf ihrer Oberfläche einen stärkeren Druck auszuhalten haben als im Innern, müssen so stark hergestellt werden, daß der äußere Druck ein Zerknicken der Röhre nicht bewirken kann.

Der nebenstehende verticale Querschnitt einer Röhre vom Durchmesser d und der Wandstärke δ (Fig. 29) werde durch den äußeren verticalen Druck P im höchsten Punkte C zusammengedrückt, bei weiterem Wachsen von P wird die Röhre bei A und B zerknickt werden. Die Theile AC und CB der Röhrenwandung lassen sich dabei als prismatische Körper ansehen, die mit dem einen Ende A und B eingeklemmt und an dem andern Ende C durch P Kilogr. belastet sind.

Fig. 29.



Wir haben n. F. 151, Thl. I, die für die Praxis zulässige Belastung in diesem Falle gleich $\frac{EJ}{l^2}$, der von uns angenommene Druck P ist daher, da in A und B das Abknicken zugleich erfolgen wird,

$$P = 2\,\frac{EJ}{l^2}.$$

Es ist die Länge l des Stabes annähernd gleich $CM = \frac{d}{2}$ und J ist nach der Tabelle in §. 69, Thl. I, wenn l die Länge der Röhre bezeichnet, gleich $^1/_{12}\,l\,\delta^3$. Hiernach erhalten wir:

$$P = {}^2/_3\,E\,\frac{l\,\delta^3}{d^2}.$$

Ist p der von der Flüssigkeit herrührende Druck auf die Flächeneinheit, so ist der auf das Röhrenstück AC ausgeübte verticale Druck gleich $p\,\frac{d}{2}\,l$, den wir durch die Mitte von AM gerichtet denken können. Der hieraus an dem Punkte C resultirende Druck ist daher:

$$p\,\frac{\frac{d}{2}\,l\,\frac{d}{4}}{\frac{d}{2}} = {}^1/_4\,d\,l\,p.$$

In gleicher Weise ergiebt sich der auf das Röhrenstück BC ausgeübte und an den Punkt C reducirte Druck gleich $^1/_4\, dlp$, so daß wir andererseits

$$P = {}^1/_2\, dlp$$

haben.

Die zur Bestimmung der Wandstärke δ dienende Gleichung ist hiernach:

$${}^1/_2\, dlp = {}^2/_3\, E\, \frac{l\delta^3}{d^2}.$$

Wir erhalten demnach:

$$\delta = d\sqrt[3]{\frac{3p}{4E}}.$$

Genauere theoretische Untersuchungen zeigen und die Versuche von Fairbairn haben es zugleich bewiesen, daß die Rohrlänge einen wesentlichen Einfluß bei der Widerstandsfähigkeit eines Rohres gegen Zerquetschen durch einen äußeren Druck ausübt. Fairbairn hat aus den angestellten Versuchen folgende empirische Formel über die Größe des, die Zerquetschung hervorrufenden äußeren Ueberdrucks abgeleitet:

$$p = 806\,300\, \frac{\delta^{2,19}}{l\, d},$$

worin δ die Wanddicke, d den inneren Rohrdurchmesser in engl. Zollen, l die Rohrlänge in engl. Fußen und p den äußeren Ueberdruck in engl. Pfunden pro Quadratzoll engl. bezeichnet. Führt man anstatt p die Anzahl a der Atmosphären ein, und nimmt man für l und d das Meter als Einheit, während δ in Millimetern gemessen wird, so ist die entsprechende Formel

$$a = 0{,}356\, \frac{\delta^{2,19}}{l\, d}.$$

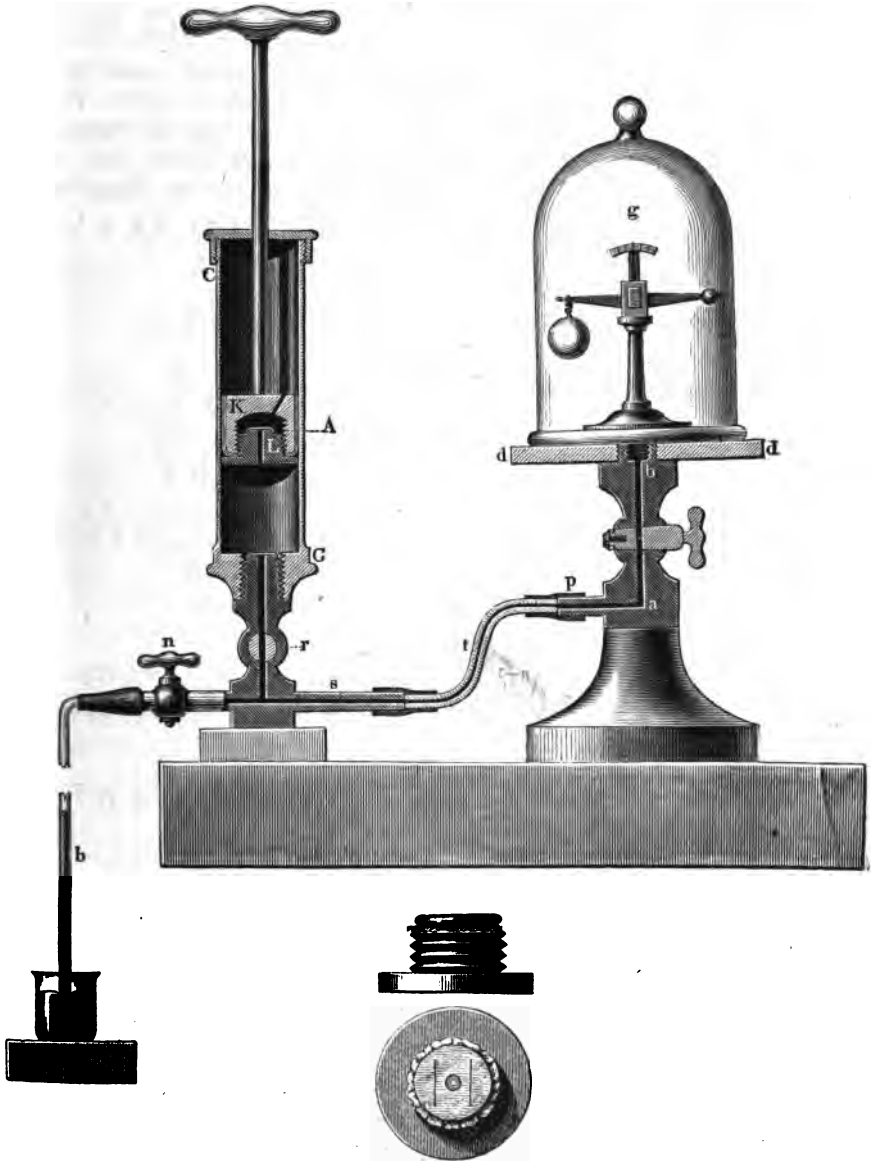
39. Wenn die atmosphärische Luft auf einen Quadratmeter mit 5100, 3600, 2190, 900 Kilogramm drückt, wie hoch muß dann das Quecksilber oder das Wasser in einer Barometerhöhe stehen?

375^{mm}	Quecksilbersäule	oder	$5{,}1^{m}$	Wassersäule
264,7	„	„	3,6	„
161,0	„	„	2,19	„
66,1	„	„	0,9	„

40. In Fig 30 ist eine sogenannte Handluftpumpe dargestellt. CC ist der Pumpenstiefel mit dem dichtschließenden Kolben K. Das in demselben eingeschraubte Ventil L ist unter der Figur in vergrößertem Maßstabe dargestellt. Der Stiefel steht durch das Rohr s, t, p mit dem Recipienten g in Verbindung, aus welchem die Luft entfernt werden soll. Die Communication zwischen Pumpenstiefel und Recipienten wird durch den Hahn r bewerkstelligt, der beim Heraufziehen des Kolbens geöffnet, beim Herunterdrücken aber geschlossen wird, um der herausgegangenen Luft den Ausgang zu gestatten. Aus der Höhe der Quecksilbersäule in dem Rohre b, das mittelst des Hahnes n mit

dem Rohre *s*, *t*, *p* und dem Recipienten *g* in Verbindung gesetzt werden kann, läßt sich die Dichtigkeit der Luft im Recipienten berechnen. Wäre es möglich,

Fig. 30.



in dem Recipienten einen luftleeren Raum herzustellen, so würde die Höhe der gehobenen Quecksilbersäule gleich der Barometerhöhe $= 760^{mm}$ sein müssen. Es sei A der Inhalt des Pumpenstiefels, B der Inhalt des Recipienten mit der Verbindungsröhre und C der Raum zwischen dem Hahne r und dem tiefsten Kolbenstande, der sogenannte schädliche Raum. Ferner werde die Pressung der Luft in dem Recipienten mit p, und nachdem der Kolben 1-, 2-, 3-... n-mal in die Höhe gezogen worden ist, mit $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$ bezeichnet. Dann ist in Folge des Mariotte'schen Gesetzes nach dem ersten Kolbenhube $(B + C)p = (A + B + C)p_1$. Beim Rückgange des Kolbens blieb der schädliche Raum C mit Luft von der Pressung p gefüllt, daher ist für das Ende des zweiten Kolbenhubes: $(A + B + C)p_2 = Bp_1 + Cp$ und ebenso für das Ende des dritten Hubes $(A + B + C)p_3 = Bp_2 + Cp$ u. s. w. Hieraus ergiebt sich

$$p_1 = \frac{B + C}{A + B + C}p = \frac{B}{A + B + C}p + \frac{Cp}{A + B + C};$$

$$p_2 = \left(\frac{B}{A + B + C}\right)^2 p + \frac{BC}{(A + B + C)^2}p + \frac{C}{A + B + C}p$$

$$p_2 = \left(\frac{B}{A + B + C}\right)^2 p + \left(\frac{B}{A + B + C} + 1\right)\frac{Cp}{A + B + C}$$

$$p_3 = \left(\frac{B}{A+B+C}\right)^3 p + \left\{\left(\frac{B}{A+B+C}\right)^2 + \frac{B}{A+B+C} + 1\right\}\frac{Cp}{A+B+C}$$

u. s. w. bis

$$p_n = \left(\frac{B}{A + B + C}\right)^n p + \left\{\left(\frac{B}{A+B+C}\right)^{n-1} + \left(\frac{B}{A+B+C}\right)^{n-2} + \cdots + 1\right\}\frac{Cp}{A+B+C}.$$

Setzen wir zur Abkürzung $\frac{B}{A + B + C} = q$ und $\frac{C}{A+B+C} = q_1$ so ist

1. $$p_n = q^n p + \frac{1 - q^n}{1 - q} q_1 p$$

und wenn wir von dem schädlichen Raum absehen, C also $= 0$ setzen, so ist

2. $$p_n = q^n p = \left(\frac{B}{A + B}\right)^n p.$$

Nehmen wir n sehr groß, setzen also $q^n = 0$, so ist im ersten Falle die Minimalpressung $= \frac{q_1}{1 - q} p = \frac{C}{A + C} p$ und im zweiten Falle wird dieselbe zu Null.

Die Kraft P, welche bei der Pressung p_n der Luft angewendet werden muß, um den Kolben in die Höhe zu ziehen, ist, wenn man den Kolbeninhalt mit F bezeichnet,

$$P = F(10334 - p_n) = 10334\,(1 - q^n)\,F.$$

41. Welche Größe muß der Pumpenstiefel bei einer Luftpumpe erhalten, vermittelst welcher die Luft in einem Raume von 0,31 Kubikmeter nach 30 Kolbenhuben so weit verdünnt ist, daß ihrer Dichtigkeit eine Quecksilbersäule von 262^{mm} entspricht?

Wie groß ist die bei dieser Verdünnung zum Aufziehen des Kolbens nothwendige Kraft, wenn die Kolbenfläche 0,0068 $\square^m$ Inhalt hat?

$$A = B\left(-1 + \sqrt[n]{\frac{p}{p_n}}\right) = 0{,}0112 \text{ Kubikmeter},$$

$$P = 10334\left(1 - \left[\frac{B}{A+B}\right]^n\right)F = 46 \text{ Kilogramm}.$$

42. Der Pumpenstiefel einer Luftpumpe habe 0,03 Kubikmeter und der Recipient 0,09 Kubikmeter Inhalt.

Wie viel Kolbenzüge müssen gemacht werden, um die Luft bis auf 130^{mm} Quecksilberhöhe zu verdünnen?

$$n = \frac{\log p_n - \log p}{\log B - \log(A+B)} = 6{,}1.$$

43. Wird der in der letzten Figur angegebene Hahn r beim Aufziehen des Kolbens geschlossen, dagegen beim Niederdrücken geöffnet, so läßt sich der Apparat auch als Verdichtungspumpe benutzen. Bei Annahme eines schädlichen Raumes C, für $\frac{B}{B+C} = q_2$ und $\frac{A+C}{B+C} = q_3$ ist:

$$p_n = q_2^n p + \frac{1 - q_2^n}{1 - q_2} q_3 p.$$

Für $C = 0$ folgt daraus

$$p_n = p + n q_3 p = p\,\frac{nA + B}{B}.$$

Die bei dieser Pressung zum Niederdrücken nothwendige Kraft ist:

$$P = 10334\left(\frac{nA+B}{B} - 1\right)F.$$

44. Wenn ein Gefäß mit seiner Oeffnung auf einem Wasserspiegel steht, und in senkrechter Richtung nach unten gedrückt wird, so erleidet die in dem Gefäße befindliche Luft eine Verdichtung. Das Wasser kann auch bei der größten Tiefe das Gefäß nicht vollständig anfüllen, sondern muß der verdichteten Luft immer noch den nöthigen Raum gestatten. Soll bei dem Herunterbewegen des Gefäßes gar kein Wasser eintreten, so muß die darin befindliche Luft entsprechend verdichtet werden, um der Wassersäule und dem Atmosphären-

drucke das Gleichgewicht zu halten. Der Apparat, mit einer Vorrichtung zum Comprimiren der Luft versehen, heißt Taucherglocke. Um einen Menschen in dem mit Luft angefüllten Raume den Aufenthalt zu gestatten, muß auch die durch das Athmen unbrauchbar gewordene Luft durch eine Luftpumpe weggeschafft werden. Die beiden Pumpen sind oberhalb des Wassers aufgestellt und communiciren mit der Taucherglocke durch biegsame Schläuche.

Es sei V der Inhalt der Glocke und h die Höhe einer Wassersäule, welche dem Drucke der Atmosphäre im natürlichen Zustande entspricht. Die obere Fläche des Gefäßes befinde sich um h_1 tiefer als der natürliche Wasserspiegel, x sei die senkrechte Entfernung der oberen Fläche von dem Wasserspiegel im Gefäße, und V_1 sei der Inhalt des mit Luft angefüllten Raumes. Nach dem Gesetze von Mariotte haben wir für diese Voraussetzungen:

$$h : h + h_1 + x = V_1 : V.$$

Die Glocke sei ein prismatisches Gefäß von der Länge l, so ist

$$V = lf \text{ und } V_1 = xf,$$

unter f den Querschnitt verstanden, daher:

$$V_1 : V = x : l,$$

und wir erhalten nach Einsetzung dieses Werthes die Höhe x des mit Luft erfüllten Raumes aus

$$h : h + h_1 + x = x : l$$

$$lh = x(h + h_1) + x^2$$

$$x = -\frac{h + h_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{h + h_1}{2}\right)^2 + lh}.$$

45. Welche Höhe x hat der mit Luft erfüllte Raum einer Taucherglocke, wenn dieselbe eine Länge von 6,3 Meter hat und deren obere Fläche um 34 Meter unter dem Wasserspiegel liegt?

Wie tief muß die Glocke herabgelassen werden, damit die Luft bis auf 0,63 Meter zusammengedrückt werde?

Es ist $h = 10{,}334$ Meter,
$x = 1{,}42$ Meter und
$h_1 = 92{,}4$ Meter für $x = 0{,}63^{\text{m}}$.

46. Die in §. 10 entwickelte Formel $x = 2{,}3026\, c \,.\, log \frac{q}{p}$ dient, wie schon angegeben, zur Berechnung der senkrechten Entfernung zweier Punkte, für welche die von der Luft auf die Flächeneinheit ausgeübten Druck p und q sind. Bezeichnet b_0 den Barometerstand an dem tiefer gelegenen Punkte und b den an dem anderen Punkte, so ist

$$\frac{q}{p} = \frac{b_0}{b}$$

zu setzen, und wir erhalten zur Berechnung der Höhe x die Gleichung:

$$x = 2{,}3026\, c \,.\, log \frac{b_0}{b}.$$

Der Factor 2,3026 c heißt der barometrische Coefficient. Derselbe ist vor Anwendung der obigen Formel für jeden einzelnen Fall durch trigonometrische Berechnung einer anderen Höhe x_1 an demselben Orte zu bestimmen. Dann ist in der Gleichung

$$x_1 = 2{,}3026\, c\, .\, log\, \frac{b_0}{b'}$$

der Coefficient 2,3026 c allein unbekannt, der also gefunden und in der obigen Gleichung substituirt werden kann.

Nach de Luc ist dieser Coefficient, so lange die Temperatur an den beiden Stationspunkten dieselbe ist, oder das arithmetische Mittel der beiden Temperaturen $16^3/_4{}^0$R. beträgt, gleich 10000 zu nehmen, wenn die gesuchte Höhe in Toisen ausgedrückt werden soll. Findet diese Annahme jedoch nicht Statt, und bezeichnen wir die Temperaturen an den Stationspunkten mit t_0 und t, so ist der barometrische Coefficient gleich

$$10000 \left[1 + \left(16^3/_4 - \frac{t_0 + t}{2}\right) {}^1/_{215}\right]$$

zu nehmen. Es ist dann also für jeden Grad Abweichung von $16^3/_4{}^0$R. mittlerer Temperatur $^1/_{215}$ der Höhe zu addiren oder zu subtrahiren.

Da 1 Toise 6 Fuß altes Pariser Maß = 1,949034 Meter ist, so ist um die Formel für Metermaß brauchbar zu erhalten statt 10000, 19490 zu setzen, demnach ist die von de Luc aufgestellte Formel

$$x = 19490 \left\{1 + \frac{1}{215}\left(16^3/_4 - \frac{t_0 + t}{2}\right)\right\} log\, \frac{b_0}{b}.$$

Wie hoch liegt ein Punkt über dem Meeresspiegel, wenn das hier beobachtete Barometer 362^{mm} zeigte und die mittlere Temperatur 12^0R. betrug?

$$x = 19490 \left\{1 + \frac{1}{215}(16{,}75 - 12)\right\} log\, \frac{760}{362}$$

$$= 19490 \cdot \frac{219{,}75}{215}\, log\, \frac{760}{362} = 6417 \text{ Meter.}$$

47. Um eine genauere Formel zur Höhenberechnung mittelst des Barometers abzuleiten, gehen wir von der in §. 11 abgeleiteten Gleichung

$$x = R(273 + t) ln\, \frac{q}{p}$$

aus, in welcher der constante Factor $R = 29{,}272$ zu nehmen ist und bringen an dieser Formel die nothwendigen Verbesserungen an.

1. Correction wegen der Schwerkraft.

Mit der Zunahme der Schwerkraft vom Aequator nach den Polen hin nimmt auch zu gleicher Zeit die Dichtigkeit der Luft in geradem Verhältnisse zu. Eine Luftschicht, die bei der Acceleration der Schwere g_α die Höhe x und bei einer Acceleration g_β die Höhe x_1 hat, bestimmt sich durch die Gleichung

$$X = \frac{18393\left(1 + \frac{1}{273}t\right)}{1 - 0{,}002598\cos 2\beta} \log\left\{\frac{B_0}{B}\left[1 - 0{,}00018(T_0 - T)\right]\right\} \text{ Meter.}$$

Für die Gegenden der Erde, wo 2β annähernd gleich 90^0 ist, kann man sich schließlich der folgenden Näherungsformel bedienen

$$X = 18393\left(1 + \frac{1}{273}t\right) \log\left\{\frac{B_0}{B}\left[1 - 0{,}00018\,(T_0 - T)\right]\right\} \text{ Meter.}$$

Als Beispiel diene die Berechnung der Höhe des Chimborazo nach den Beobachtungen Alex. v. Humboldt's:

$$t_1 = -1{,}6^0;\ t_2 = 25{,}4^0 \text{ daher } t = \frac{-1{,}6 + 25{,}4}{2} = 11{,}9^0;$$

$$T_0 = 25{,}3^0;\ T = 10{,}0^0$$

$$B_0 = 337{,}79\,par'''';\ B = 167{,}2\,par'''';\ \beta = 1^0 45'$$

$$X = \frac{18393 \,.\, 284{,}9}{273 \,.\, 0{,}9974} \cdot \log \frac{337{,}79 \,.\, 0{,}997246}{167{,}2} = 5854{,}6 \text{ Meter.}$$

48. Die Spannung der verdünnten und comprimirten Luft sowie die der übrigen Luftarten (Wasserdampf) wird durch Manometer angegeben. Diese zerfallen ihrer Construction nach in offene und geschlossene.

Die einfachste Construction eines offenen Manometers zeigen Fig. 31 und 32. Dasselbe wird bei Niederdruckdampfmaschinen angewendet, wo der Dampf eine Spannung von höchstens zwei Atmosphären hat. Die aus Eisen bestehende heberförmig gebogene Röhre $BCDE$ hat überall denselben Querschnitt, communicirt bei B mit dem Dampfraum A, während das andere Ende E in die freie Luft mündet. Der untere Theil des Rohres ist mit Quecksilber gefüllt, das in beiden Schenkeln auf gleicher Höhe steht, so lange der Dampf die Spannung von 1 Atmosphäre hat. Nimmt die Expansivkraft des Dampfes zu, so fällt das Quecksilber in dem Schenkel BC, steigt dagegen um ebenso viel in der Röhre DE. Auf dem Quecksilberspiegel in DE liegt ein eiserner Schwimmer, der an einem cylindrischen Drahte befestigt ist, mit Hülfe dessen man an einer bei E angebrachten Skala den Ueberdruck des Dampfes ablesen kann. Fällt das Quecksilber in dem Schenkel BC um x Centimeter, so steigt es in dem Schenkel DE ebenfalls um x^{cm} und der Endpunkt des Drahtes ist an der Skala ebenfalls um x^{cm} gestiegen. Die Niveaudifferenz beträgt daher $2x^{cm}$. Dem Drucke von einer Atmosph[illegible] von 10334 Kilogramm pro $\square^m$, entspricht eine Quecksilbersäule vo[illegible] Es läßt sich hiernach leicht die Entfernung der Theilstriche an der S[illegible]nen, so [illegible] derselben, wie es in der Figur angegeben ist, eine[illegible]ke von [illegible]häre entspricht. Nennen wir diese Entfernung [illegible] wir:

$$2x \,.\, 13{,}$$

und $$76 \,.\, 13{,}6$$

daher $$x = 3{,}8^{cm}$$

Auf der Skala der Figur finden sich daher die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 Zehntel Atmosphären Ueberdruck, in einer Entfernung von 3,8^{cm}, 7,6^{cm}, 11,4^{cm}, 15,2^{cm},

Fig 31.

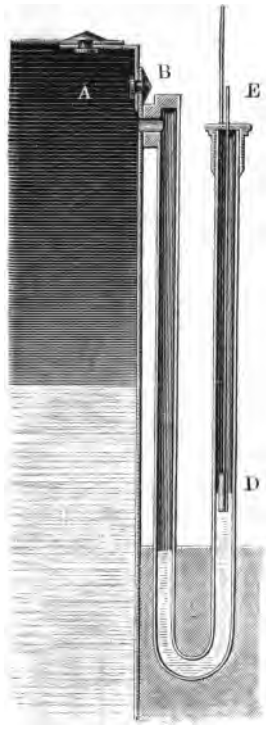
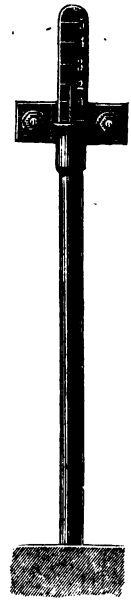


Fig. 32.



19,0^{cm} von dem Nullpunkt der Skala, der sich bestimmt, sobald die Spannung des Dampfes im Kessel mit der der atmosphärischen Luft übereinstimmt, sobald also das Quecksilber in beiden Schenkeln der Röhre auf gleicher Höhe steht. Wird die Röhre *DE* gehörig verlängert, so läßt sich dies beschriebene Manometer auch für Hochdruckmaschinen anwenden. In diesem Falle befestigt man den Schwimmer an einem seidenen Faden, der über eine feste Rolle geführt wird, und an seinem andern Ende mit einem Zeiger versehen ist, durch den man an der angebrachten Skala den Ueberdruck des Dampfes in Atmosphären ablesen kann. Soll die Skala in dem zuletzt beschriebenen Manometer die vollständige Spannung des Dampfes anzeigen, so muß sie anstatt mit 0, mit 1 anfangen, da dem gleichen Stande des Quecksilbers in beiden Röhren schon eine Dampfspannung von 1 Atmosphäre entspricht. Die letzte Art der Skalabezeichnung ist besonders in Frankreich üblich. Außer diesen Hebermanometern benutzt man noch Gefäßmanometer (Fig. 33 a. f. S.). Diese bestehen aus [illegible]en Enden offenen schmiedeeisernen Röhre *mm*, welche durch den [illegible]efäßes *g* dampfdicht hindurchgeht und fast bis auf den Boden

$$X = \frac{18393\left(1 + \frac{1}{273}t\right)}{1 - 0{,}002598\cos 2\beta} \log\left\{\frac{B_0}{B}[1 - 0{,}00018(T_0 - T)]\right\} \text{ Meter.}$$

Für die Gegenden der Erde, wo 2β annähernd gleich 90^0 ist, kann man sich schließlich der folgenden Näherungsformel bedienen

$$X = 18393\left(1 + \frac{1}{273}t\right) \log\left\{\frac{B_0}{B}[1 - 0{,}00018(T_0 - T)]\right\} \text{ Meter.}$$

Als Beispiel diene die Berechnung der Höhe des Chimborazo nach den Beobachtungen Alex. v. Humboldt's:

$$t_1 = -1{,}6^0;\ t_2 = 25{,}4^0 \text{ daher } t = \frac{-1{,}6 + 25{,}4}{2} = 11{,}9^0;$$

$$T_0 = 25{,}3^0;\ T = 10{,}0^0$$

$$B_0 = 337{,}79\,par'''';\ B = 167{,}2\,par'''';\ \beta = 1^0 45'$$

$$X = \frac{18393 \,.\, 284{,}9}{273 \,.\, 0{,}9974} \cdot \log \frac{337{,}79 \,.\, 0{,}997246}{167{,}2} = 5854{,}6 \text{ Meter.}$$

48. Die Spannung der verdünnten und comprimirten Luft sowie die der übrigen Luftarten (Wasserdampf) wird durch Manometer angegeben. Diese zerfallen ihrer Construction nach in offene und geschlossene.

Die einfachste Construction eines offenen Manometers zeigen Fig. 31 und 32. Dasselbe wird bei Niederdruckdampfmaschinen angewendet, wo der Dampf eine Spannung von höchstens zwei Atmosphären hat. Die aus Eisen bestehende heberförmig gebogene Röhre $BCDE$ hat überall denselben Querschnitt, communicirt bei B mit dem Dampfraum A, während das andere Ende E in die freie Luft mündet. Der untere Theil des Rohres ist mit Quecksilber gefüllt, das in beiden Schenkeln auf gleicher Höhe steht, so lange der Dampf die Spannung von 1 Atmosphäre hat. Nimmt die Expansivkraft des Dampfes zu, so fällt das Quecksilber in dem Schenkel BC, steigt dagegen um ebenso viel in der Röhre DE. Auf dem Quecksilberspiegel in DE liegt ein eiserner Schwimmer, der an einem cylindrischen Drahte befestigt ist, mit Hülfe dessen man an einer bei E angebrachten Skala den Ueberdruck des Dampfes ablesen kann. Fällt das Quecksilber in dem Schenkel BC um x Centimeter, so steigt es in dem Schenkel DE ebenfalls um x^{cm} und der Endpunkt des Drahtes ist an der Skala ebenfalls um x^{cm} gestiegen. Die Niveaudifferenz beträgt daher $2x^{cm}$. Dem Drucke von einer Atmosphäre, oder von 10334 Kilogramm pro $\square^m$, entspricht eine Quecksilbersäule von 76^{cm}. Es läßt sich hiernach leicht die Entfernung der Theilstriche an der Skala bestimmen, so daß jeder derselben, wie es in der Figur angegeben ist, einem Ueberdrucke von 0,1 Atmosphäre entspricht. Nennen wir diese Entfernung x, so haben wir:

$$2x \,.\, 13{,}6 = 0{,}1$$

und

$$76 \,.\, 13{,}6 = 1$$

daher

$$x = 3{,}8^{cm}$$

Auf der Skala der Figur finden sich daher die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 Zehntel Atmosphären Ueberdruck, in einer Entfernung von 3,8^{cm}, 7,6^{cm}, 11,4^{cm}, 15,2^{cm},

Fig 31.

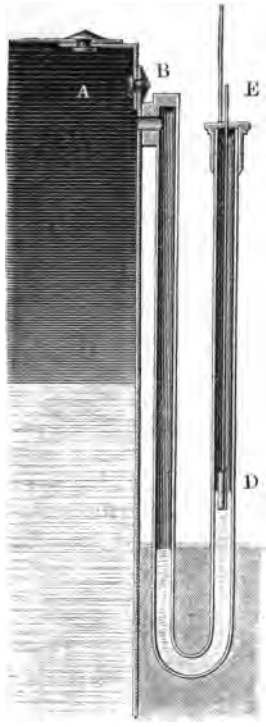
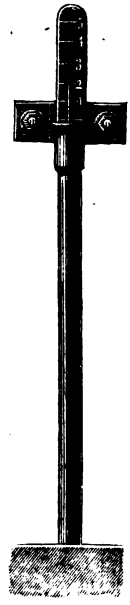


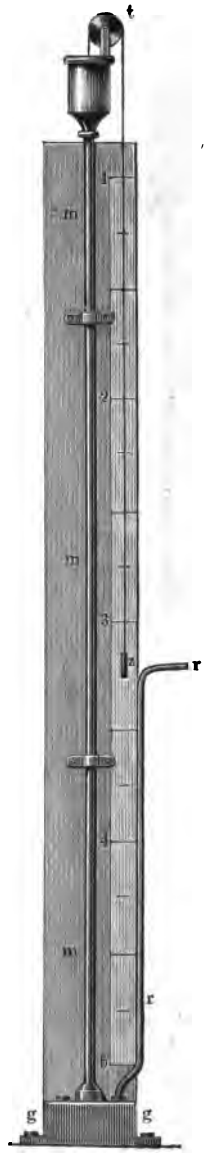
Fig. 32.



19,0^{cm} von dem Nullpunkt der Skala, der sich bestimmt, sobald die Spannung des Dampfes im Kessel mit der der atmosphärischen Luft übereinstimmt, sobald also das Quecksilber in beiden Schenkeln der Röhre auf gleicher Höhe steht. Wird die Röhre *DE* gehörig verlängert, so läßt sich dies beschriebene Manometer auch für Hochdruckmaschinen anwenden. In diesem Falle befestigt man den Schwimmer an einem seidenen Faden, der über eine feste Rolle geführt wird, und an seinem andern Ende mit einem Zeiger versehen ist, durch den man an der angebrachten Skala den Ueberdruck des Dampfes in Atmosphären ablesen kann. Soll die Skala in dem zuletzt beschriebenen Manometer die vollständige Spannung des Dampfes anzeigen, so muß sie anstatt mit 0, mit 1 anfangen, da dem gleichen Stande des Quecksilbers in beiden Röhren schon eine Dampfspannung von 1 Atmosphäre entspricht. Die letzte Art der Skalabezeichnung ist besonders in Frankreich üblich. Außer diesen Hebermanometern benutzt man noch Gefäßmanometer (Fig. 33 a. f. S.). Diese bestehen aus einer an beiden Enden offenen schmiedeeisernen Röhre *mm*, welche durch den Deckel des Gefäßes *g* dampfdicht hindurchgeht und fast bis auf den Boden

deſſelben reicht. Das Gefäß iſt mit Queckſilber gefüllt und ſteht durch das Rohr *r*, welches in dem oberen Deckel dampfdicht befeſtigt iſt, mit dem Dampfraum in Verbindung. So lange die Dampfſpannung gleich der der äußeren Luft iſt, ſteht das Queckſilber in dem Gefäße *g* und der Röhre *mm* gleich hoch.

Fig. 33.



Sobald der Dampf dagegen Ueberdruck beſitzt, wird das Queckſilber in der Röhre *m* ſteigen, und zwar wird es ſich für jede Atmoſphäre um 76^{cm} erheben. Die Entfernung der Theilſtriche an der Skala wird daher für dieſelbe Gewichtseinheit noch einmal ſo groß ſein, als bei einem Hebermanometer. Die Bezeichnung der Skala in der Figur iſt nach der in Frankreich üblichen Methode vorgenommen.

49. Die beſchriebenen Manometer werden, wenn der Dampf eine große Spannung beſitzt, ihrer großen Länge wegen ſehr unbequem, weshalb man ſich ſchon lange bemüht hat, für Hochdruckdampfmaſchinen Manometer zu conſtruiren, die eine gleiche Sicherheit beim Ableſen der Dampfſpannung gewähren, wie die offenen Manometer, ohne deren große Länge zu beſitzen. Hierher gehören außer den geſchloſſenen Luft-

Fig. 34.

manometern die Differentialmanometer und das auf dem Princip der hydrauliſchen Preſſe beruhende Kolbenmanometer von Galy-Cazalat.

Ein Differentialmanometer (Fig. 34) besteht aus einer beliebigen Anzahl heberförmig gebogener, miteinander verbundener Röhren, von denen die letzte a in die freie Luft mündet, die erste b mit dem Dampfraum in Verbindung steht. Die untere Hälfte der Röhren ist mit Quecksilber gefüllt, dessen Oberfläche, so lange der Dampf die Spannung von einer Atmosphäre hat, bei sämmtlichen Röhren in der Ebene oo liegt. Der obere Theil der Röhren ist, mit Ausnahme der letzten a, mit Wasser gefüllt. Sobald die Dampfspannung wächst, wird das Quecksilber in der ersten, dritten, fünften ... Röhre sinken, das in der zweiten, vierten, sechsten ... steigen, bis dem Dampfdrucke durch den Druck der Atmosphäre in der letzten Röhre und dem vereinigten Wasser- und Quecksilberdrucke in den übrigen Röhren das Gleichgewicht gehalten wird. Die Röhren mögen sämmtlich denselben Querschnitt haben und das Quecksilber mag in der ersten Röhre um x^{cm} gefallen sein. Für diese Annahmen fällt das Quecksilber in der dritten, fünften, siebenten ... Röhre ebenfalls um x^{cm}, steigt dagegen in der zweiten, vierten, sechsten ... um x^{cm}, so daß der Niveauunterschied in der ersten und zweiten, in der dritten und vierten ... $2\,x^{cm}$ beträgt. Gesetzt, das Manometer besteht aus $2m$ Röhren und der Dampf habe eine Spannung von a Atmosphären, so haben wir, wenn 13,6 das specifische Gewicht des Quecksilbers ist:

$$\text{Luftdruck} + \text{Quecksilberdruck} = 76 + m \,.\, 2x$$

$$\text{Dampfdruck} + \text{Wasserdruck} = 76\ a + m\,\frac{2x}{13{,}6}.$$

Hieraus erhalten wir die Gleichgewichtsbedingung, aus der sich die Steighöhe des Quecksilbers in der letzten Röhre bestimmt

$$76 + m \,.\, 2x = 76\,a + m\,\frac{2x}{13{,}6}$$

$$x = \frac{76\,.\,13{,}6}{2\,.\,12{,}6}\cdot\frac{a-1}{m} = 41{,}01\,\frac{a-1}{m}\ \text{Centimeter.}$$

Nehmen wir, wie in der Figur angegeben, acht Röhren, so ist $m = 4$ und wir erhalten als Steighöhe des Quecksilbers

für $a =$	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$= x$	0	5,125	10,25	15,375	20,5	25,625	30,75	35,875	41,0	46,125	51,25

Man würde hiernach bei einem derartigen Instrumente mit einer Höhe von $^2/_3$ Meter bei hochgespannten Dämpfen ausreichen.

Was die praktische Ausführung des Manometers anbetrifft, so besteht das ganze System, mit Ausnahme der letzten Röhre a, aus gezogenen eisernen Röhren. Die letzte Röhre muß zur Beobachtung der Steighöhe an der hier

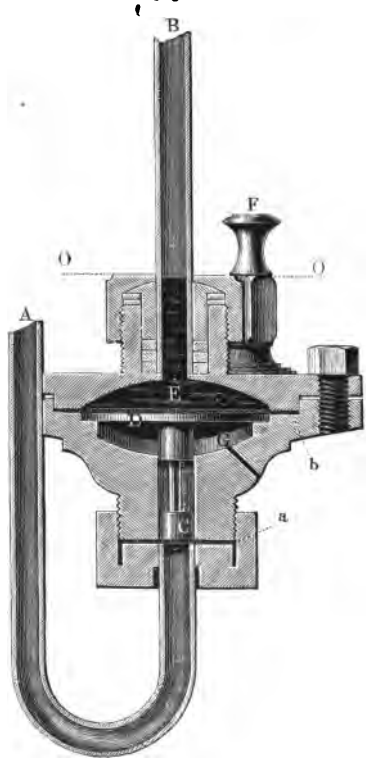
angebrachten Skala aus Glas gefertigt sein. Zum Einfüllen und Ablassen der Flüssigkeiten finden sich an den oberen und unteren Theilen der gebogenen Röhren Hähne.

Bei den nach dem Principe von Galy-Cazalet construirten offenen Manometern wird der Dampfdruck auf das Quecksilber durch einen Kolben vermittelt, dessen Endflächen einen verschiedenen Inhalt haben.

Um die Bewegung des Kolbens bei der Druckübertragung so klein als möglich zu machen, sind über die Endflächen des Kolbens Gummischeiben gespannt, welche an dem Gehäuse befestigt sind, die Kolbenbewegung hindern, die Druckübertragung dagegen gestatten.

In der nebengezeichneten Fig. 35 stellt *A* das Dampfrohr, *B* das Steigrohr für das Quecksilber vor, die untere Fläche des vermittelnden Kolbens ist *C*, die obere, die den Druck auf das Quecksilber in *E* überträgt, ist *D*. Die über die Kolbenfläche gespannten Gummischeiben sind *a* und *b*. Es ist aus der Zeichnung ersichtlich, daß die Bewegung des Kolbens nur sehr gering sein kann, und es ist dies um so nothwendiger, als bei einer größeren Bewegung eine Dehnung der Gummischeiben erfolgen würde, welche mit in Rechnung gebracht werden müßte, was geradezu unmöglich ist. Das Gefäß *F* dient zum Einfüllen des Quecksilbers, so daß dasselbe bis auf die Höhe *O O* in die Röhre *B* steigt, welche Höhe dem Druck der Atmosphäre entspricht. Der untere Theil des Kolbens *D* steht durch die Oeffnung *G* mit der atmosphärischen Luft in Verbindung, so daß das Manometer den wirklichen Dampfdruck im Kessel anzeigt. Es sei $d_1^{\,m}$ der Durchmesser der Kolbenfläche *C*, $d_2^{\,m}$ der der Kolbenfläche *D* und der Dampf habe eine Spannung von *a* Atmosphären, wobei die Quecksilbersäule eine Höhe von x^m haben mag. Der gegen die Fläche *C* ausgeübte Dampfdruck ist für diese Annahmen:

Fig. 35.



$$\frac{\pi}{4} d_1^2 a \;.\; 10334 \text{ Kilogramm.}$$

Der von dem Queckſilber gegen die Fläche D ausgeübte Druck iſt dagegen

$$\frac{\pi}{4} d_2^2 x \,.\, 13{,}6 \,.\, 1000 \text{ Kilogramm.}$$

Für das vorhandene Geichgewicht haben wir deshalb

$$\frac{\pi}{4} d_1^2 \,.\, 10334\, a = \frac{\pi}{4} d_2^2 \,.\, 13{,}6 \,.\, 1000 \,.\, x$$

$$x = 0{,}760\, a \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \text{ Meter.}$$

Nehmen wir das Verhältniß der Kolbenfläche C und D gleich 0,1, ſo iſt $\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 0{,}1$ und die Steighöhe des Queckſilbers für dies Manometer

$$x = 0{,}076\, a \text{ Meter} = 7{,}6\, a \text{ Centimeter.}$$

Für $a = 1$ wird $x = 7{,}6^{\text{cm}}$, wodurch ſich die Entfernung der Ebene 00 von der Oberfläche des Kolbens D beſtimmt.

Für $a =$	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$x^{\text{cm}} =$	7,6	11,4	15,2	19	22,8	26,6	30,4	34,2	38,0	41,8	45,6

Hiernach iſt eine Höhe von $^2/_3$ Meter für ein derartiges Manometer bei hochgeſpannten Dämpfen vollkommen ausreichend. Die Skala derartiger Manometer wird am beſten auf dem Verſuchswege unter Vergleichung mit einem andern zuverläſſigen offenen Manometer hergeſtellt.

Ein geſchloſſenes Luftmanometer (Fig. 36 a. f. S.) beſteht aus einem metallenen Gehäuſe, in welchem ſich ein Gefäß mit Queckſilber befindet. Eine genau calibrirte, oben *geſchloſſene* Röhre wird von oben in das Queckſilber geſteckt und in ſenkrechter Lage darin befeſtigt. So lange die auf die Queckſilberoberfläche des Gefäßes einwirkende Luft die Spannung von 1 Atmoſphäre hat, wird ihr durch die in der Röhre befindliche Luft das Gleichgewicht gehalten; *in dem Gefäße und in der Röhre* ſteht daher das Queckſilber für dieſen normalen Zuſtand auf derſelben Höhe bb. Durch den Canal a tritt der Dampf in das Gehäuſe, und bei einer größeren Spannung deſſelben wird das Queckſilber aus dem Gefäße in die Röhre getrieben, wodurch die hierin befindliche Luft zuſammengedrückt wird.

Die Zuſammendrückung folgt nicht vollſtändig dem *Mariotte*'ſchen Geſetze, da das aufſteigende Queckſilber vermöge ſeines Gewichtes einen Theil des Dampfdruckes aufhebt. Hiernach iſt auch die *gebräuchliche* Eintheilung der Skala bei dieſen Manometern auf Grund des *Mariotte*'ſchen Geſetzes falſch.

Um die richtige Eintheilung zu bestimmen, nehmen wir an, daß die Höhe des Queckſilberſpiegels in dem Gefäße ſich nicht ändere, wenn auch daſſelbe in der Röhre in die Höhe ſteigt, was um ſo mehr zuläſſig iſt, da der Unterſchied der Querſchnitte des Gefäßes und der Röhre gewöhnlich bedeutend iſt. Es ſei l die innere Länge der Glasröhre, x die Steighöhe des Queckſilbers, von dem Queckſilberſpiegel bb aus gemeſſen, und a der Ueberdruck des Dampfes in Atmoſphären. Der auf das Queckſilber bei bb von dem Dampfe pro □Meter ausgeübte Druck iſt gleich

Fig. 36.

$$(a + 1)\,13{,}6 \,.\, 1000 \,.\, 0{,}760.$$

Dieſem Drucke wird durch die x^m hohe Queckſilberſäule und durch die Spannung S der comprimirten Luft das Gleichgewicht gehalten. Wir haben deshalb

$$(a+1)\,13{,}6\,.\,1000\,.\,0{,}760 = x\,.\,13{,}6\,.\,1000 + S,$$

d. h.

$$S = 13{,}6\,.\,1000\,\{0{,}760\,(a+1) - x\}.$$

Hat die in der Röhre befindliche Luft die Spannung von 1 Atmoſphäre, ſo iſt die vom Queckſilber freie Höhe der Röhre $= l$, für die Spannung S iſt die freie Höhe $= l - x$. Nach dem Geſetze von Mariotte iſt aber

$$(l - x)\,.\,S = l\,.\,13{,}6\,.\,1000\,.\,0{,}760$$

und mit Benutzung des Werthes von S

$$(l - x)\,\{0{,}760\,(a+1) - x\} = l\,.\,0{,}760,$$

d. h.

$$x = \frac{l + 0{,}760\,(a+1)}{2} - \sqrt{\left(\frac{l+0{,}760\,(a+1)}{2}\right)^2 - 0{,}760\,la}.$$

Es iſt für die Genauigkeit der Angabe gut, die Länge l der Röhre recht groß zu nehmen. Für gewöhnlich iſt $l = 0{,}38^m$. Für dieſen ſpeciellen Werth findet ſich

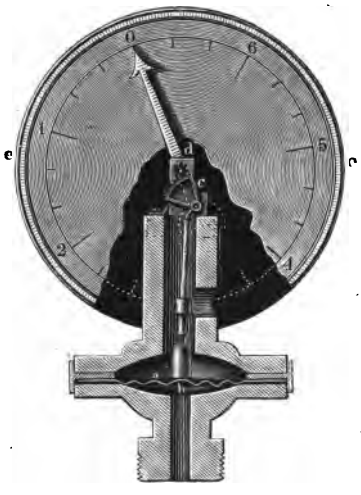
$$x = 0{,}38\,\{1{,}5 + a - \sqrt{(1{,}5+a)^2 - 2a}\}.$$

Ueberdruck des Dampfes in Atmosphären. a	Steighöhe des Queckſilbers. x^m	Entfernung zweier Theilſtriche pro Atmoſphäre in Millimetern.
0	0	
1	0,1672	167,2
2	0,2394	72,2
3	0,2774	38,0
4	0,2964	19,0
5	0,3116	15,2
6	0,3230	11,4

Dieſes einfache und bequeme Manometer hat verſchiedene Uebelſtände, weshalb es jetzt immer weniger angewendet wird. Die Entfernung der Theilſtriche wird, je ſtärker der Dampfdruck iſt, immer kleiner, was für die praktiſche Brauchbarkeit um ſo nachtheiliger iſt, je kürzer die Röhre genommen wird. Will man bei einem geſchloſſenen Manometer für gleiche Druckzunahme eine gleiche Steighöhe haben, ſo iſt die cylindriſche Röhre durch eine ſich nach oben

Fig. 37.

Fig. 38.



verjüngende zu erſetzen, die in eine Kugel ausläuft. Ein ſolches Inſtrument heißt ein hyperboliſches Manometer, da der Meridianſchnitt der Glasröhre eine Hyperbel iſt.

Andererseits wird ein geschlossenes Manometer nach und nach dadurch ungenau, daß der Sauerstoff der comprimirten Luft das Quecksilber oxydirt, wodurch sich das Volumen der Luft ändert. Weiter wird die Glasröhre mit der Zeit blind, so daß ein Erkennen des Quecksilberstandes fast unmöglich ist.

Endlich sind sämmtliche Quecksilbermanometer bei Locomotiven und bei denjenigen Maschinen ganz unbrauchbar, wo starke Erschütterungen das Quecksilberniveau in jedem Moment ändern.

In Folge dessen hat man in der neuesten Zeit Metallmanometer in Anwendung gebracht, bei denen der Dampfdruck auf eine Feder oder ein spiralförmig gewundenes Rohr von elliptischem Querschnitte wirkt, hier eine Veränderung hervorbringt, die mittelst einer Hebelverbindung an einer Skala sichtbar gemacht wird. Bei allen diesen Manometern wird die Skala auf dem Versuchswege mit Benutzung eines offenen Quecksilbermanometers verfertigt. Die Figuren 37 und 38 (a. v. S.) zeigen zwei dergleichen in Anwendung gekommene Manometer.

50. Wie groß ist die Spannung einer Luftmasse, die einen Raum von 0,8 Kubikmeter bei 100° C. einnimmt, wenn dieselbe durch Zusammendrückung von 1 Kubikmeter bei einer Temperatur von 10° und der Spannung von 1 Atmosphäre entstanden ist?

$$\frac{1 \,.\, 1}{273 + 10} = \frac{a \,.\, 0{,}8}{273 + 100},$$

d. h.

$$a = \frac{373}{283 \,.\, 0{,}8} = 1{,}65 \text{ Atmosphären.}$$

51. Wenn eine Luftmasse, für welche $V_1 = 30$ Kubikmeter, $a_1 = 1$ Atmosphäre, $t_1 = 10°$ ist, durch Zusammendrückung und Erwärmung auf die Spannung $a_2 = 1{,}25$ Atmosphären und die Temperatur $t_2 = 150°$ gebracht wird, wie groß ist das Volumen V_2 dieser Luftmasse?

$$\frac{1 \,.\, 30}{273 + 10} = \frac{1{,}25 \,.\, V_2}{273 + 150},$$

d. h.

$$V_2 = \frac{423}{283} \cdot \frac{30}{1{,}25} = 35{,}87 \text{ Cubikmeter.}$$

52. Wie groß ist die Dichtigkeit der Luft bei einer Temperatur von 75° und einem Barometerstande von 707^{mm}?

Es ist

$$\frac{p}{\gamma} = 29{,}272\,(273 + t),$$

daher

$$\gamma = \frac{10334 \,.\, 707}{760 \,.\, 29{,}272 \,.\, 348} = 0{,}9437 \text{ Kilogramm.}$$

53. Welches Gewicht hat die Luft in einem Cylinder von 0,785^{m} Durch-

messer und 1,26^m Höhe, bei einer Temperatur von 15^0 und einem Druck von 1,7 Atmosphäre?

$$G = \frac{\pi}{4}\ 0{,}785^2\ .\ 1{,}26\ .\ \frac{1{,}7\ .\ 10334}{29{,}272\ .\ 288} = 1{,}27 \text{ Kgr.}$$

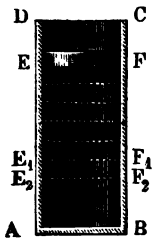
54. Welche Spannung hat Luft von 1 Kilogramm Gewicht, einem Volumen von 2,5 Kubikmeter und einer Temperatur von 300^0 C.?

$$p = 6709 \text{ Kilogr. pro } \square\text{Meter.}$$

55. Welche Temperatur hat eine Luftmasse für $p = 31002$ Kilogrm. $v = 0{,}5$ Kubikmeter?

$$t = 256{,}5.$$

Fig. 39.



56. In dem nebenstehenden Cylinder $ABCD$ (Fig. 39) befindet sich eine elastische Flüssigkeit, die durch den beweglichen Kolben EF abgesperrt ist. Es soll die Arbeitgröße berechnet werden, welche das Zusammendrücken der Flüssigkeit bis auf den Raum AE_2F_2B bewirken kann, wenn die Temperatur dabei constant bleibt. Die anfängliche Spannung in der Flüssigkeit sei q, EA sei $= s_0$, die Spannung, sobald der Kolben in die Lage E_2F_2 gekommen ist, nennen wir p und die dieser entsprechende Flüssigkeitshöhe AE_2 sei $= s$. Während der Kolben zwei auf einander folgende Lagen erreicht, also den Weg $s_{r-1} - s_r$ zurücklegt, kann man die gerade stattfindende Spannung p_r constant denken. Nach dem Gesetz von Mariotte haben wir für diese Annahmen, wenn wir noch den Kolbenquerschnitt mit F bezeichnen,

$$Fs_0 q = Fsp = Fs_r p_r,$$

oder wenn wir das Anfangsvolumen Fs_0 der Luft durch V, das Endvolumen Fs mit V_1 wiedergeben,

$$Vq = V_1 p = Fs_r p_r.$$

Die von der elastischen Flüssigkeit entwickelte, also auch die von der Kraft zu verrichtende Arbeit L_r, wenn der Kolben den Weg $s_{r-1} - s_r$ durchläuft, ist

$$L_r = Fp_r(s_{r-1} - s_r) = Fs_0 q\,\frac{s_{r-1} - s_r}{s_r} = Vq\,\frac{s_{r-1} - s_r}{s_r}.$$

Hieraus folgt $s_{r-1} = s_r\left(1 + \frac{L_r}{Vq}\right)$ wofür wir der bequemen Bezeichnung wegen schreiben wollen

$$s_{r-1} = s_r(1 + l_r).$$

Aehnliche Gleichungen können wir von $s_{r-1} = s_0$ bis $s_r = s$ aufstellen, wobei sich die betreffenden Werthe l_r von l_0 bis l_{r-1} ändern. Die auf diese Weise gebildeten Gleichungen

$s_0 = s_1(1 + l_0)$; $s_1 = s_2(1 + l_1)$; $s_2 = s_3(1 + l_2)$ u. s. w. bis

$$s_{r-1} = s(1 + l_{r-1})$$

multiplicire man mit einander, so entsteht, wenn wir $l_1 = l_2 = l_3 = \cdots l_{r-1} = l$ setzen,

$$s_0 = s(1 + l)^r = s\left(1 + \frac{L_r}{Vq}\right)^r.$$

Bezeichnen wir die ganze Arbeitgröße, um die Luft bis auf den Raum AE_2F_2B zusammenzudrücken, mit L, und versteht man unter r eine bis ins Unendliche wachsende Zahl, so ist $L_r = \frac{L}{r}$ und deshalb

$$s_0 = s\left(1 + \frac{L : Vq}{r}\right)^r.$$

Der Grenzwerth der Potenz ist aber für eine bis ins Unendliche wachsende Zahl r gleich

$$e^{\frac{L}{Vq}},$$

unter e die Basis der natürlichen Logarithmen verstanden, daher erhalten wir aus der letzten Gleichung

$$s_0 = s \cdot e^{\frac{L}{Vq}},$$

und die gesuchte Arbeitgröße ist demnach

$$L = Vq\,ln\,\frac{s_0}{s} = Vq\,ln\,\frac{V}{V_1} = Vq\,ln\,\frac{p}{q}.$$

In gleicher Weise findet sich die Arbeitgröße L, welche die elastische Flüssigkeit verrichtet, wenn sich dieselbe von der größeren Spannung p und dem Volumen V_1 auf die geringere Spannung q mit dem Volumen V ausdehnt:

$$L = V_1 p\,ln\,\frac{p}{q} = Vq\,ln\,\frac{p}{q}.$$

Da wir die Temperatur constant angenommen haben, so ist im ersten Falle der Luft die Wärmemenge $Q = AL$ zu entziehen, im zweiten Falle dagegen bei der Ausdehnung der Luft ist derselben die gleiche Wärmemenge $Q = AL$ zuzuführen. Findet dagegen weder Wärmezuführung noch Ableitung statt, so folgt die elastische Flüssigkeit nicht dem Gesetze von Mariotte, sondern dem von Poisson (§. 14).

57. Welche Arbeitgröße ist nothwendig, um 0,15 Kubikmeter Luft von 760^{mm} Spannung in solche von 865^{mm} Spannung zu verwandeln?

$$L = 0{,}15 \,.\, 10334 \,.\, ln\,\frac{865}{760} = 0{,}15 \,.\, 10334 \,.\, 2{,}3026\, log\,\frac{865}{760} = 200^{km}.$$

58. Wie viel Wärmeeinheiten sind einer Luftmasse zuzuführen, damit diese bei constanter Temperatur sich in ihrer Spannung von 760^{mm} auf 800^{mm} erhöhe, das ursprüngliche Volumen der Luft zu 0,33 Kubikmeter angenommen.

Die verrichtete Arbeit $L = 2{,}3026 \,.\, 0{,}33 \,.\, 10334 \,.\, log \frac{800}{760} = 174{,}92$ Kilogramm-Meter.

$$Q = AL = \frac{174{,}92}{424} = 0{,}41 \text{ Calorien.}$$

59. In einem Cylinder befindet sich 1 Kilogramm Luft von $t = 40^0$ eingeschlossen; welche Arbeit verrichtet die Luftmasse, wenn sich diese von v auf $\frac{5}{3}v$ ausdehnt und die Temperatur dabei constant bleiben soll? Wie viel Wärmeeinheiten sind dabei der Luft zuzuführen?

$$L = 2{,}3026\, pv\, log \frac{\frac{5}{3}v}{v} = 2{,}3026\, R(273 + t) log \frac{5}{3}$$

$$= 2{,}3026 \,.\, 29{,}272 \,.\, 313\, log \frac{5}{3} = 4680{,}3^{\text{km}},$$

$$Q = \frac{4680{,}3}{424} = 11{,}04 \text{ Calorien.}$$

60. Welche Temperatur erhält eine Luftmasse, welche sich arbeitsverrichtend auf den dreifachen Raum ausdehnt, wenn ihre ursprüngliche Temperatur $t = 80^0$ C. war und derselben keine Wärme zugeführt wurde?

$$\frac{273 + 80}{273 + t} = \left(\frac{3v}{v}\right)^{0{,}41}$$

und darum $t = -48{,}02^0$.

61. In einem Cylinder befindet sich 1 Kilogramm Luft von 2 Atmosphären Spannung und 70^0 Temperatur eingeschlossen. Welche Temperatur wird dieselbe besitzen, wenn sie sich arbeitsverrichtend bis auf $1^1/_2$ Atmosphären Spannung ausgedehnt hat, und der Luftmasse keine Wärme zugeführt worden ist?

$$\frac{273 + 70}{273 + t} = \left(\frac{2}{1{,}5}\right)^{\frac{0{,}41}{1{,}41}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{0{,}2907}$$

und $t = 42{,}47^0$.

62. Ein Kilogramm Luft gebraucht bei constantem Volumen für jeden Grad Temperaturerhöhung $c_v = 0{,}16844$ Wärmeeinheiten, welche einer Leistung von $c_v \,.\, \frac{1}{A}$ Kilogrammmeter entsprechen. Dies ist die Größe der im Innern der Luft angehäuften Arbeit, der sogenannten Schwingungsarbeit, welche wir uns als lebendige Kraft der schwingenden Molecüle vorstellen. Da nun die Spannung der Luft bei constantem Volumen mit der Temperatur in gleichem Verhältniß wächst, und besonders für jeden Grad Erwärmung die Spannung und dadurch auch die zu verrichtende Arbeit um $\frac{1}{273}$ derjenigen bei 0^0 wächst, und bei Temperaturen unter 0^0 ebenso um $\frac{1}{273}$ abnimmt, so ist diese Spannung, be-

ziehlich die in der Luft enthaltene Arbeit für $t = -273$ gleich Null, und es sind die für die Wärme auszuführenden Rechnungen bei diesem absoluten Nullpunkt der Temperatur zu beginnen. Hat hiernach eine Luftmasse die Temperatur t, so ist die in derselben enthaltene Schwingungsarbeit $c_v \cdot \frac{1}{A}(273 + t)$. Für eine andere Temperatur t_1 ist in gleicher Weise diese Schwingungsarbeit $= c_v \cdot \frac{1}{A}(273 + t_1)$. Hat sich nun die Luft arbeitsverrichtend ausgedehnt, ohne daß Wärme zugeführt wurde, so ist $t_1 < t$ und die verloren gegangene Schwingungsarbeit ist zugleich die von der Luft verrichtete äußere Arbeit

$$L = \frac{c_v}{A}(t - t_1).$$

Wurde dagegen die Luft zusammengedrückt, so ist $t_1 > t$ und der letztere Ausdruck wird negativ, wodurch angedeutet, daß diese Arbeit von der Luft aufgenommen worden ist. Die Wärmemenge Q, welche im ersten Falle verschwunden, im letzteren Falle dagegen frei geworden, ist wieder $Q = AL$.

63. Welche Arbeit verrichtet die Luft, wenn dieselbe sich bei der Ausdehnung von 40^0 auf 10^0 abkühlt?

$$L = 0{,}16844 \cdot 424\,(40 - 10) = 2142{,}6^{\text{km}}.$$

64. In einem Cylinder befinden sich v Kubikmeter $=$ 1 Kilogramm Luft von 0^0 und der Spannung von 1 Atmosphäre. Durch Zusammendrücken wird die Spannung auf 2,5 Atmosphären gebracht, ohne daß Wärme entzogen wird.

Wie groß ist das Volumen nach der Zusammendrückung, wie hoch erwärmt sich die Luft, wie groß ist die auf die Zusammendrückung zu verwendende Arbeit, und wie viele Calorien werden dabei frei?

$$\left(\frac{v}{v_1}\right)^{1{,}41} = \frac{p_1}{p} = \frac{2{,}5}{1}$$

und daraus $v_1 = 0{,}5221\,v$;

$$\frac{273}{273 + t_1} = 0{,}5221^{0{,}41}$$

und daraus $t_1 = 83{,}35^0$;

$$L = 0{,}16844 \cdot 424 \cdot (0 - 83{,}35) = -5952{,}75^{\text{km}}.$$

$$Q = AL = -14{,}04 \text{ Calorien}.$$

65. Wie groß ist der Druck, den gesättigter Wasserdampf von 105^0, 135^0, 150^0 auf den Quadratmeter ausübt?

$$\log(b\alpha^\tau) = 0{,}6593123 - 0{,}001656138 \cdot 105 = 0{,}4854178$$

$$b\alpha^\tau = 3{,}0578$$

$$\log(c\beta^\tau) = 0{,}0207601 - 0{,}005950708 \cdot 105 = 0{,}3959358 - 1$$

$$c\beta^\tau = 0{,}24885$$

$$\log p = 6{,}2640348 - 3{,}0578 - 0{,}24885$$

$$= 2{,}95739.$$

$p = 906{,}54^{mm}$ entsprechend einem Druck von $\frac{10334 \cdot 906{,}54}{760} = 12327$ Kilogramm pro □Meter.

Für $t = 135$ ist $p = 32004$ Kilogramm pro □Meter.

Für $t = 150$ ist $p = 48694$ Kilogramm pro □Meter.

66. Welche Temperatur hat gesättigter Wasserdampf, welcher auf den Quadratmeter einen Druck von 43920 Kilogramm ausübt?

Nach der Tabelle gehört zu einem Druck von

43402,8 Kilogramm eine Temperatur von $145{,}76^0$

44436,2 „ „ „ „ $146{,}61^0$.

Auf 1033,4 Kilogramm kommen demnach $0{,}85^0$, demnach auf

$$43920 - 43402{,}8 = 517{,}2 \text{ Kgr.} \quad \frac{0{,}85 \cdot 517{,}2}{1033{,}4} = 0{,}425^0.$$

Der Dampf hat also eine Temperatur von $146{,}19^0$.

67. Der innere Durchmesser des Cylinders einer Dampfmaschine ist $0{,}785^m$ und der Dampf hat eine Spannung von 3 Atmosphären. Wie groß ist der Druck gegen den Kolben? Wie groß ist der wirksame Druck, wenn der Dampf in die freie Luft bläst?

$$\frac{\pi}{4} 0{,}785^2 \cdot 31002 = 15004 \text{ Kgr.}$$

$$\frac{\pi}{4} 0{,}785^2 \cdot 20668 = 10003 \text{ „}$$

68. Welchen Raum nehmen 3,25 Kubikmeter Dampf ein, der für 100^0 gesättigt ist, bei einer Erwärmung auf 120^0, 130^0, 145^0, wenn der Druck derselbe bleibt und eine freie Ausdehnung möglich ist?

$$V_1 = 3{,}25 \frac{273 + 120}{273 + 100} = 3{,}25 \cdot \frac{393}{373} = 3{,}42 \text{ Kubikmeter bei } 120^0,$$

$V_1 = 3{,}51$ Kubikmeter bei 130^0,

$V_1 = 3{,}64$ Kubikmeter bei 145^0.

69. Welche Spannung erhält eine Dampfmenge, die in einem abgeschlossenen Raume bei 100^0 gesättigt ist, wenn dieselbe auf die Temperatur von 112^0, 125^0, 135^0 gebracht wird, ohne daß Dampf hinzutritt und ohne eine Ausdehnung zuzulassen?

$$p_1 = 10334 \frac{273 + 112}{273 + 100} = 10334 \frac{385}{373} = 10666{,}5 \text{ Kgr. pro} \square^m,$$

bei 125^0, $p_1 = 11026{,}6$,

bei 135^0, $p_1 = 11303{,}6$.

70. Um wieviel Grade muß eine für 100^0 gesättigte Dampfmenge, die einen abgeschlossenen Raum einnimmt, erwärmt werden, wenn die Spannung

um 76 Millimeter, 0,25 Atmosphären, 5000 Kgr. pro □Meter steigen soll und weder Dampf hinzutreten, noch eine Ausdehnung stattfinden kann?

Um 37,3°; 93,25°; 180,4°.

71. Wie groß ist das specifische Gewicht und das specifische Volumen gesättigten Wasserdampfes bei einem Druck von 1,75 Atmosphären, bei einer Temperatur von 128°?

$$\gamma = 0{,}6061 \,.\, 1{,}75^{0{,}9393} = 1{,}0252 \text{ Kgr.}$$

$$v = 0{,}97537 \text{ Kubikmeter.}$$

Zur Berechnung des zweiten Beispiels ist zuerst n. F. 14 die der Temperatur 128° entsprechende Spannung zu berechnen.

$$\log(b\alpha^\tau) = 0{,}6593123 - 0{,}001656138 \,.\, 128$$

$$= 0{,}6593123 - 0{,}211985664 = 0{,}4473266$$

$$b\alpha^\tau = 2{,}8011$$

$$\log(c\beta^\tau) = 0{,}0207601 - 0{,}005950708 \,.\, 128$$

$$= 0{,}0207601 - 0{,}761690624 = -\,0{,}7409305$$

$$= (0{,}2590695 - 1)$$

$$c\beta^\tau = 0{,}18158$$

$$\log p = 6{,}2640348 - 2{,}8011 - 0{,}18158 = 6{,}2640348 - 2{,}98268$$

$$= 3{,}28136$$

$$p = 1911{,}4^{\text{mm}}$$

daher

$$a = \frac{1911{,}4}{760} = 2{,}515 \text{ Atmosphären.}$$

$$\gamma = 0{,}6061 \,.\, 2{,}515^{0{,}9393} = 1{,}4413 \text{ Kgr.}$$

$$v = 0{,}6938 \text{ Kubikmeter.}$$

72. Wie viel Kubikmeter gesättigten Dampf von 128° erhält man aus 1 Kubikmeter Wasser?

Da 1 Kubikmeter Wasser 1000 Kilogramm wiegt und 1 Kgr. Dampf von 128°, nach der vorigen Aufgabe einen Raum von 0,6938 Kubikmeter einnimmt, so erhält man

693,8 Kubikmeter Dampf.

73. Eine Dampfmaschine gebraucht in der Minute 12,37 Kubikmeter Dampf von 111,74°. Wie viel Kilogramm Wasser ist pro Minute zu verdampfen?

Nach der Tabelle ist $\gamma = 0{,}8874$ Kgr. gleich dem Gewicht von 1 Kubikmeter Dampf, daher wiegt der verbrauchte Dampf, resp. das dazu nothwendige Wasser

10,977 Kilogramm.

Zweites Capitel.

Vom Gleichgewicht der Flüssigkeiten mit eingetauchten Körpern.

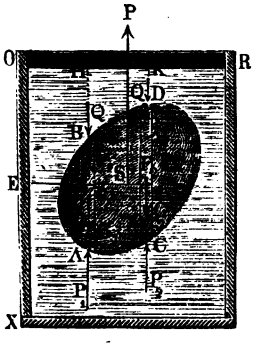
Ein Körper von beliebiger Gestalt, der sich in einer Flüssigkeit befindet, 19
deren Theile unter sich im Gleichgewicht sind, wird an allen Punkten einen hydrostatischen Druck auszuhalten haben, dessen Größe sich für die Flächeneinheit nach §. 4 bestimmt:

$$q = p + \gamma x$$

$$q = p e^{\frac{x}{c}}.$$

Diese Normaldrucke denken wir sämmtlich nach Richtungen der drei Achsen zerlegt, von denen die XAchse senkrecht mit ihrem positiven Theile nach unten liegt. Die Drucke in den verschiedenen Horizontalebenen nach Richtung der Y und ZAchse müssen sich aufheben, da ihre Größe außer von der Druckhöhe noch von der Verticalprojection der Körperfläche abhängig ist. Jede beliebig genommene Verticalprojection ist aber von zwei gegenüberliegenden Körperflächen zugleich Projection, so daß die hiergegen gerichteten Horizontaldrucke sich aufheben müssen. Der Körper wird hiernach in Folge des auszuhaltenden Druckes kein Bestreben zeigen, sich nach horizontaler Richtung fortzubewegen, und es bleiben also allein die Vertialcomponenten übrig, deren Größe von der Horizontalprojection der Körperflächen und der Druckhöhe abhängig ist. Zwei gegenüberliegende Flächenelemente A und B (Fig. 40) derselben Horizontalprojection F_1 mögen die Entfernungen $h_1 + l_1$ und h_1 von der ZYEbene HK haben, so ist der übrigbleibende nach oben in Richtung der XAchse wirkende Druck $P_1 - Q_1$ für tropfbare Flüssigkeiten:

Fig. 40.



$$F_1 [p + \gamma (h_1 + l_1) - p - \gamma h_1] = F_1 l_1 \gamma,$$

und für elastische Flüssigkeiten:

$$F_1 \left(p e^{\frac{h_1 + l_1}{c}} - p e^{\frac{h_1}{c}} \right) = F_1 (q_1 - q_2).$$

Der Druck $F_1 q_1$ von unten nach oben ist um das Gewicht des zwischen A und B gelegenen Flüssigkeitsprisma größer als der Druck von oben nach unten, weshalb wir für $F_1 (q_1 - q_2)$ ebenfalls, unter γ die mittlere Dichtigkeit verstanden, $F_1 l_1 \gamma$ setzen

können, d. h. der nach oben wirksame Druck ist in beiden Fällen gleich dem Gewichte der von dem Prisma AB verdrängten Flüssigkeit. Dies überträgt sich auf sämmtliche derartig durch den Körper gelegte Prismen, weshalb für jede beliebige Flüssigkeit das Gesetz besteht: Die Kraft P, mit welcher eine Flüssigkeit einen darin eingetauchten Körper nach **oben** zu bewegen sucht, ist gleich dem Gewicht der von dem Körper verdrängten Flüssigkeit. Diese Kraft, der Auftrieb genannt, hat ihren Angriffspunkt in dem Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit, welcher mit dem des Körpers zusammenfällt, sobald dieser vollkommene Homogenität besitzt. Das Gesetz behält seine Gültigkeit, ob der Körper vollständig oder nur theilweise in die Flüssigkeit taucht.

Bezeichnen wir das Volumen des Körpers mit V, die constante Dichtigkeit der Flüssigkeit oder einen mittleren Werth derselben mit γ_1, so ist der Auftrieb, wenn der Körper vollständig in die Flüssigkeit eintaucht:

$$P = V\gamma_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Dem Auftriebe wirkt das Gewicht G des Körpers entgegen, die aus beiden resultirende Kraft K ist daher:

$$K = G - V\gamma_1.$$

Die in der Luft vorgenommenen Abwägungen sind diesem Gesetze gemäß ungenau, da jeder in der Luft befindliche Körper so viel von seinem Gewichte verliert, als das Gewicht der verdrängten Luft beträgt. Nennen wir das absolute Gewicht des Körpers im luftleeren Raume sein wahres Gewicht G_1, das absolute Gewicht in der Luft von der Dichte γ dagegen sein scheinbares Gewicht G, so ist, mit V das Körpervolumen bezeichnet,

$$G = G_1 - V\gamma.$$

Ist noch γ_1 das Gewicht von der Kubikeinheit des Körpers, also $G_1 = V\gamma_1$, so ergiebt sich

$$G = G_1 - \frac{\gamma}{\gamma_1} G_1,$$

daher

$$G_1 = G\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma}.$$

Nimmt man die Gewichtsbestimmung mittelst einer gleicharmigen Wage vor und hat man zur Herstellung des Gleichgewichtes G_2 Gewichte von der Dichte γ_2 nothwendig, so ist

$$G_2 = G\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma}.$$

Die Division der beiden letzten Gleichungen liefert daher

$$G_1 = G_2\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\cdot\frac{\gamma_2 - \gamma}{\gamma_1 - \gamma} = G_2\frac{1 - \frac{\gamma}{\gamma_2}}{1 - \frac{\gamma}{\gamma_1}}.$$

Anstatt der Gewichte γ der Kubikeinheiten können auch die specifischen Gewichtszahlen ε, bezogen auf denselben Körper, in Rechnung gebracht werden, und außerdem kann man für die meisten Fälle die Division des obigen Quotienten theilweise ausführen, so daß sich dann als annähernd richtig ergiebt:

$$G_1 = G_2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}\right).$$

In den meisten Fällen der Anwendung haben die Brüche $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}$ und $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}$ so kleine Werthe, daß man dieselben vernachlässigen und deshalb das wahre Gewicht G_1 dem scheinbaren Gewichte G gleichsetzen kann.

Die aus dem Gewichte G des Körpers und dem Auftriebe P resultirende 20
Kraft K erscheint unter der Form einer Differenz. Es lassen sich deshalb drei Fälle unterscheiden, je nachdem dieser Ausdruck positiv, Null oder negativ wird. Setzen wir in den Werth von K, $G = V\gamma$, unter γ das Gewicht der Kubikeinheit des Körpers verstanden, so ist

$$K = V(\gamma - \gamma_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Ist K positiv, so wird der Körper stärker nach unten als nach oben gedrückt. Es wird hiernach ein Körper in einer Flüssigkeit *sinken*, wenn sein Gewicht *größer* ist als das der verdrängten Flüssigkeit, oder wenn sein specifisches Gewicht γ *größer* ist als das specifische Gewicht γ_1 der Flüssigkeit. Ist K Null, so wird der ganz eingetauchte Körper von oben und unten denselben Druck erfahren. Er wird daher an jeder Stelle der Flüssigkeit *schweben*, wenn das eigene Gewicht *gleich* dem der verdrängten Flüssigkeit, oder wenn das specifische Gewicht des Körpers *gleich* dem der Flüssigkeit ist.

Ist endlich K negativ, so ist der Druck von unten nach oben der größere. Der Körper wird hiernach *steigen*, wenn sein eigenes Gewicht *kleiner* als das der verdrängten Flüssigkeit ist, oder wenn das specifische Gewicht des Körpers *kleiner* als das der Flüssigkeit ist. Ist hierbei eine elastische Flüssigkeit vorausgesetzt, so wird das Steigen so lange erfolgen, bis die Dichtigkeit in der Flüssigkeit sich so weit verringert hat, daß das Gewicht des Körpers gleich dem der verdrängten Flüssigkeit geworden. Die Steighöhe läßt sich, nachdem die Dichtigkeit gefunden, mittelst Formel 12

$$x = R(273 + t) \ln \frac{q}{p}$$

berechnen.

Haben wir es andererseits mit einer tropfbaren Flüssigkeit zu thun, so wird bei dem Steigen des Körpers endlich ein Theil desselben aus der Flüssigkeit herausragen. Sobald das Gleichgewicht hergestellt ist, muß das Gewicht des Körpers gleich dem der verdrängten Flüssigkeit sein. In diesem Falle sagt man, der Körper *schwimmt* in der Flüssigkeit.

Die Bedingung des Schwimmens eines Körpers besteht nach dem vorigen 21
Paragraphen hauptsächlich darin, daß das Gewicht des Körpers gleich dem der

verdrängten Flüssigkeit, gleich dem Auftriebe sei. Soll der Körper jedoch in der Flüssigkeit in Ruhe bleiben, so müssen die beiden Kräfte, das Gewicht und der Auftrieb, der Richtung nach ineinanderfallen, d. h. die Verbindungslinie der Angriffspunkte der beiden Kräfte muß eine verticale Linie sein. Ist dieselbe nämlich eine gegen den Horizont geneigte Linie, so würde sich aus den beiden gleichen Kräften ein Kräftepaar bilden, das eine Drehung des Körpers so lange unterhält, bis diese Verbindungslinie die Richtung der Kräfte aufnimmt. Diese Linie nennt man die Schwimmachse, und die Durchschnittsebene des Körpers mit dem Flüssigkeitsspiegel heißt Schwimmebene.

Es läßt sich hiernach bei Körpern die Tiefe des Eintauchens im Voraus genau oder annähernd berechnen, je nachdem der eingetauchte Theil des Körpers sich stereometrisch genau oder annähernd finden läßt. Als Ausgangspunkt dient hierzu die Gleichung 28:

$$P = V_1 \gamma_1 = G,$$

wenn V_1 das Volumen und γ_1 die Dichtigkeit der verdrängten Flüssigkeit bezeichnet. Hierin ist statt V_1 der mittels der Stereometrie zu bestimmende Werth zu substituiren und dann daraus die Eintauchungstiefe zu entwickeln.

Bei einem Körper, der in einer homogenen Flüssigkeit schwimmt, fällt der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit von selbst mit dem Schwerpunkte des von dem Körper eingetauchten Theiles zusammen. Um daher bei einem Körper die Schwimmebene im Voraus zu bestimmen, ist der Körper durch eine Ebene so zu schneiden, daß für dieselbe

$$V_1 \gamma_1 = G = V\gamma$$

werde. Hieraus folgt:

$$V_1 : V = \gamma : \gamma_1,$$

d. h. für die zu suchende Ebene muß sich das Volumen V_1 des eingetauchten Theiles zu dem Volumen V des ganzen Körpers verhalten, wie das specifische Gewicht γ des Körpers zu dem specifischen Gewichte γ_1 der Flüssigkeit.

Zweitens muß die gesuchte Ebene auch so gewählt werden, daß die Schwimmachse darauf rechtwinklig steht. Das Gleichgewicht zwischen dem schwimmenden Körper und der Flüssigkeit tritt dann ein, sobald diese Ebene mit der Flüssigkeitsoberfläche zusammenfällt. Es ist hieraus ersichtlich, daß es für einen Körper verschiedene Schwimmlagen geben kann, und zwar unterscheidet man hierbei hauptsächlich das aufrechte und schiefe Schwimmen von einander. Ein Körper schwimmt aufrecht, wenn wenigstens eine durch die Schwimmachse des Körpers gelegte Verticalebene für den Körper eine Symmetrieebene ist. Im anderen Falle nennt man das Schwimmen schief.

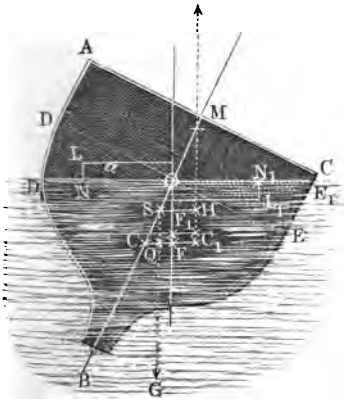
22 Da noch dem Vorigen für denselben Körper verschiedene Schwimmlagen existiren, so ist es von Wichtigkeit, die Lagen in Bezug auf ihre Sicherheit zu untersuchen. Das Gleichgewicht eines schwimmenden Körpers ist sicher oder unsicher, je nachdem derselbe in Folge einer sehr kleinen Entfernung aus der

Gleichgewichtslage in seine ursprüngliche Lage zurückzukehren, oder sich noch mehr aus derselben zu entfernen sucht.

Bei einem Prisma mit horizontalen Kanten läßt sich z. B. leicht erkennen, daß die sicheren und unsicheren Schwimmlagen abwechselnd auf einander folgen. Versucht man nämlich, das Prisma aus einer sicheren Gleichgewichtslage in die nächstfolgende sichere überzuführen, so wird dazwischen eine Lage bemerkt werden, aus der sich der Körper vollständig entfernt, wenn man ihn nach der einen oder der anderen Seite sehr wenig herausbewegt. Dies ist daher eine Lage des unsicheren Gleichgewichts; es giebt deshalb immer zwischen zwei sicheren Gleichgewichtslagen eine unsichere und umgekehrt. Das Gleichgewicht eines schwimmenden Körpers ist hiernach, wenn wir die in §. 44, Thl. I, benutzten Ausdrücke anwenden, stabil, labil oder indifferent. Die Bestimmung dieser verschiedenen Gleichgewichtslagen soll Gegenstand der folgenden Untersuchung sein.

Ein Körper von dem normalen Querschnitte ABC (Fig. 41) schwimme in aufrechter Stellung, und werde in eine schiefe Lage gebracht. DE stelle die Schwimmebene für die aufrechte Lage, D_1E_1 die für die schiefe Lage vor und der Drehungswinkel α werde sehr klein angenommen.

Fig. 41.



Für diese Annahme haben die beiden keilförmigen Körper, deren normale Querschnittte durch DOD_1 und EOE_1 dargestellt sind, gleichen körperlichen Inhalt, und die durch O gehende Drehachse nimmt die Schwerpunkte der beiden Schwimmebenen DE und D_1E_1 auf. Es sei S der Schwerpunkt des Körpers, dessen Gewicht gleich G sein mag, C sei der Angriffspunkt des Auftriebes für das aufrechte Schwimmen und C_1 der für die schiefe Lage. Die Masse der verdrängten Flüssigkeit ist durch die Drehung nicht geändert worden, der Auftrieb hat deshalb dieselbe Größe G, wie während des aufrechten Schwimmens. Das Moment $G \cdot SH$ des sich bildenden Kräftepaars ist daher das Maß der Stabilität für die erste Schwimmlage, von dessen Werth es abhängen wird, ob die ursprüngliche Lage eine stabile, labile oder indifferente war. Wir bestimmen das statische Moment des Körpers DBE auf zweifache Weise für eine Verticalebene, welche die durch O gehende Schwerpunktsachse aufnimmt. Zu dem Ende sei V das Volumen von DBE oder D_1BE_1 und v sei das Volumen von DOD_1 oder EOE_1.

Hiernach erhalten wir, wenn L und L_1 die Schwerpunkte der beiden keilförmigen Körper bezeichnen,

$$v \,.\, ON - V \,.\, C_1F_1 = V \,.\, CF - v \,.\, ON_1$$
$$v \,.\, ON + v \,.\, ON_1 = V(CF + C_1F_1)$$
$$= V(SH + CQ).$$

Es sei DE die XAchse und die durch O gehende Schwerpunktsachse die YAchse. Die Schwimmebene DE bestehe aus den Flächenelementen $f_1, f_2, f_3 \ldots$, die durch ihre Coordinaten $x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3 \ldots$ gegeben sein mögen. Die keilförmigen Körper DOD_1 und EOE_1 kann man als die Summe von kleinen prismatischen Körpern auffassen, die zur Grundebene ein Flächenelement f und zur Höhe den dazu gehörigen Kreisbogen $x \,.\, \alpha$ haben. Hiernach ist $v = \alpha \,.\, \Sigma f_1 x_1$ und weiter nach den Gesetzen des Schwerpunktes:

$$ON \,.\, \alpha \Sigma f_1 x_1 = \alpha \Sigma f_1 x_1^2.$$

Einen gleichen Ausdruck erhalten wir für $v \,.\, ON_1$; die Summe der beiden Momente ist daher ganz allgemein gleich $\alpha \,.\, \Sigma f x^2$, wobei sich $\Sigma f x^2$ auf die ganze Schwimmebene $D_1 E_1$ bezieht und nach §. 69, Thl. I, das Trägheitsmoment J für die durch O gehende YAchse bezeichnet.

Substituiren wir diesen Werth in der obigen Gleichung, so entsteht

$$\alpha \,.\, J = V(SH + CQ)$$

und

$$SH = \alpha \frac{J}{V} - CQ.$$

Es ist $CQ = CS \,.\, \sin\alpha$, und bei der angenommenen Kleinheit des Winkels können wir $CQ = CS \,.\, \alpha$ setzen. Nehmen wir noch die Entfernung CS der beiden Schwerpunkte C und S als bekannt an, setzen deshalb $CS = e$, so erhalten wir:

$$SH = \alpha \left(\frac{J}{V} - e\right),$$

und das Maß für die Stabilität Ss:

$$Ss = G \,.\, SH$$
$$Ss = G\,\alpha \left(\frac{J}{V} - e\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

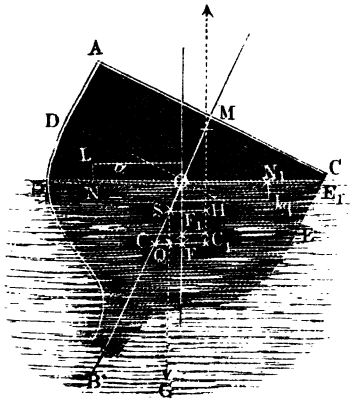
So lange $\frac{J}{V}$ größer als e ist, ist das Maß der Stabilität immer positiv, der Körper wird daher in seine ursprüngliche Lage zurückgebracht und das vorhandene Gleichgewicht war ein stabiles. Wenn $\frac{J}{V} = e$ wird, so ist die Stabilität des Körpers 0, der Körper hat daher kein Bestreben, sich weder weiter noch zurück zu bewegen, das Gleichgewicht war deshalb ein indifferentes.

Ist endlich $\frac{J}{V}$ kleiner als e, so ist der Werth von Ss negativ, der Körper hat daher das Bestreben, sich noch mehr aus der ursprünglichen Lage zu entfernen, das vorhandene Gleichgewicht war ein labiles.

Das stabile Gleichgewicht eines schwimmenden Körpers hängt hiernach allein von dem Ausdrucke $\frac{J}{V} - e$ ab, worin J das Trägheitsmoment der Schwimmebene für eine durch den Schwerpunkt gehende Achse, V das Volumen der verdrängten Flüssigkeit und e die Entfernung des Körperschwerpunktes von dem Angriffspunkte des Auftriebes bezeichnet. So lange der Ausdruck $\frac{J}{V} - e$ positiv bleibt, so lange ist das Gleichgewicht ein stabiles, selbst wenn der Schwerpunkt S höher als der Angriffspunkt C des Auftriebes liegen sollte. Liegt andererseits S tiefer als C, so ist in dem oben gefundenen Werthe für Ss statt e, $-e$ zu setzen, wodurch der maßgebende Factor $\frac{J}{V} - e$ gleich $\frac{J}{V} + e$ wird. Der Werth von Ss ist in diesem Falle immer positiv, das Gleichgewicht daher **immer** ein stabiles.

Die Richtung des Auftriebes für die geneigte Lage des Körpers schneidet die Schwimmachse für die aufrechte Lage in dem Punkte M (Fig. 42), welchen man das Metacentrum nennt, und dessen Lage mit dem stabilen Gleichgewichte des Körpers im innigsten Zusammenhange steht. Zur Bestimmung von $SM = \lambda$ gehen wir von der oben entwickelten Gleichung

Fig. 42.



$$\alpha . J = V(SH + CQ)$$

aus und setzen statt $SH + CQ$

$$CM . \sin\alpha$$

oder annähernd

$$CM . \alpha.$$

Wir erhalten hiernach:

$$CM = \frac{J}{V}$$

und

$$SM = \lambda = \frac{J}{V} \mp e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

je nachdem S höher oder tiefer als C liegt.

Der gefundene Werth von λ liefert die oben gefundene Gleichgewichtsbedingung, d. h. die Lage von M bestimmt das vorhandene Gleichgewicht.

Ist λ positiv, so ist das Gleichgewicht stabil, und M liegt höher als S. Ist das Gleichgewicht labil, so ist λ negativ und M liegt tiefer als S. Für ein indifferentes Gleichgewicht endlich ist $\lambda = 0$ und M fällt mit S zusammen. Hieraus folgt, daß man bei belasteten Körpern, die im stabilen Gleichgewicht

schwimmen sollen, nur allein dafür zu sorgen hat, daß das Metacentrum M nicht mit S zusammenfalle oder gar tiefer als S zu liegen komme während S, wie wir gesehen haben, höher als C liegen kann, wenn nur $e < \frac{J}{V}$ bleibt.

23 Das Gesetz vom Auftriebe findet bei der Bestimmung der specifischen Gewichte der Körper vielfache Anwendung. Es ist zu dem Ende der Auftrieb P des Körpers für die benutzte Flüssigkeit von der Dichtigkeit γ_1 zu bestimmen, was gewöhnlich mittelst einer hydrostatischen Wage geschieht, die sich von der gewöhnlichen Wage dadurch unterscheidet, daß an der unteren Seite der einen Wagenschale ein Häkchen angebracht ist, um den Körper mittelst eines Haares oder feinen Drahtes daran zu hängen, bevor es in die Flüssigkeit, welche in einem untergesetzten Gefäße enthalten ist, eingetaucht wird. Man findet hierdurch also das Gewicht des Körpers unter der Flüssigkeit, welches von dem absoluten Gewichte G subtrahirt, den Gewichtsverlust $P = V\gamma_1$ liefert. Bezeichnen wir noch das specifische Gewicht des Körpers mit γ_2, so ist $G = V\gamma_2$, daher

$$\frac{G}{P} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$$

und

$$\gamma_2 = \gamma_1 \frac{G}{P} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

Will man anstatt der specifischen Gewichte γ, die specifischen Gewichtszahlen ε in Rechnung bringen, so ist

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \frac{G}{P} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

a. Ist der Körper dichter als Wasser und zugleich im Wasser unauflösbar, so kann man die Abwägung unter Wasser vornehmen und wir haben dann in den obigen Formeln $\gamma_1 = 1000$ Kilogramm = dem Gewicht von 1 Kubikmeter Wasser und $\varepsilon_1 = 1$ zu setzen und es ist dann

$$\gamma_2 = \frac{\text{Absolutes Gewicht}}{\text{Gewichtsverlust}} \cdot 1000 \text{ Kgr.},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\text{Absolutes Gewicht}}{\text{Gewichtsverlust}}.$$

b. Ist der Körper zwar dichter als Wasser, aber darin auflösbar, so muß die Abwägung in einer Flüssigkeit geschehen, die sich zu dem Körper indifferent verhält und es kommen dann also die Formeln 32 und 33 unmittelbar zur Anwendung, wobei sich ε_2 und ε_1 gemeinschaftlich auf Wasser beziehen.

c. Ist der Körper, dessen specifisches Gewicht man bestimmen will, weniger dicht als Wasser, so verbinde man denselben mit einem schweren Körper, so daß die Verbindung in der Flüssigkeit untersinkt. Ist nun der Gewichtsverlust der verbundenen Körper P_1 der des schwereren Körpers P_2, so ist der Gewichts-

verlust P des specifisch leichteren Körpers $P = P_1 - P_2$ und das specifische Gewicht desselben, wenn wir sein absolutes Gewicht wieder mit G bezeichnen,

$$\gamma_2 = \gamma_1 \frac{G}{P_1 - P_2}.$$

d. Um das specifische Gewicht γ_1 einer Flüssigkeit zu bestimmen, werde der Gewichtsverlust eines und desselben Körpers in dieser Flüssigkeit und im Wasser bestimmt, so ist der erstere $P = V\gamma_1$, der letztere $Q = V\gamma$, unter V das Volumen des Körpers und γ die Dichtigkeit des Wassers verstanden. Demnach ist

$$\gamma_1 = \frac{P}{Q}\gamma.$$

Auch durch bloßes Abwiegen in freier Luft läßt sich das specifische Gewicht von Flüssigkeiten oder lockeren Massen bestimmen. Das Gewicht einer luftleer hergestellten Flasche sei G, das Gewicht derselben Flasche mit Wasser gefüllt sei G_1 und das Gewicht derselben Flasche mit der zu untersuchenden Masse gefüllt sei G_2, dann ist, das Volumen des hohlen Raumes der Flasche mit V und das specifische Gewicht der Flüssigkeit mit γ_1 bezeichnet,

$$V\gamma = G_1 - G$$

und

$$V\gamma_1 = G_2 - G,$$

daher

$$\gamma_1 = \gamma \frac{G_2 - G}{G_1 - G}.$$

Die letztere Methode kann auch zur Bestimmung des specifischen Gewichtes luftförmiger Körper benutzt werden.

Zur Bestimmung der specifischen Gewichte von Flüssigkeiten verwendet 24
man hauptsächlich Aräometer oder Senkwagen, das sind feste Körper von angemessener Gestalt, welche man in Flüssigkeiten schwimmen läßt, um aus der Größe des eingetauchten Körpertheils auf die Dichtigkeit der Flüssigkeit schließen zu können. Diese Instrumente werden gewöhnlich aus Glas, auch wohl aus Metall gefertigt, sind inwendig hohl und erhalten eine längliche in Bezug auf eine Achse symmetrische Form. Der Schwerpunkt des Apparates wird möglichst tief angeordnet, damit die Achse der Senkwage beim Schwimmen die senkrechte Lage annehme. Je nach dem Gebrauche nennt man diese Apparate hydrostatische Senkwagen, Soolwagen, Bierwagen, Alkoholometer ꝛc. Man unterscheidet Gewichtsaräometer und Skalenaräometer, von denen die ersteren auch zur Bestimmung des specifischen Gewichtes fester Körper Verwendung finden.

In Fig. 43 (a. f. S.) ist ein Gewichtsaräometer aus Glas dargestellt, wie es zur Bestimmung des specifischen Gewichtes von Flüssigkeiten Verwendung findet. Es sei G das Gewicht der Senkwage, P das auf den Teller A zu legende Gewicht, um das Instrument bis zur Marke O in Wasser von der Dichtigkeit γ einsinken zu lassen, ferner sei P_1 das hier aufzulegende Gewicht,

um das Einsenken bis zu derselben Marke O in einer Flüssigkeit von der Dichtigkeit γ_1 zu ermöglichen, dann ist, unter V das Volumen des eingetauchten Instrumentes verstanden,

$$V\gamma = G + P$$

und

$$V\gamma_1 = G + P_1,$$

daher

$$\gamma_1 = \gamma \frac{G + P_1}{G + P}.$$

Das aus Blech hergestellte in Fig. 44 dargestellte Nicholson'sche Aräometer findet auch Anwendung zur Bestimmung des specifischen Gewichts fester Körper. Es sei P das auf den Teller A zu legende Gewicht, um das Instrument bis zur Marke O einsinken zu lassen, und P_1 das nothwendige Gewicht wenn man den zu untersuchenden Körper ebenfalls auf den Teller A gelegt, dann ergiebt sich als absolutes Gewicht des zu untersuchenden Körpers

$$G = P - P_1.$$

Fig. 43.

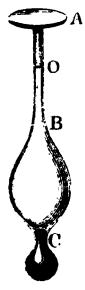


Fig. 44.

Fig. 45.

Bringt man nun den abzuwägenden Körper in das unter Wasser befindliche Körbchen C, und bezeichnen wir das auf den Teller A aufzulegende Gewicht mit P_2, um die Einsenkung des Instrumentes bis zur Marke O hervorzurufen, so ist der Gewichtsverlust des Körpers (der Auftrieb)

$$P = P_2 - P_1$$

und die specifische Gewichtszahl desselben

$$\varepsilon_2 = \frac{P - P_1}{P_2 - P_1}.$$

Das in Fig. 45 dargestellte Scalenaräometer besteht aus einem hohlen Glaskörper, dem durch eingefülltes Quecksilber ein Gewicht G gegeben worden ist, daß derselbe in Wasser schwimmend, bis zur Marke O eintaucht.

Bezeichnen wir das eingetauchte Volumen mit V, die Dichtigkeit des Wassers mit γ, so ist $G = V\gamma$. Bringt man nun das Instrument in eine specifisch schwerere Flüssigkeit von der Dichtigkeit γ, so mag das Instrument nur bis X eintauchen, dann ist, wenn wir den Querschnitt des Stabes BA mit F und die Entfernung OX mit x bezeichnen:

$$G = (V - Fx)\gamma_1,$$

daher die gesuchte Dichtigkeit

$$\gamma_1 = \gamma \frac{V}{V - Fx} = \gamma \frac{1}{1 - \frac{F}{V}x}.$$

War die zu untersuchende Flüssigkeit specifisch leichter als Wasser, so sinkt das Instrument um die Tiefe x über O hinaus ein und wir erhalten die Dichtigkeit

$$\gamma_1 = \gamma \frac{1}{1 + \frac{F}{V}x}.$$

Die Genauigkeit eines solchen Instrumentes ist um so größer, je größer die Entfernung eines Theilstriches vom anderen, je dünner also die Röhre BA, im Vergleich zu dem Volumen des ganzen Instrumentes ist. Um jedoch die Röhre nicht gar zu lang zu erhalten, fertigt man kein Scalenaräometer, welches für alle Flüssigkeiten anwendbar ist, sondern unterscheidet solche für leichtere und für schwerere Flüssigkeiten als Wasser. Bei den für die specifisch leichteren Flüssigkeiten zur Verwendung kommenden Instrumenten liegt der mit O bezeichnete Punkt für das Eintauchen in Wasser nahe an B, für die specifisch schwerere Flüssigkeit dagegen nahe an A.

Da der dickere Theil einer Senkwage, bei verschiedenen Temperaturen eine verschiedene Ausdehnung erleidet, so erfordert die genaue Bestimmung des specifischen Gewichts einer Flüssigkeit, diese Ausdehnung in Rechnung zu bringen, während man die Ausdehnung der Röhre BA vernachlässigen kann. Bezeichnen wir mit V_0 das Volumen des Bauches CB der Senkwage bei 0^0 C. und ist α der Ausdehnungscoefficient des Materials, aus dem das Instrument besteht, so ist für die Temperatur von t^0 C. das betreffende Volumen $(1+\alpha t)V_0$ und daher bei Benutzung der obigen Bezeichnungen

$$G = [(1 + \alpha t)V_0 \mp Fx)\gamma_1,$$

d. h.

$$\gamma_1 = \frac{G}{(1 + \alpha t)V_0 \mp Fx}.$$

Uebungen.

1. Wie groß ist der Auftrieb oder Gewichtsverlust in Wasser von 2,5 Kilogramm Blei, 3,5 Kilogramm Eisen, 1,5 Kilogramm Silber und 3 Kilogramm Gold?

Die in Rechnung zu bringenden specifischen Gewichte sind für Wasser = 1, für Blei = 11,33, für Eisen = 7,7, für Silber = 10,5, für Gold = 19,25.

0,221 Kilogramm.
0,454 „
0,143 „
0,156 „

2. Ein Stück Glas hat das specifische Gewicht 3 und wiegt unter Wasser 2,25 Kilogramm. Wie groß ist das absolute Gewicht?

3,375 Kilogramm.

3. Ein Stück Marmor wiegt in der Luft 100 Kilogramm, unter Wasser 62,5 Kilogramm. Wie groß ist das specifische Gewicht des Marmors?

$2^2/_3$.

4. Ein Körper wog in der Luft 0,2783 Kilogramm, in Wasser 0,264 Kilogramm, in Salpetersäure 0,2565 Kilogramm, in Schwefelsäure 0,2502 Kilogramm, in Salzsäure 0,2612 Kilogramm, in Quecksilber 0,0841 Kilogramm.

Wie groß sind hiernach die specifischen Gewichte der Flüssigkeiten?

1,524 für die Salpetersäure,
1,965 „ „ Schwefelsäure,
1,196 „ „ Salzsäure,
13,58 „ das Quecksilber.

5. Es sei eine mechanische Verbindung von beliebig vielen Körpern gegeben. Die absoluten Gewichte derselben seien G_1, G_2, $G_3 \ldots$, die specifischen Gewichte γ_1, γ_2, $\gamma_3 \ldots$, die Auftriebe für Wasser P_1, P_2, $P_3 \ldots$

Wie groß ist der Auftrieb P der ganzen Verbindung?

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots$$

6. Ein Körper, der aus zweierlei Stoffen besteht, wiegt 17,5 Kilogramm und verliert unter Wasser 5 Kilogramm. 3,5 Kilogramm des einen Stoffes verlieren unter Wasser 1,5 Kilogramm, 9,5 Kilogramm des zweiten Stoffes verlieren unter Wasser 2,5 Kilogramm.

Wie viel von jedem Stoffe befindet sich an dem Körper?

2,386 Kilogramm
15,114 „

7. Ein Gegenstand sei aus zwei Stoffen verfertigt. Er wiegt 29,5 Kilogramm und verliert unter Wasser 17,5 Kilogramm. Die specifischen Gewichte der beiden Stoffe seien 2 und 0,9.

Wie viel Kilogramm eines jeden Stoffes sind an jenem Gegenstande?

25 Kilogramm
4,5 „

8. Es soll eine Verbindung aus Gold und Silber von 10 Kilogramm mit dem specifischen Gewichte 13 hergestellt werden. Wie viel Kilogramm sind von jedem Stoffe nothwendig?

Die specifischen Gewichte für Gold und Silber seien 19,25 und 10,5.

4,230 Kilogramm Gold,
5,769 „ Silber.

9. Welches Gewicht muß ein hölzerner Balken von 0,2 specifischem Gewichte erhalten, damit ein Mensch von 65 Kilogramm Gewicht und 1,5 specifischem Gewichte mit dem Holze im Wasser gerade schwebe?

$$\frac{x}{0{,}2} + \frac{65}{1{,}5} = x + 65$$

$$x = 5{,}416 \text{ Kilogramm.}$$

10. Wie groß ist das wahre Gewicht von 50 Kilogramm Messing, das durch eiserne Gewichte bei 0° C. und 760^{mm} Barometerstand bestimmt wurde?

1 Kubikmeter Luft = 1,29318 Kilogramm,
1 „ Eisen = 7700 Kilogramm,
1 „ Messing = 8500 Kilogramm.

$$G_1 = G_2 \frac{1 - \frac{\gamma}{\gamma_2}}{1 - \frac{\gamma}{\gamma_1}} = 50 \frac{1 - \frac{1{,}29318}{7700}}{1 - \frac{1{,}29318}{8500}} = 49{,}99915 \text{ Kilogramm.}$$

11. Ein schwimmender Körper hat ein Volumen von 0,062 Kubikmeter und taucht mit $^3/_4$ seines Volumens in Wasser. Welches Gewicht hat der Körper?

46,25 Kilogramm.

12. Wie tief sinkt ein Würfel aus Eisen vom specifischen Gewichte 7,7, dessen Kante gleich 0,046^m ist, in Quecksilber vom specifischen Gewichte 13,6?

$$0{,}046^2 . x . 13{,}6 = 0{,}046^3 . 7{,}7$$
$$x = 0{,}026^{\mathrm{m}}.$$

13. Ein hohler, oben offener Würfel aus Blei vom specifischen Gewichte 11,25, dessen äußere Kante $= 0{,}092^{\mathrm{m}}$ ist, sinkt bis auf die Hälfte seiner Höhe in Salpetersäure vom specifischen Gewichte 1,522 ein. Wie stark sind die Wände des Gefäßes?

$$[0{,}092^3 - (0{,}092 - 2x)^2 (0{,}092 - x)] \, 11{,}25 = {}^1/_2 . 0{,}092^3 . 1{,}522$$
$$x = 0{,}0013^{\mathrm{m}} \text{ circa.}$$

14. Welchen äußeren Durchmesser muß ein von allen Seiten geschlossener hohler Cylinder aus Kupfer vom specifischen Gewichte 8,75 erhalten, wenn derselbe bei einer Höhe von $0{,}94^{\mathrm{m}}$ und einer Wandstärke von $0{,}013^{\mathrm{m}}$ in Wasser $0{,}63^{\mathrm{m}}$ einsinken soll?

$$[x^2 . 0{,}94 - (x - 0{,}026)^2 . 0{,}914] \, 8{,}75 = x^2 . 0{,}63$$
$$x = 1{,}018^{\mathrm{m}},$$

der Durchmesser also

$$= 2{,}036^{\mathrm{m}}$$

15. Es soll eine hohle eiserne Kugel von 7,7 specifischem und 25 Kilogramm absolutem Gewichte angefertigt werden, die bis auf die Hälfte in Wasser eintaucht. Wie groß sind die beiden Halbmesser der Kugel zu wählen?

$$25 = \frac{2}{3} \pi r_1^3 . 1000$$

$$25 = \frac{4}{3} \pi (r_1^3 - r_2^3) . 7{,}7 . 1000$$

$$r_1 = 0{,}2285^{\mathrm{m}}$$
$$r_2 = 0{,}2235^{\mathrm{m}}.$$

16. Wie groß ist die Eintauchungstiefe in Wasser bei einer hölzernen Kugel, die 15 Kilogramm wiegt und das specifische Gewicht 0,8 hat?

$$\frac{4}{3} \pi r^3 . 0{,}8 . 1000 = 15, \text{ d. h. } r = 0{,}16481^{\mathrm{m}}$$

$$\frac{\pi}{3} h^2 (3r - h) . 1000 = 15, \text{ d. h. } h^3 - 0{,}494 h^2 + 0{,}0143 = 0$$
$$h = 0{,}236^{\mathrm{m}}.$$

17. Wie groß ist die Eintauchungstiefe in Wasser bei einem Holzcylinder von $0{,}523^{\mathrm{m}}$ Durchmesser und dem specifischen Gewichte 0,3?

Es sei α der zum eingetauchten Cylinderabschnitt gehörige Centriwinkel, l die Länge, r der Halbmesser, x die Eintauchungstiefe und ε das specifische Gewicht des Cylinders. Für diese Annahmen ist:

$$({}^1/_2 r^2 \alpha - {}^1/_2 r^2 \sin\alpha) \, l \gamma = \pi r^2 l \varepsilon \gamma$$

und

$$x = r\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$= 2\,r \sin\frac{\alpha^2}{4}.$$

Aus der ersten Gleichung muß α durch Probiren bestimmt werden, und der auf diese Weise erhaltene Werth wird dann zur Berechnung von x der zweiten Gleichung gemäß benutzt. Für die in der Aufgabe angegebenen numerischen Werthe ist:

$$\alpha - \sin\alpha - 1{,}885 = 0.$$

Für $\alpha = 140^0$ ist $f_\alpha = -\,0{,}08433$.

„ $\alpha = 145^0$ „ $f_\alpha = +\,0{,}07215$. Der wahre Werth von α ist hiernach $140 + \beta$, unter β eine noch zu bestimmende Größe verstanden. Nach der regula falsi ist:

$$\frac{0{,}08433}{0{,}07215} = \frac{\beta}{5 - \beta}$$

oder

$$\frac{0{,}15648}{0{,}08433} = \frac{5}{\beta},\ \text{d. h. } \beta = \frac{5\,.\,0{,}08433}{0{,}15648} = 2{,}69^0,$$

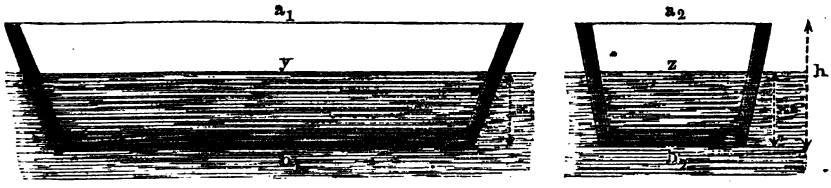
daher ist genauer $\alpha = 142^0\,41'\,2{,}4''$.

Wir gehen nun zur Bestimmung der Eintauchungstiefe x

$$x = 2\,r \sin\frac{\alpha^2}{4} = 0{,}523\,.\,(\sin 35^0\,40'\,15{,}6'')^2 = 0{,}17784^{\mathrm{m}}.$$

18. Es sei die Eintauchungstiefe x für einen Prahm zu bestimmen, dessen normale Querschnitte Paralleltrapeze sind (Fig. 46). Das Gewicht des

Fig. 46.



Schiffes sei G, die vorhandene Belastung P und die Abmessungen der Paralleltrapeze seien a_1, b_1, a_2, b_2 und h.

Beträgt das von dem Schiffe verdrängte Wasser V Kubikmeter, so ist die Bedingungsgleichung für das Schwimmen:

$$G + P = V\gamma$$
$$V = {}^1/_2\,b_2\,x\,\frac{2\,b_1 + y}{3} + {}^1/_2\,z\,x\,\frac{2\,y + b_1}{3}$$
$$y = \frac{a_1\,x + b_1\,(h - x)}{h}$$
$$z = \frac{a_2\,x + b_2\,(h - x)}{h}$$

$$V = \frac{x}{6h^2}[6b_1b_2h^2 + 3hx(a_1b_2 - 2b_1b_2 + a_2b_1) + 2x^2(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)].$$

Zur Bestimmung der Eintauchungstiefe x dient daher die Gleichung:

$$2x^3(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) + 3hx^2(a_1b_2 - 2b_1b_2 + a_2b_1) + 6b_1b_2h^2x = \frac{6h^2(G+P)}{\gamma}.$$

Die Gleichung dient zugleich dazu, bei gegebener Tiefe x die Belastung P des Schiffes zu berechnen. Die Rechnung stellt sich viel einfacher, wenn man in dem kleineren Querschnitte annähernd $a_2 = b_2 = a$ setzt. Die für diese Annahme zu Grunde liegende Gleichung ist:

$$x^2(a_1 - b_1) + 2b_1hx = \frac{2h}{a\gamma}(G + P).$$

19. Ein Schiff aus Eichenholz von der in der vorigen Nummer angegebenen Form habe eine Höhe von $0{,}63^m$ und die nothwendigen Abmessungen seien:

$$a_1 = 3{,}14^m,\ b_1 = 2{,}51^m,\ a_2 = 0{,}63^m,\ b_2 = 0{,}47^m.$$

Die Stärke der Wände und Boden betrage $0{,}0262^m$. Welche Belastung kann das Schiff tragen, wenn dasselbe bis auf die Hälfte einsinken darf?

Das Gewicht G des Schiffes ist $= K\gamma_1$, unter K den Inhalt des Schiffskörpers und γ_1 das Gewicht von 1 Kubikmeter des benutzten Materials verstanden. Es ist aber, mit d die Wandstärke bezeichnet,

$$K = \frac{h}{6}[b_2(2b_1 + a_1) + a_2(2a_1 + b_1)] - \frac{h-d}{6}\Big[(b_2 - 2d)[2(b_1 - 2d) + a_1 - 2d] + (a_2 - 2d)[2(a_1 - 2d) + b_1 - 2d]\Big]$$

$$= 0{,}146052 \text{ Kubikmeter},$$

$$G = 0{,}146052 \cdot 700 = 102{,}24 \text{ Kilogramm}.$$

Benutzen wir zur Bestimmung der Belastung P die erste Gleichung, so erhalten wir

$$\frac{102{,}24 + P}{1000} \cdot 6 \cdot 0{,}63^2 = 2\left(\frac{0{,}63}{2}\right)^3 \cdot 0{,}63 \cdot 0{,}16 + 3 \cdot 0{,}63\left(\frac{0{,}63}{2}\right)^2 0{,}6977 + 6 \cdot 0{,}63^2 \frac{0{,}63}{2} \cdot 1{,}1797,$$

und $$P = 327 \text{ Kilogramm}.$$

Bei Anwendung der zweiten Formel ist $a_2 = b_2 = a = \frac{0{,}63 + 0{,}47}{2}$

$= 0{,}55^m$

$$(102{,}24 + P)\frac{2 \cdot 0{,}63}{0{,}55 \cdot 1000} = \left(\frac{0{,}63}{2}\right)^2 \cdot 0{,}63 + 2 \cdot 2{,}51 \cdot \frac{0{,}63^2}{2},$$

und $$P = 360 \text{ Kilogramm}.$$

20. Wie groß ist die Eintauchungstiefe bei demselben Gefäße, wenn die Belastung außer dem eigenen Gewichte 500 Kilogramm betragen soll?

a. Nach der ersten Formel:

$$x^3 + 6{,}54\,x^2 + 13{,}935\,x - 7{,}114 = 0.$$

Für $x = 0{,}42^m$ ist $fx = -0{,}034$

„ $x = 0{,}43^m$ ist $fx = +0{,}166.$

Nach der regula falsi ist daher

$$\frac{0{,}034}{0{,}166} = \frac{x_1}{0{,}01 - x_1} \text{ oder } \frac{0{,}200}{0{,}034} = \frac{0{,}01}{x_1},$$

daher $x_1 = 0{,}0017$ und $x = 0{,}4217^m$.

b. Nach der zweiten Formel:

$$x^2 + 5{,}02\,x - 2{,}19 = 0$$
$$x = 0{,}40^m.$$

21. Auf welche Höhe steigt ein Luftballon, der, mit Wasserstoffgas gefüllt, eine Kugel von $12{,}55^m$ Durchmesser bildet, wenn das Gewicht des ganzen Ballons mit Schiff und Belastung 300 Kilogramm beträgt?

Das specifische Gewicht des Wasserstoffgases ist 0,08957 Kilogramm, das der Luft, an der Stelle wo das Steigen ein Ende hat sei γ_1, während dieselbe am Erdboden das specifische Gewicht gleich 1,29318 Kilogramm hat. Für diese Annahme ist

$$4/3\,\pi \left(\frac{12{,}55}{2}\right)^3 . \gamma_1 = 4/3\,\pi \left(\frac{12{,}55}{2}\right)^3 . 0{,}08957 + 300$$

$$\gamma_1 = 0{,}08957 + \frac{300 . 3 . 8}{4 . \pi . 12{,}55^3} = 0{,}3794 \text{ Kilogramm.}$$

Die Steighöhe x findet sich nach §. 10 aus der Gleichung

$$x = 2{,}3026\,c\,log\,\frac{q}{p},$$

worin $\frac{q}{p} = \frac{1{,}29318}{0{,}3794}$ gesetzt werden kann. Der constante Factor $2{,}3026\,c$ ist mit Rücksicht auf den in §. 4 angegebenen Werth von $c = 7991{,}2$ zu berechnen. Nach diesen Substitutionen ist

$$x = 2{,}3026 . 7991{,}2\,log\,\frac{1{,}29318}{0{,}3794} = 9798{,}8^m.$$

22. Welchen Durchmesser muß ein mit Wasserstoffgas gefüllter Ballon erhalten, wenn man eine Höhe von 6600^m erreichen will? Das Gewicht des Luftschiffes mit Zubehör sei 170 Kilogramm.

$$6600 = 2{,}3026 . 7991{,}2\,log\,\frac{1{,}29318}{\gamma_1}$$
$$\gamma_1 = 0{,}5662 \text{ Kilogramm.}$$

Weiter ist unter d der Durchmesser des Ballons verstanden:

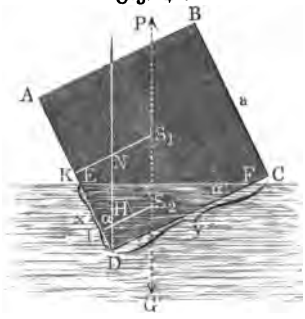
$$0{,}5662 = 0{,}08957 + \frac{170.3.8}{4.\pi.d^3}$$

$$d = 8{,}861^{m}.$$

23. Es sollen die verschiedenartigen Schwimmlagen eines normalen vierseitigen Prismas bestimmt werden, dessen Querschnitt ein Quadrat ist.

a. Es mag eine Kante innerhalb des Wassers liegen (Fig. 41).

Fig. 47.



Es stelle $ABCD$ den normalen Querschnitt von der Seite a vor, EF sei für die angenommene Lage die Schwimmebene, S_1 der Schwerpunkt des Querschnittes und S_2 der Angriffspunkt des Auftriebes. Die Bedingung des Schwimmens entsteht durch Gleichsetzung des Körpergewichtes G und des Auftriebes P. Bezeichnen wir die Länge des Körpers mit l, sein specifisches Gewicht mit ε, und die eingetauchten Seiten mit x und y, so ist das Gewicht des Körpers $G = a^2 l \varepsilon 1000$, der Auftrieb $P = {}^1/_2 x y l 1000$.

Als Bestimmungsgleichung für x und y haben wir daher:

$$\text{I.} \quad a^2 \varepsilon = {}^1/_2 x y.$$

Die Bedingung des Schwimmens erfordert andererseits, daß die Verbindungslinie $S_1 S_2$ normal zur Schwimmebene EF gerichtet sei. Ziehen wir daher durch D eine Normale zu EF und von S_1 und S_2 Normalen zur Seite DA, so muß

$$S_1 N = S_2 H$$

sein.

$$S_1 N = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \, tang \, \alpha$$

$$S_2 H = {}^1/_3 y - {}^1/_3 x \, tang \, \alpha,$$

wenn α den Winkel EFD bezeichnet. Der obigen Bedingung gemäß ist nun:

$$\frac{a}{2}(1 - tang \, \alpha) = {}^1/_3 (y - x \, tang \, \alpha),$$

oder, $tang \, \alpha = \frac{x}{y}$ gesetzt,

$$\frac{a}{2}\left(1 - \frac{x}{y}\right) = {}^1/_3 \left(y - \frac{x^2}{y}\right)$$

$${}^3/_2 a (y - x) = y^2 - x^2,$$

oder

$$\text{II.} \quad (y - x)({}^3/_2 a - y - x) = 0.$$

Aus dieser zweiten Gleichung folgt:

$$y - x = 0$$

und

$$^3/_2\, a - y - x = 0,$$

was in Verbindung mit Gleichung I. die verschiedenen Werthe von x und y für die möglichen Schwimmlagen liefert. Wir erhalten hierbei:

1. $x = y = a\sqrt{2\varepsilon}.$

2. $$\begin{cases} x = \frac{a}{4}(3 - \sqrt{9 - 32\varepsilon}). \\ y = \frac{a}{4}(3 + \sqrt{9 - 32\varepsilon}). \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x = \frac{a}{4}(3 + \sqrt{9 - 32\varepsilon}). \\ y = \frac{a}{4}(3 - \sqrt{9 - 32\varepsilon}). \end{cases}$$

Die beiden letzten der drei möglichen Schwimmlagen bestehen, so lange x und y nicht imaginär werden, so lange also

$$9 - 32\,\varepsilon \text{ positiv}$$

oder

$$\varepsilon < \frac{9}{32}$$

$$\varepsilon < 0{,}28125$$

ist. Für $\varepsilon = 0{,}28125$ bleibt nur die erste Schwimmlage, wofür $x = y = a\sqrt{2\varepsilon}$ ist, übrig.

Nehmen wir an, daß der Körper aus Korkholz besteht, dessen specifisches Gewicht 0,27 sein mag, so ist für die erste Schwimmlage:

$$x = y = 0{,}7348\,a;$$

für die zweite Schwimmlage:

$$x = 0{,}6\,a$$
$$y = 0{,}9\,a;$$

für die dritte Schwimmlage:

$$x = 0{,}9\,a$$
$$y = 0{,}6\,a.$$

Es ist jetzt noch zu untersuchen, welche der drei möglichen Schwimmlagen eine stabile ist. Nach §. 22 hängt die Stabilität von dem Ausdrucke $\frac{J}{V} \pm e$ ab, der für ein stabiles Gleichgewicht positiv ausfallen muß. In unserem Falle liegt der Schwerpunkt S_1 höher als der Angriffspunkt S_2 des Auftriebes, weshalb der Werth von $\frac{J}{V} - e$ die Stabilität bestimmt.

Es ist

$$S_1 S_2 = e = \frac{KL}{\cos \alpha}$$

$$e = \frac{\frac{a}{2} - \frac{x}{3}}{\cos \alpha}$$

$$= \frac{3a - 2x}{6 . \cos \alpha}$$

$$e = \frac{(3a - 2x)\sqrt{x^2 + y^2}}{6y}$$

$$\frac{J}{V} = \frac{{}^1/_{12}\, l (\sqrt{x^2 + y^2})^3 + l\sqrt{x^2 + y^2}\left({}^1/_6 \frac{y^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2}{{}^1/_2 xyl}$$

$$= {}^1/_{18} \frac{3(x^2 + y^2)^2 + (y^2 - x^2)^2}{xy . \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Substituiren wir in diesen Ausdrücken die für x und y gefundenen Werthe, so erhalten wir für die erste Schwimmlage:

$$e = \frac{(3 - 2 . 0{,}7348) . \sqrt{2}}{6} a$$

$$e = 0{,}36062\, a$$

$$\frac{J}{V} = {}^1/_{18} \frac{3 . 4 . 0{,}7348^4}{0{,}7348^2 . 0{,}7348 . \sqrt{2}} a$$

$$= 0{,}34634\, a.$$

Hiernach ist $\frac{J}{V} - e$ negativ, die Schwimmlage daher eine labile.

Für die zweite und dritte Schwimmlage:

$$e = \frac{(3 - 2 . 0{,}6)\sqrt{0{,}6^2 + 0{,}9^2}}{6 . 0{,}9} a$$

$$= 0{,}36056\, a$$

$$\frac{J}{V} = {}^1/_{18} \frac{3(0{,}6^2 + 0{,}9^2)^2 + (0{,}9^2 - 0{,}6^2)^2}{0{,}9 . 0{,}6 . \sqrt{0{,}9^2 + 0{,}6^2}} a$$

$$= 0{,}40986\, a.$$

Hiernach ist $\frac{J}{V} - e$ positiv, die beiden letzten Schwimmlagen sind daher stabile.

b. Zwei Kanten des Körpers mögen im Wasser liegen (Fig. 48).

Zur Bestimmung der eingetauchten Theile x und y der Seite a haben wir:

$$^1/_2\, a\,(x + y) = a^2\,\varepsilon$$

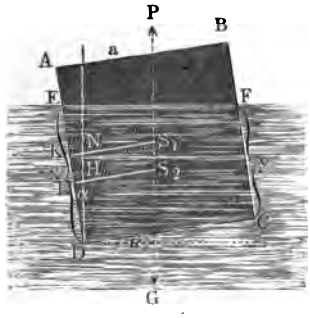
und

$$S_1 N = S_2 H$$

$$S_1 K - NK = S_2 L - HL$$

$$\frac{a}{2} - \frac{a}{2}\, tang\, \alpha = \frac{x + 2y}{x + y} \cdot \frac{a}{3} - {}^1/_3 \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y}\, tang\, \alpha$$

Fig. 48.



(nach §. 42b, Thl. I, und Aufgabe 10 der Uebungen des zweiten Capitels, Thl. I).

Außerdem ist $tang.\, \alpha = \frac{x - y}{a}$,

daher sind die zur Entwickelung von x und y nothwendigen Gleichungen:

$$\text{I.}\quad x + y = 2a\varepsilon.$$

$$\text{II.}\quad (x - y)\,[a^2 - 3a\,(x + y) + 2\,(x^2 + xy + y^2)] = 0.$$

Hieraus ergeben sich für die verschiedenen Schwimmlagen folgende Werthe für x und y, wenn man

$x - y = 0$ und $a^2 - 3a\,(x + y) + 2\,(x^2 + xy + y^2) = 0$ setzt:

1. $x = y = a\varepsilon$

2. $\begin{cases} x = a\,(\varepsilon + \sqrt{3\varepsilon\,(1 - \varepsilon) - {}^1/_2}) \\ y = a\,(\varepsilon - \sqrt{3\varepsilon\,(1 - \varepsilon) - {}^1/_2}) \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = a\,(\varepsilon - \sqrt{3\varepsilon\,(1 - \varepsilon) - {}^1/_2}) \\ y = a\,(\varepsilon + \sqrt{3\varepsilon\,(1 - \varepsilon) - {}^1/_3}). \end{cases}$

Die beiden letzten der drei möglichen Schwimmlagen werden unmöglich, sobald x und y imaginär werden, d. h. sobald $3\varepsilon\,(1 - \varepsilon) - {}^1/_2 < 0$ ist.

Die Bedingung für die drei Schwimmlagen ist hiernach:

$$3\varepsilon\,(1 - \varepsilon) - {}^1/_2 > 0$$

$$\varepsilon < 0{,}5 + 0{,}2887 \text{ und } > 0{,}5 - 0{,}2887,$$

d. h.:

$$0{,}2113 < \varepsilon < 0{,}7887.$$

Für $\varepsilon = 0{,}2113$ oder $= 0{,}7887$ reduciren sich die drei Schwimmlagen auf die erste, wo $x = y = a\varepsilon$ ist. Der Körper bestehe aus Eichenholz vom specifischen Gewichte 0,76, so ist für die erste Schwimmlage:

$$x = y = 0{,}76\, a,$$

für die zweite Schwimmlage:

$$x = 0{,}977\, a$$

$$y = 0{,}543\, a,$$

für die dritte Schwimmlage:

$$x = 0{,}543\,a$$
$$y = 0{,}977\,a.$$

Die nächste Untersuchung bezieht sich auf die Stabilität der drei möglichen Schwimmlagen. Es ist

$$S_1 S_2 = e = NH \text{ und } NH\cos\alpha = KL = DK - DL$$

$$NH\cos\alpha = \frac{a}{2} - {}^1/_3\,\frac{x^2 + xy + y^2}{x + y}$$

$$NH\,\frac{a}{\sqrt{a^2 + (x-y)^2}} = \frac{a}{2} - {}^1/_3\,\frac{x^2 + xy + y^2}{x + y}$$

$$NH \text{ oder } e = {}^1/_2\sqrt{a^2 + (x-y)^2} - \frac{1}{3\,a}\cdot\frac{x^2 + xy + y^2}{x + y}\cdot\sqrt{a^2 + (x-y)^2}$$

$$\frac{J}{V} = \frac{{}^1/_{12}\left(\sqrt{a^2 + (x-y)^2}\right)^3 + \sqrt{a^2 + (x-y)^2}\cdot\left(\frac{x - a + y}{2}\cdot\frac{x-y}{\sqrt{a^2 + (x-y)^2}}\right)^2}{{}^1/_2\,(x+y)\,a}$$

$$= {}^1/_6\,\frac{[a^2 + (x-y)^2]^2 + 3\,(x - a + y)^2\,(x-y)^2}{a\,(x+y)\,\sqrt{a^2 + (x-y)^2}}.$$

Hieraus erhalten wir nach Substitution der für x und y gefundenen Werthe für die erste Schwimmlage:

$$e = \frac{a}{2} - \frac{x}{2}$$
$$= \frac{a}{2} - \frac{0{,}76\,a}{2}$$
$$= 0{,}12\,.\,a$$
$$\frac{J}{V} = {}^1/_6\,\frac{a^4}{a^2\,.\,2\,x}$$
$$= 0{,}1096\,a.$$

Hiernach ist $\frac{J}{V} - e$ negativ, die Schwimmlage daher eine labile.

Für die zweite Schwimmlage ist:

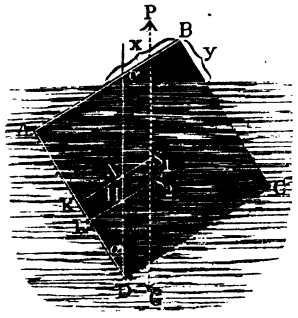
$$e = {}^1/_2\sqrt{a^2 + 0{,}434^2\,.\,a^2}$$
$$- {}^1/_3\,\frac{0{,}977^2 + 0{,}977\,.\,0{,}543 + 0{,}543^2}{1{,}520}\cdot\sqrt{a^2 + 0{,}434^2\,.\,a^2}$$
$$= \frac{a}{6}\sqrt{1{,}188356}\cdot\frac{1{,}000222}{1{,}520}$$
$$= 0{,}11955\,a.$$

$$\frac{J}{V} = {}^1/_6 \frac{a^4 . 1{,}188356^2 + 3 . a^4 . 0{,}520^2 . 0{,}434^2}{a^3 . 1{,}520 . \sqrt{1{,}188356}}$$

$$= \frac{a}{6} \cdot \frac{1{,}56484}{1{,}520\ \sqrt{1{,}188356}}$$

$$= 0{,}15741\, a.$$

Fig. 49.



Hiernach ist $\frac{J}{V} - e$ positiv, die zweite Schwimmlage und ebenso auch die dritte eine stabile.

c. Es mögen drei Kanten des Körpers im Wasser liegen (Fig. 49).

Zur Bestimmung von x und y haben wir die Gleichungen:

$$a^2 - {}^1/_2\, xy = a^2 \varepsilon,$$

d. h.:

$$\text{I.} \quad xy = 2a^2 (1 - \varepsilon),$$

wenn x und y die aus dem Wasser herausragenden Theile der Seite a bezeichnen. Als zweite Bedingung ist

$$S_1 N = S_2 H$$

$$S_1 N = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \cdot tang\, \alpha$$

$$= \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \cdot \frac{y}{x}$$

$$S_2 H = S_2 L - HL$$

$$= \frac{a^2 \frac{a}{2} - \frac{xy}{2}(a - x + {}^2/_3\, x)}{a^2 - {}^1/_2\, xy} - DL . tang\, \alpha$$

$$= \frac{3a^3 - xy(3a - x)}{6a^2 - 3xy} - \frac{a^2 \frac{a}{2} - \frac{xy}{2}(a - y + {}^2/_3 y)}{a^2 - {}^1/_2\, xy} \cdot \frac{y}{x}$$

$$= \frac{3a - 2(1 - \varepsilon)(3a - x)}{6\varepsilon} - \frac{3a - 2(1 - \varepsilon)(3a - y)}{6\varepsilon} \cdot \frac{y}{x}.$$

Daher ist:

$$\frac{a}{2} - \frac{a}{2} \cdot \frac{y}{x} = \frac{3a - 2(1 - \varepsilon)(3a - x)}{6\varepsilon} - \frac{3a - 2(1 - \varepsilon)(3a - y)}{6\varepsilon} \cdot \frac{y}{x}.$$

$$\text{II.} \quad (x - y)({}^3/_2 a - x - y) = 0,$$

d. h. diese dritte Schwimmlage geht aus der zuerst behandelten hervor, wenn wir statt ε, $1 - \varepsilon$ setzen.

Aus den beiden Grundgleichungen ergeben sich für die verschiedenen

Schwimmlagen folgende Werthe für x und y, wenn man $x - y = 0$ und $^3/_2 a - x - y = 0$ setzt:

$$1.\quad x = y = a\sqrt{2\,(1-\varepsilon)}$$

$$2.\quad \begin{cases} x = \frac{a}{4}\left(3 + \sqrt{9 - 32\,(1-\varepsilon)}\right) \\ y = \frac{a}{4}\left(3 - \sqrt{9 - 32\,(1-\varepsilon)}\right) \end{cases}$$

$$3.\quad \begin{cases} x = \frac{a}{4}\left(3 - \sqrt{9 - 32\,(1-\varepsilon)}\right) \\ y = \frac{a}{4}\left(3 + \sqrt{9 - 32\,(1-\varepsilon)}\right). \end{cases}$$

Die beiden letzten Schwimmlagen bestehen, so lange x und y nicht imaginär werden, so lange also $9 - 32\,(1-\varepsilon)$ positiv bleibt:

$$9 - 32 + 32\,\varepsilon > 0$$
$$32\,\varepsilon - 23 > 0$$
$$\varepsilon > \frac{23}{32}$$
$$\varepsilon > 0{,}719.$$

Für $\varepsilon = \frac{23}{32}$ bleibt nur die erste Schwimmlage möglich für

$$x = y = a\sqrt{2\,(1-\varepsilon)}.$$

Der Körper mag aus Eichenholz bestehen und das specifische Gewicht 0,74 haben. Hiernach erhalten wir für die erste Schwimmlage:

$$x = y = 0{,}7211\,a,$$

für die zweite Schwimmlage:

$$x = 0{,}9561\,a$$
$$y = 0{,}5438\,a,$$

für die dritte Schwimmlage:

$$x = 0{,}5438\,a$$
$$y = 0{,}9561\,a.$$

Die nächste Untersuchung bezieht sich auf die Stabilität der Schwimmlagen. Es ist:

$$S_1 S_2 = e = NH = KL \cdot \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$e = \left(\frac{a}{2} - \frac{3a^3 - xy\,(3a - y)}{6a^2 - 3xy}\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

$$= \frac{1-\varepsilon}{6\varepsilon} \cdot (3a - 2y) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

$$\frac{J}{V} = \frac{{}^1/_{12}\,(\sqrt{x^2+y^2})^3 . l + l . \sqrt{x^2+y^2} \cdot \left(\frac{x-a+y}{2} \cdot \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}{(a^2 - {}^1/_2 xy)\, l}$$

$$= {}^1/_{12} \frac{(x^2+y^2)^2 + 3\,(x-y)^2\,(x-a+y)^2}{a^2 \varepsilon \sqrt{x^2+y^2}} .$$

Hieraus erhalten wir nach Subſtitution der für x und y gefundenen Werthe für die erſte Schwimmlage:

$$e = \frac{1 - 0{,}74}{6 . 0{,}74} \cdot (3a - 2 . 0{,}7211\, a)\sqrt{2}$$

$$= 0{,}129008\, a$$

$$\frac{J}{V} = {}^1/_{12} \frac{4 . 0{,}7211^4 . a^4}{a^2 . 0{,}74 . 0{,}7211 . a . \sqrt{2}}$$

$$= {}^1/_{12} \frac{4 . 0{,}7211^3}{0{,}74 . \sqrt{2}}\, a$$

$$= 0{,}11943\, a.$$

Hiernach iſt $\frac{J}{V} - e$ negativ, die Schwimmlage daher eine labile.

Für die zweite und dritte Schwimmlage:

$$e = \frac{1 - 0{,}74}{6 . 0{,}74} \cdot (3 - 2 . 0{,}5438) \frac{\sqrt{0{,}9561^2 + 0{,}5438^2}}{0{,}9561} \cdot a$$

$$e = 0{,}12883\, a$$

$$\frac{J}{V} = {}^1/_{12} \frac{(0{,}9561^2 + 0{,}5438^2)^2 + 3 . 0{,}4123^2 . 0{,}4999^2}{0{,}74 . \sqrt{0{,}9561^2 + 0{,}5438^2}} . a$$

$$= \frac{1{,}4637 + 0{,}12744}{12 . 0{,}74 . 1{,}0999}\, a$$

$$= \frac{1{,}5912}{12 . 0{,}74 . 1{,}0999}\, a$$

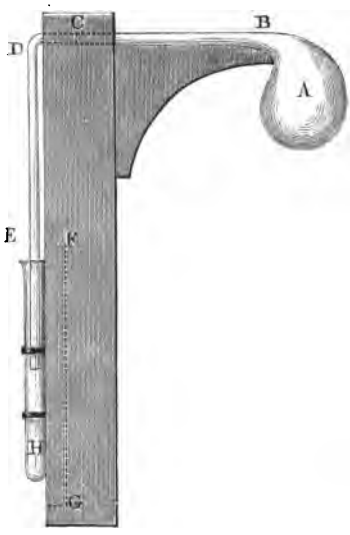
$$= 0{,}16291\, a.$$

Es iſt hierbei $\frac{J}{V} - e$ poſitiv, daher ſind die beiden letzten Schwimmlagen ſtabile.

24. Das von Schinz vorgeſchlagene Lufthermometer (Fig. 50) wird benutzt, um mit Hülfe der Formel 11 hohe Temperaturen zu berechnen. Das Inſtrument beſteht aus dem Gefäße A mit der daran befindlichen Röhre BC. Für Temperaturen, die der Glühhitze noch nicht entſprechen, kann das Gefäß aus Glas, für ſehr hohe Temperaturen muß es dagegen aus Platin hergeſtellt werden. Bei C wird eine Glasröhre CDE feſt eingekittet und der ganze Apparat iſt, wie es die Figur anzeigt, an dem Stativ befeſtigt. Ein im Sta-

tiv verschiebbarer Theil FG trägt die oben becherartig erweiterte, 0,0065^m weite Glasröhre H, die beim Heraufschieben die Röhre CDE umschließt. Ehe mit dem Apparate gearbeitet werden kann, muß der Inhalt des Gefäßes A, der Röhren BC, CD und DE ganz genau bestimmt werden. Zu dem Ende füllt man z. B. bei 15° C. das Gefäß A und die Röhren BC und CD vollständig mit Quecksilber, das 2,9 Kilogramm wiegen mag. Nehmen wir die specifische Gewichtszahl des Quecksilbers bei 15° C. = 13,6, so wiegt 1 Kubikmeter Quecksilber 13600 Kilogramm.

Fig. 50.



Auf 2,9 Kilogramm Quecksilbergewicht kommen deshalb

$$\frac{2,9}{13600} = 0,0002132 \text{ Kubikm.},$$

was also den Inhalt des Gefäßes A mit den Röhren BC und CD ausmacht. In gleicher Weise fülle man die Röhre DE mit Quecksilber, welches 0,1 Kilogramm wiegen mag, was einem Inhalte der Röhre DE von $\frac{0,1}{13600} = 0,000007352$ Kubikmeter entspricht. Hiernach verhält sich der Raum der Röhre DE zu dem Raume des Gefäßes A mit den Röhren BC und CD wie 30 zu 870, und das Volumen der Röhre DE ist von dem des ganzen Apparates $\frac{30}{900}$.

Theilen wir daher die Länge der Röhre DE an dem Stativ in 300 gleiche Theile, so ist die Entfernung zweier Theilstriche $= \frac{1}{9000}$ von dem Inhalte des ganzen Apparates. Um das Instrument nun zu Temperaturbestimmungen zu benutzen, wird es mit einer solchen Scala versehen, und dafür gesorgt, daß der ganze Apparat mit trockner Luft angefüllt ist. Der Zutritt der äußeren Luft in den Apparat wird durch Quecksilber gesperrt, das sich in der verschiebbaren Röhre H befindet. Soll mit dem Apparate gearbeitet werden, so wird das Instrument, in der angegebenen Weise vorbereitet, in den Raum gebracht, wo die Temperatur gemessen werden soll, und nun die Röhre H vom Instrumente weggezogen. Die Wärme dehnt die im Apparate enthaltene Luft aus, weshalb ein Theil derselben entweichen muß. Um die Größe der im Apparate fehlenden Luftmenge zu finden, nachdem derselbe die in dem Raume vorhandene und zu bestimmende Temperatur t angenommen, nehme man das Instrument heraus und bringe die mit Quecksilber gefüllte Röhre H wieder

mit dem unteren Ende E der Röhre DE in Verbindung, so daß die äußere Luft dadurch abgesperrt wird. Sobald die Abkühlung des Instrumentes erfolgt, wird das Queckſilber aus der Röhre H in die Röhre ED ſteigen, da ſich jetzt eine geringere Luftmaſſe als vor der Erwärmung in dem Apparate befindet, und aus der Länge der geſtiegenen Queckſilberſäule, die man an der vorhandenen Scala ablieſt, wird ſich die bei der Temperatur t entwichene Luftmenge berechnen laſſen. Sobald der Apparat wieder die äußere Temperatur von 15°C. erlangt hat, mag die Queckſilberſäule eine Länge von n Theilſtrichentfernungen an der Scala einnehmen. Wird der Inhalt des ganzen Inſtrumentes gleich V geſetzt, ſo iſt der Raum, den die jetzt noch vorhandene Luft einnimmt:

$$V - \frac{n}{9000} V.$$

Dieſe ſteht jedoch nicht unter dem normalen Barometerſtande von 760mm, ſondern unter dem um die Länge von n Theilſtrichentfernungen der Scala verminderten Barometerſtande. Nehmen wir nun die Länge der Röhre DE zu 786mm an, ſo ſind n Theilſtrichentfernungen $\frac{786 . n}{300} = 2{,}62\ n^{mm}$, der Barometerſtand daher

$$(760 - 2{,}62n)^{mm},$$

welchem das oben berechnete Volumen $V - \frac{n}{9000} V$ entſpricht. Bringen wir daſſelbe mittelſt des Geſetzes von Mariotte auf das Volumen V' für 760mm Barometerſtand, ſo erhalten wir:

$$760 : 760 - 2{,}62n = V\left(1 - \frac{n}{9000}\right) : V'$$

$$V' = \frac{760 - 2{,}62\,n}{760} \cdot \left(1 - \frac{n}{9000}\right) V.$$

Dieſe bei 15° vorhandene Luftmaſſe V' füllte, als das Inſtrument die Temperatur t hatte, den ganzen Apparat an, dehnte ſich alſo bis auf das Volumen V aus, deshalb haben wir n. §. 11

$$\frac{V}{V'} = \frac{273 + t}{273 + 15}$$

$$V = \frac{273 + t}{288} \cdot \frac{760 - 2{,}62n}{760} \left(1 - \frac{n}{9000}\right) V$$

und hieraus:

$$t = \frac{760.288}{(760 - 2{,}62n)\left(1 - \frac{n}{9000}\right)} - 273.$$

Es ſei die Queckſilberſäule um 100 Theilſtriche geſtiegen, dann iſt

$$t = \frac{760.288.90}{498.89} - 273 = 444{,}46 - 273 = 171{,}46°\,C.$$

25. Ein Gewichtsaräometer hat ein Gewicht von 70 Gramm, und es seien 20 Gramm nothwendig, um das Instrument in Wasser bis zur Marke einsinken zu lassen. Wie groß ist das specifische Gewicht des Alkohols, für den das auf den Teller zu legende Gewicht 1,37 Gramm beträgt, um das Einsinken bis zu derselben Marke zu erreichen?

$$\gamma_1 = \frac{70 + 1{,}37}{70 + 20} . 1000 = 793 \text{ Kilogramm.}$$

26. Bei einem Aräometer nach Nicholson sind 100 Gramme auf dem Teller nothwendig, um das Instrument bis zur Marke in Wasser einsinken zu lassen. Legt man ein Stück Metalllegirung auf den Teller, so gebraucht man außerdem noch 33,5 Gramm, um dieselbe Einsinkung zu erreichen, und legt man diese Metalllegirung in den unteren Teller, so ist das oben aufzulegende Gewicht 41,35 Gramm, wenn das Instrument wiederum bis zur Marke einsinkt. Wie groß ist die specifische Gewichtszahl der Metalllegirung?

Absolutes Gewicht = 66,5 Gramm; Gewichtsverlust in Wasser = 7,85 Gramm.

$$\varepsilon = \frac{66{,}5}{7{,}85} = 8{,}47.$$

27. Ein Scalenaräometer wiegt 75 Gramm und steigt, wenn man seine Füllung um 31 Gramm vermindert hat in Wasser um 144^{mm}. Nachdem man das ursprüngliche Gewicht wieder hergestellt, brachte man das Instrument in eine Salzsoole in der es um 58^{mm} stieg. Wie groß ist das specifische Gewicht der Soole?

Bezeichnen wir mit V das Volumen des Instrumentes, das bei dem Gewicht von 75 Gramm in Wasser taucht, und mit F den Querschnitt des oberen Stabes, so ist

$$V\gamma = 0{,}075$$
$$(V - F.0{,}144)\,\gamma = 0{,}044,$$

daher

$$\frac{V - F.0{,}144}{V} = \frac{44}{75} \text{ und}$$
$$\frac{F}{V} = \left(1 - \frac{44}{75}\right) : 0{,}144 = \frac{31}{75.0{,}144}.$$

Nun ist aber $\gamma_1 = \gamma \dfrac{1}{1 - \frac{F}{V}x}$, unter x die Steighöhe in der Salzsoole verstanden, $\gamma_1 = \gamma \dfrac{1}{1 - \frac{31.58}{75.144}} = \frac{10800}{9002} \cdot \gamma$

$$= 1199 \text{ Kilogramm}$$

und

$$\varepsilon = 1{,}199.$$

28. Nach §. 11 wiegen 1 Kubikmeter Luft, Stickstoff, Sauerstoff, Wasserstoff 1,29318, 1,25616, 1,42980, 0,08957 Kilogramm. Wie groß sind die specifischen Gewichtszahlen dieser Luftarten, die der atmosphärischen Luft = 1 angenommen?

1; 0,97137; 1,10563; 0,06926.

29. Die Brennstoffe, welche in der Praxis zur Anwendung kommen, theilt man in natürliche und künstliche. Zu den ersteren gehören: Holz, Torf, Braunkohlen, Steinkohlen; zu den letzteren dagegen: Holzkohle, Torfkohle, Coaks und Ziegel aus Kohlen, Torf und Coaks.

Der Werth eines Brennmaterials ist

1. von seiner Transportfähigkeit, und

2. von der Fähigkeit, bei der Verbrennung eine größere oder kleinere Wärmemenge zu erzeugen, von seiner Heizkraft oder Brennkraft abhängig.

Die Heizkraft der Brennmaterialien ist gleich der Anzahl Calorien, die 1 Kilogramm desselben bei der Verbrennung entwickelt. Jedes Brennmaterial besteht aus einem organischen Grundstoffe, dem eigentlich brennbaren Theile, aus einer veränderlichen Menge von unorganischen Stoffen, die als Asche zurückbleiben und aus einer veränderlichen Menge hygroskopischen Wassers. Dieser veränderliche Wassergehalt übt aber auf die Verbrennung besonders einen wesentlichen Einfluß aus, da das Wasser bei der Verbrennung in Dampf verwandelt werden muß, wozu ein Theil der entwickelten Wärme, d. h. ein Theil des Brennstoffes, verbraucht wird. Hiernach ist einmal die aus dem Brennstoffe überhaupt zu erhaltende Wärme um so kleiner, je größer der Wassergehalt ist, andererseits aber wird die zur Verdampfung des Wassers nothwendige Wärme dem Feuer entzogen, wodurch eine schlechte Verbrennung entsteht.

Die organischen Bestandtheile bestehen aus Kohlenstoff (C), Wasserstoff (H), Sauerstoff (O) und Stickstoff (N). Als brennbare, Wärme entwickelnde Theile des Brennmaterials treten hiervon nur C und H auf, so daß von deren relativer Menge die Heizkraft des Brennmaterials abhängig ist. Für die Berechnung der Heizkraft aus den chemischen Bestandtheilen, d. h. für die Berechnung der theoretischen Heizkraft, nehmen wir an:

1. die Heizkraft einer Verbindung von C und H ist gleich der Summe der Heizkräfte des darin enthaltenen C und H;

2. der in einem Brennmaterial enthaltene Sauerstoff entweicht bei der Verbrennung nicht als solcher, sondern er geht verschiedene Verbindungen mit C und H ein. Der Sauerstoff macht es daher unmöglich, daß C und H die gesammte Heizkraft entwickeln, die sie geben müßten, wenn diese Stoffe für sich allein mit dem Sauerstoff der Luft zusammenkämen. Der im Brennmaterial enthaltene Sauerstoff vermindert deshalb die Heizkraft des Brennstoffes.

Die Verbindungen des Sauerstoffes mögen mannigfaltige sein; wir nehmen hierbei der Einfachheit wegen an, daß der Sauerstoff in dem Brennmaterial nur mit H zu Wasser verbunden ist. Das Wasser besteht aus 1 Theil

H und 8 Theilen Sauerstoff, es ist daher die Menge H, welche durch die Verbindung mit Sauerstoff in dem Brennmaterial für die Heizkraft verloren geht, gleich $^1/_8$ des vorhandenen Sauerstoffes.

Gehen wir nun zur Berechnung der theoretischen Heizkraft irgend eines Brennmaterials über und nehmen an, daß 1 Kilogramm desselben A Kilogramm Aschentheile und Stickstoff, C Kilogramm Kohlenstoff, H Kilogramm Wasserstoff, O Kilogramm Sauerstoff und W Kilogramm hygroskopisches Wasser enthalte, dann geht nach dem Obigen der Sauerstoff mit der nothwendigen Menge Wasserstoff, welche gleich $^1/_8$ des Sauerstoffgewichtes ist, die Verbindung Wasser ein, und es kommen deshalb nur (H — $^1/_8$ O) Kilogramm Wasserstoff bei der Wärmeentwicklung zur Wirksamkeit. Die Heizkraft des reinen Kohlenstoffs kann zu 7500 Calorien, die des Wasserstoffs dagegen zu 34500 Calorien angenommen werden, und die Gesammtwärme, welche zur Verdampfung von 1 Kilogramm Wasser nothwendig ist, werde annähernd gleich 650 Wärmeeinheiten gesetzt, dann ergiebt sich als theoretische Heizkraft B des Brennmaterials

$$B = C.7500 + (H - {}^1/_8 O)\,34500 - 650\,W.$$

Der auf diese Weise theoretisch bestimmte Werth der Heizkraft kann in der Wirklichkeit nicht vollkommen erreicht werden, da die bei der Berechnung gemachten Voraussetzungen selbst bei der besteingerichteten Feuerung nicht erfüllt werden. Der für die Praxis brauchbare Werth der Heizkraft eines Brennmaterials beträgt 60 bis 70 Proc. des theoretischen Werthes.

Tabelle über die Heizkraft und die chemische Zusammensetzung der Brennstoffe.

Brennstoffe.	Chemische Zusammensetzung in 1 Kilogramm.					Theoretische Heizkraft B
	C	H	O	W	A	
Holz, wasserleer	0,486	0,062	0,437	0,000	0,015	3921
Holz, lufttrocken	0,389	0,050	0,349	0,200	0,012	3030
Torf, wasserleer	0,540	0,055	0,325	0,000	0,080	4568
Torf, lufttrocken	0,432	0,044	0,260	0,200	0,064	3500
Steinkohlen	0,800	0,054	0,071	0,030	0,045	7536
Holzkohlen, trocken	0,950	0,000	0,000	0,000	0,050	7125
Gewöhnliche Holzkohlen	0,850	0,000	0,000	0,100	0,050	6310
Reiner Coaks	0,850	0,000	0,000	0,050	0,100	6343
Wasserstoffgas	—	1,000	—	—	—	34500
Kohlenoxydgas	0,430	—	0,570	—	—	3225
Sumpfgas	0,750	0,250	—	—	—	14250
Oelbildendes Gas	0,860	0,140	—	—	—	12530
Baumöl	0,772	0,134	0,094	—	—	10000
Rüböl	0,706	0,106	0,182	—	0,006	9300
Alkohol	0,520	0,130	0,350	—	—	6867
Talg	0,781	0,117	0,093	—	0,009	8000
Schwefel	—	—	—	—	—	2200
Terpentinöl	0,880	0,120	—	—	—	10740

30. Wie groß ist die theoretische Heizkraft der Steinkohle, welche in 100 Kilogramm 4,407 Kilogramm Aschentheile und Stickstoff, 83,333 Kilogramm Kohlenstoff, 4,63 Kilogramm Wasserstoff, 4,63 Kilogramm Sauerstoff und 3 Kilogramm Wasser enthält?

$$B = 7500.0{,}833 + \left(0{,}0463 - \frac{0{,}0463}{8}\right) 34500 - 650.0{,}03$$

$$= 6247{,}5 + 1397{,}3 - 19{,}5 = 7625{,}3 \text{ Wärmeeinheiten.}$$

31. Wie groß ist die theoretische Heizkraft von Holz, dessen chemische Analyse wie folgt $A = 0{,}0012$; $C = 0{,}4889$; $H = 0{,}0619$; $O = 0{,}4393$; $W = 0{,}0087$

$$B = 3902{,}6 \text{ Calorien.}$$

32. Wie viel Kilogramm Q eines Brennmaterials, dessen Heizkraft B ist, sind nothwendig, um P Kilogramm Wasser von der Temperatur t_1 in gesättigten Wasserdampf von der Temperatur t zu verwandeln?

$$Q.B = P\,(606{,}5 + 0{,}305\,t - t_1)$$

$$Q = P\frac{606{,}5 + 0{,}305\,t - t_1}{B}.$$

a) Für $t_1 = 15^0$ C.; $t = 133{,}91$; $B = 0{,}70 . 7536$ und $P = 1$ Kilogramm ist

$Q = 0{,}1198$ Kilogramm Steinkohle um 1 Kilogramm Dampf von 3 Atmosphären Spannung aus Wasser von 15^0 C. zu entwickeln.

b) Für $t_1 = 15^0$ C.; $t = 133{,}91$; $B = 0{,}70 . 7536$ und $Q = 1$ Kilogramm ist

$P = 8{,}342$ Kilogramm Wasser von 15^0 C. werden durch 1 Kilogramm Steinkohle in Dampf von 3 Atmosphären Spannung verwandelt.

33. Das Luftquantum V, welches zur Erhaltung des Brennprocesses in die Feuerung geführt werden muß, läßt sich stets aus der Menge des verbrauchten Brennmaterials bestimmen. In 1 Kilogramm Brennmaterial seien wieder C Kilogramm Kohlenstoff, H Kilogramm Wasserstoff und O Kilogramm Sauerstoff vorhanden, wobei nur $\left(H - \frac{O}{8}\right)$ Kilogramm Wasserstoff zur Verwerthung gelangen, wie oben angenommen. Bei der Verbrennung bildet sich aus dem Kohlenstoff, Kohlensäure, eine Verbindung von 16 Gewichtstheilen Sauerstoff und 6 Gewichtstheilen Kohlenstoff, und aus dem Wasserstoff wird Wasser, der aus 1 Gewichtstheil Wasserstoff und 8 Gewichtstheilen Sauerstoff besteht. Es gebrauchen hiernach C Kilogramm Kohlenstoff $\frac{16}{6} \cdot C$ Kilogramm Sauerstoff zur vollständigen Verbrennung und die $\left(H - \frac{O}{8}\right)$ Kilogramm Wasserstoff erfordern $8\left(H - \frac{O}{8}\right)$ Kilogramm Sauerstoff dazu, so daß im Ganzen $\frac{16}{6}\,C + 8\left(H - \frac{O}{8}\right)$ Kilogramm Sauerstoff zur vollständigen Verbrennung von 1 Kilogramm Brennmaterial nothwendig sind. Da die atmosphärische Luft dem Volumen nach aus 21 Theilen Sauerstoff und 79 Theilen Stickstoff, dem Gewichte nach aber aus 23 Theilen Sauerstoff und 77 Theilen Stickstoff besteht, so gehören zu den $\frac{16}{6}\,C + 8\left(H - \frac{O}{8}\right)$ Kilogramm Sauerstoff, $\frac{77}{23} \cdot \left\{\frac{16}{6}\,C + 8\left(H - \frac{O}{8}\right)\right\}$ Kilogramm Stickstoff, und es ist die zur vollkommenen Verbrennung zuzuführende Luftmenge deshalb

$$V = \frac{100}{23}\left\{\frac{16}{6}\,C + 8\left(H - \frac{O}{8}\right)\right\}$$

$$V = 11{,}59\,C + 34{,}78\left(H - \frac{O}{8}\right).$$

Für vollkommen wasserleeres Holz ist	$V =$	5,91	Kilogramm
„ lufttrockenes Holz ist	„ =	4,75	„
„ vollkommen wasserleeren Torf ist	„ =	6,78	„
„ lufttrockenen Torf ist	„ =	5,42	„
„ Steinkohlen ist	„ =	10,84	„
„ Holzkohlen und Coaks ist	„ =	9,85	„

Bei der Berechnung dieser Werthe ist die Tabelle in Aufgabe 29 zu Grunde gelegt worden, jedoch ist zu bemerken, daß bei den gewöhnlichen Kesselfeuerungen der Erfahrung zufolge die Luftmenge, welche das Verbrennen unterhält, etwa zweimal so groß ist, als die obigen kleinsten Luftmengen, welche die vollkommene Verbrennung zu bewirken vermögen.

34. Es ist die Temperatur T in dem Feuerraume zu berechnen, welche durch Verbrennung von 1 Kilogramm Brennmaterial erzeugt wird, wenn eine zweifache Luftmenge der vorigen Aufgabe gemäß zugeführt wird. Nehmen wir die Temperatur der zugeführten Luftmenge sowie des verwendeten Brennmaterials gleich $= t^0$, so sind die Verbrennungsproducte sowie die überschüssige Luft V auf die Temperatur $T - t$ zu erhöhen. Es seien die Gewichtscapacitäten bei constantem Druck für Kohlensäure, Wasserdampf, Stickstoff und atmosphärische Luft gleich c_1, c_2, c_3, c_4, dann ist, da 1 Kilogramm Brennstoff $\left(C + \frac{16}{6} C\right)$ Kilogramm Kohlensäure, $\left\{\left(H - \frac{O}{8}\right) + 8\left(H - \frac{O}{8}\right)\right\}$ Kilogramm Wasser entwickelt und dazu $\frac{77}{23}\left\{\frac{16}{6} C + 8\left(H - \frac{O}{8}\right)\right\}$ Kilogramm Stickstoff nothwendig sind, die Heizkraft des Brennmaterials gleich B gesetzt

$$B = (T - t)$$
$$\cdot\left[\frac{22}{6} C \cdot c_1 + 9\left(H - \frac{O}{8}\right) \cdot c_2 + \frac{77}{23}\left\{\frac{16}{6} C + 8\left(H - \frac{O}{8}\right)\right\} c_3 + V \cdot c_4\right],$$

daher

$$T = t + \frac{B}{C(3{,}67\, c_1 + 8{,}93\, c_3) + \left(H - \frac{O}{8}\right)(9\, c_2 + 26{,}78\, c_3) + V \cdot c_4}.$$

Es ist nun bei Benutzung der bekannten Gewichtscapacitäten

für Kohlensäure	$c_1 = 0{,}2164$
„ Wasserdampf	$c_2 = 0{,}4805$
„ Stickstoff	$c_3 = 0{,}2438$
„ atmosphärische Luft	$c_4 = 0{,}2375$

a) $$T = t + \frac{B}{2{,}9713\, C + 10{,}8535\left(H - \frac{O}{8}\right) + 0{,}2375\, V}.$$

Unter der Annahme, daß die Verbrennungsproducte größtentheils aus

atmosphärischer Luft bestehen, und daß das 1 Kilogramm Brennmaterial vollständig verflüchtigt wird, haben wir bei der Zuführung einer zweifachen Luftmenge

$$(2V + 1)\ 0{,}2375\,.(T - t) = B$$

und

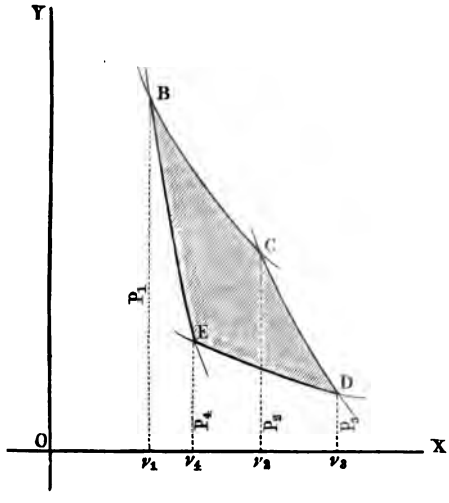
$$\text{b)}\quad T = t + \frac{B}{(2V + 1).0{,}2375}.$$

Werden die betreffenden Werthe von B, C, H, O und V aus den Angaben in den Aufgaben 29 und 33 entnommen, und setzen wir außerdem $t = 0$, so erhält man

	nach Formel a	nach Formel b
Für vollkommen wasserleeres Holz . . . . . $T =$	1336° C.	1287° C.
„ lufttrockenes Holz . . . . . $T =$	1284°	1215°
„ vollkommen wasserleeren Torf . . . . . $T =$	1357°	1321°
„ lufttrockenen Torf . . . . . $T =$	1295°	1291°
„ Steinkohlen . . . . . $=$	1385°	1399°
„ Holzkohlen und Coaks . . . . . $T =$	1304°	1290°

35. In einem Cylinder sei ein Kilogramm Luft von dem Volumen v_1, der Spannung p_1 und der Temperatur t_1 gegeben, wobei wir anstatt t_1 die sogenannte absolute Temperatur $273 + t_1$ gleich T_1 einführen wollen. Für diese Annahmen ist der augenblickliche Zustand der Luft durch die Gleichung $p_1 v_1 = R T_1$ gegeben (§. 11). Man lasse jetzt die Luft sich arbeitsverrichtend ausdehnen, führe dabei aber von außen so viel Wärme zu, daß die Temperatur T_1 erhalten bleibe, das specifische Volumen v_1 werde dabei gleich v_2, die Spannung nehme auf p_2 ab. Denken wir die Volumina v_1, v_2 auf der X-Achse eines recht-

Fig. 51.



winkligen Coordinatensystems und die Spannungen als die zugehörigen Ordinaten aufgetragen (Fig. 51), so beschreiben die Endpunkte der letzteren die isothermische Curve BC (§. 11) und die Fläche $v_1 BCv_2$ stellt die von der Luftmasse geleistete äußere Arbeit vor. Man kann sich nämlich vorstellen, daß ein Kolben vom Flächeninhalt f durch die Luftmasse bei dem constanten Druck p um den Weg s fortgeschoben wird, dann ist die durch die Luft geleistete Arbeit fps. Der Werth fs repräsentirt aber das Volumen v der zur Verwendung gekommenen Flüssigkeit, pv stellt deshalb die von der Luftmasse geleistete Arbeit vor, und da die Fläche $v_1 BCv_2$ aus unendlich vielen, unendlich schmalen Rechtecken, deren Seiten p und v sind, bestehend gedacht werden kann, so kann diese Fläche als das Maß der geleisteten äußeren Arbeit angesehen werden. Bezeichnen wir den Inhalt dieser Fläche mit F_1 und die zugeführte Wärmemenge mit Q_1, so ist unter A den Wärmewerth der Arbeitseinheit verstanden (§. 13),

$$Q = A.F_1.$$

Lassen wir die Luftmasse in dem jetzigen Zustande sich weiter arbeitsverrichtend ausdehnen, wodurch das specifische Volumen $= v_3$, die Spannung gleich p_3 werde, führen wir aber von außen keine Wärme zu, so muß die Temperatur von T_1 bis T_2 abnehmen, die Endpunkte der Spannungsordinaten beschreiben die adiabatische Curve CD (§. 14) und die Fläche $v_2 CDv_3$ stellt die geleistete äußere Arbeit in dieser Periode, zugleich aber auch die innere Schwingungsarbeit vor, welche die Luftmasse verloren hat. Wird die verloren gegangene Wärme im Innern der Luft mit U_1, die Fläche $v_2 CDv_3$ mit F' bezeichnet, so ist

$$U_1 = A.F'.$$

Die Luft vom Volumen v_3 werde jetzt bei Erhaltung der Temperatur T_2 auf das Volumen v_4 zusammengedrückt, dann erfolgt die Zusammendrückung in der Weise, daß die Endpunkte der Spannungsordinaten die isothermische Curve DE beschreiben, und man muß eine gewisse Wärmemenge Q_2 ableiten. Die Arbeit, welche zu der Zusammendrückung nothwendig ist, wird durch die Fläche $v_3 DEv_4$ dargestellt, und es ist, wenn wir den Inhalt derselben mit F_2 bezeichnen,

$$Q_2 = A.F_2.$$

Das Volumen v_4 sei nun so gewählt, daß bei weiterer Zusammendrückung auf das ursprüngliche Volumen v_1 ohne Wärmemittheilung und Wärmeentziehung der ursprüngliche Zustand der Luftmasse wieder hergestellt werde. Dann beschreiben die Endpunkte der Spannungsordinaten die adiabatische Curve EB, die Spannung wird wieder gleich p_1, die Temperatur gleich T_1 und die von der Luftmasse aufgenommene Arbeit ist durch die Fläche $v_4 EBv_1$ dargestellt. Diese Arbeit wird zur Vermehrung der Schwingungsarbeit im Innern der Luftmasse verwandt, und wenn wir die dadurch gewonnene Wärme mit U_2, den Inhalt der Fläche mit F'' bezeichnen, so ist

$$U_2 = A.F''.$$

Da diese Schwingungsarbeit nach Aufgabe 63, Capitel 1 allein von der Anfangs- und Endtemperatur abhängig ist und diese für die Curven CD und EB übereinstimmen, nur daß sich für dieselben die Anfangs- und Endtemperaturen gegenseitig vertauschen, so ist die auf dem Wege CD verloren gegangene Wärme U_1 gleich der auf dem Wege EB gewonnenen Wärme, also

$$U_1 = A.F' = U_2 = A.F'',$$

d. h. aber

$$F' = F''.$$

Bei dem ausgeführten Processe ist nun der Luft die Wärmemenge $Q_1 - Q_2$ zugeführt worden, die dazu verbraucht wurde, eine äußere Arbeit zu verrichten, welche durch die von den vier Curven BC, CD, DE, EB begrenzte Fläche F dargestellt wird. Es ist aber $F = F_1 + F' - F_2 - F''$, und mit Rücksicht auf die obige Bemerkung gleich $F_1 - F_2$, daher haben wir

$$Q_1 - Q_2 = A.F = A\,(F_1 - F_2).$$

Denken wir den Proceß mit der Luft in umgekehrter Weise vorgenommen, lassen also das Volumen v_1 sich durch v_4 bis v_3 ausdehnen und dann durch v_2 bis auf v_1 zusammendrücken, die Endpunkte der Spannungsordinaten die Curve $BEDC$ beschreiben, so ist die auf Zusammendrücken verwendete Arbeit größer als diejenige, welche bei der Ausdehnung der Luft gewonnen wurde, und der Unterschied der beiden Arbeiten ist wieder durch die Fläche $BEDC = F$ gegeben. Es stellt nun F die bei dem Processe verschwundene Arbeit, und $AF = Q_2 - Q_1$ die dabei gewonnene Wärme vor.

Ein Proceß, wie der, den wir in dem Vorigen mit der Luftmasse durchgeführt haben, heißt nach Clausius ein einfacher umkehrbarer Kreisproceß.

Geschieht die Spannungsänderung nach der isothermischen Curve, so ist die geleistete Arbeit nach Aufgabe 56, Capitel 1, Theil II. gleich $p_1 v_1 ln \frac{v_2}{v_1}$. Geschieht die Spannungsänderung dagegen nach der adiabatischen Curve, so ist die verrichtete äußere Arbeit gleich der inneren Schwingungsarbeit, und zwar nach Aufgabe 62, Capitel 1, Theil II. gleich $\frac{c_v}{A}(t - t_1)$, unter t die höhere Temperatur verstanden. Führen wir statt der wirklichen Temperaturen t die sogenannten absoluten Temperaturen $273 + t = T$ ein, schreiben außerdem statt c_v einfach c, so ist die geleistete Arbeit, entsprechend den Curven BC und CD

$$L_1 = p_1 v_1 ln \frac{v_2}{v_1} + \frac{c}{A}(T_1 - T_2).$$

Ebenso ist die an die Luftmasse behufs Compression zu übertragende Arbeit, entsprechend den Curven DE und EB:

$$L_2 = p_3 v_3 ln \frac{v_3}{v_4} + \frac{c}{A}(T_1 - T_2).$$

Die ganze geleistete äußere Arbeit, bei einem derartigen einfachen umkehrbaren Kreisproceß ist aber nach dem Vorigen $= \frac{Q_1 - Q_2}{A}$, und bei Benutzung der obigen Werthe haben wir deshalb:

$$L = \frac{Q_1 - Q_2}{A} = p_1 v_1 ln \frac{v_2}{v_1} - p_3 v_3 ln \frac{v_3}{v_4}$$

$$= R T_1 ln \frac{v_2}{v_1} - R T_2 ln \frac{v_3}{v_4} \text{ (nach Formel 11).}$$

Mit Rücksicht darauf, daß die Punkte C und D, sowie die Punkte EB adiabatischen Curven angehören, ist nach Formel 17

$$\left(\frac{v_2}{v_3}\right)^{x-1} = \frac{T_2}{T_1} \text{ und } \left(\frac{v_1}{v_4}\right)^{x-1} = \frac{T_2}{T_1}, \text{ daher } \frac{v_2}{v_3} = \frac{v_1}{v_4}$$

oder

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{v_3}{v_4}, \text{ und deshalb die geleistete Arbeit}$$

$$L = R (T_1 - T_2) ln \frac{v_2}{v_1} = R T_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1} ln \frac{v_2}{v_1}.$$

Um aber die Arbeit $p_1 v_1 ln \frac{v_2}{v_1} = R T_1 ln \frac{v_2}{v_1}$ zu leisten, mußte die Wärmemenge Q_1 zugeführt werden, weshalb wir statt $R T_1 ln \frac{v_2}{v_1}$ auch $\frac{Q_1}{A}$ setzen dürfen. Die geleistete Arbeit L bei einem einfachen umkehrbaren Kreisproceß ist demnach in Maximo:

$$L = \frac{Q_1 - Q_2}{A} = \frac{Q_1}{A T_1} (T_1 - T_2),$$

also allein abhängig von der zugeleiteten Wärmemenge Q_1, der Maximal-Temperatur T_1 und der geringsten Temperatur T_2.

Eine Maschine, in welcher man eine Flüssigkeit in der Weise einen Kreisproceß wiederholt durchlaufen läßt, daß derselben dabei mehr Wärme zugeführt, als entzogen, und die überschüssig zugeführte Wärme als äußere Arbeit genommen wird, heißt eine calorische Kraftmaschine. Da die Größe der Arbeit von der Volumenänderung der Flüssigkeit abhängig ist, so werden nur luftförmige Körper oder solche, welche aus dem tropfbar-flüssigen Zustande in den luftförmigen übergeführt werden können, bei den calorischen Kraftmaschinen Verwendung finden. In der Praxis benutzt man als Arbeitsflüssigkeiten die atmosphärische Luft, ein Gemenge von Luft, Leuchtgas, Wasserdampf, sowie den Wasserdampf, und kann darnach die calorischen Kraftmaschinen unterscheiden in

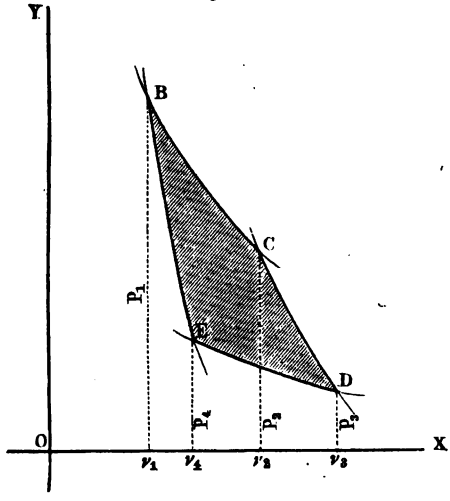
Luftmaschinen und Dampfmaschinen.

Eine calorische Maschine ist entweder geschlossen oder offen, je nachdem die Arbeitsflüssigkeit stets dieselbe bleibt und wiederholten Kreisprocessen

unterworfen ist, oder periodisch ins Freie entweicht und durch neue Flüssigkeit ersetzt werden muß. Eine offene calorische Maschine kann mit einer offenen oder geschlossenen Feuerung versehen sein. Im ersten Falle ist der Feuerraum von der Arbeitsflüssigkeit getrennt, und die gasförmigen Verbrennungsproducte entweichen ins Freie, bei der geschlossenen Feuerung dagegen mischen sich diese Verbrennungsproducte mit der Arbeitsflüssigkeit und verrichten mit dieser vereint die verlangte Arbeit. Eine geschlossene calorische Maschine muß jederzeit eine offene Feuerung haben. Bei den Luftmaschinen sind die hier angedeuteten Unterschiede sämmtlich vorhanden, die Dampfmaschinen haben dagegen stets eine offene Feuerung, und werden auch in den meisten Fällen als offene Maschinen construirt. Condensationsmaschinen, bei denen das im Condensator sich bildende Wasser zur Kesselheizung benutzt wird, sind allein als geschlossene Maschinen zu betrachten.

36. **Geschlossene Luftmaschinen.** Ein in der Maschine eingeschlossenes Luftquantum wird durch Expansion und Compression, durch Erwärmung und Abkühlung in der Weise durch verschiedene Zustände durchgeführt, daß äußere Arbeit gewonnen und das Gas dabei periodisch in seinen Anfangszustand zurückgeführt werde. Es ist in der Figur 52 ein derartiger periodischer Umlauf der Luftmasse dargestellt, indem die specifischen Volumina v auf der X-Achse, die zugehörigen Spannungen p als Ordinaten aufgetragen wurden. Wenn dieser Kreisproceß mit dem in voriger Aufgabe hingestellten

Fig. 52.



übereinstimmt, so sind die beiden Curven BC und DE isothermische, folgen also dem Gesetze $pv = \text{constant}$ (§. 11). Die beiden Curven CD und EB sind dagegen adiabatische, für welche das Gesetz $pv^{\varkappa} = \text{constant}$ (§. 14) besteht. Hierin muß $\varkappa = \frac{c_p}{c_v} = 1{,}41$ gesetzt werden, unter c_p die Gewichtscapacität bei constantem Druck, unter c_v die bei constantem Volumen verstanden. In der Folge setzen wir einfacher $c_p = c_1$ und $c_v = c$. Um ganz allgemeine Formeln zu erhalten, die für die verschiedenen Systeme der Luftmaschinen in Anwendung gebracht werden können, legen wir jedoch den Curven BC und DE das Gesetz $pv^m = \text{constant}$, und den Curven CD und EB

das Gesetz $p v^{m_1} = \text{constant}$, zu Grunde, worin $m \gtreqless 1$ und $m_1 \gtreqless \varkappa$ angenommen werden mag. Die Luftmasse ist dann in den verschiedenen Zustandspunkten B, C, D, E bestimmt durch p_1, v_1, T_1; p_2, v_2, T_2; p_3, v_3, T_3; $p_4, v_4 T_4$, und es werde dabei angenommen, daß während des Weges EBC eine Wärmezuführung Q_1 und während des Weges CDE eine Wärmeentziehung Q_2 stattgefunden habe. Für diese Voraussetzungen ist v_3 das größte und v_1 das kleinste specifische Volumen, T_2 die größte und T_4 die kleinste absolute Temperatur. Für den Uebergang der Luftmasse vom Zustande B in den von C haben wir

$$p_1 v_1^m = p_2 v_2^m \text{ oder } p_1 v_1 . v_1^{m-1} = p_2 v_2 . v_2^{m-1},$$

d. h.

$$\frac{p_1 v_1}{p_2 v_2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{m-1} \text{ und mit Rücksicht auf Formel 11 } = \frac{R(273 + t_1)}{R(273 + t_2)}$$

$$= \frac{273 + t_1}{273 + t_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Es ist hiernach

$$a_1) \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{m-1} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Die Luftmasse hat bei Aenderung der Temperatur ihre Schwingungsarbeit verändert, welche nach Aufgabe 62, Capitel 1, Thl. II., einer Arbeit

$$b_1) \; U_1 = \frac{c}{A} (T_2 - T_1) \text{ entspricht.}$$

Die von der Luftmasse verrichtete äußere Arbeit ist durch die Fläche $v_1 B C v_2$ repräsentirt, deren Inhalt bestimmt werden muß. Die Fläche denken wir bestehend aus unendlich vielen, sehr schmalen Rechtecken, von der veränderlichen Höhe p und der constanten Breite $\frac{v}{n}$, unter n eine unendlich große Zahl verstanden. Hiernach ist Fläche $v_1 B C v_2 = \sum_{v_1}^{v_2} p \frac{v}{n}$, und mit Rücksicht auf das für die Curve BC angenommene Gesetz

$= p_1 v_1^m . \sum_{v_1}^{v_2} v^{-m} \frac{v}{n}$. Die hier auszuführende Summation ist in Aufgabe 31 des ersten Abschnitts, Thl. I., gezeigt worden, und erhalten wir deshalb mit Rücksicht auf das dort abgeleitete Resultat die geleistete äußere Arbeit:

$$L_1 = p_1 v_1^m \frac{1}{-m+1} \left\{ v_2^{-m+1} - v_1^{-m+1} \right\}$$

$$= p_1 v_1 \frac{1}{m-1} \left\{ 1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{m-1} \right\}.$$

Benutzen wir die Beziehung unter a, sowie die Formel 11, so ist

$$L_1 = \frac{1}{m-1} R T_1 \left\{ 1 - \frac{T_2}{T_1} \right\} = \frac{1}{m-1} R (T_1 - T_2).$$

Nach Formel 14 iſt $AR = c_p - c_v = c_v(\varkappa - 1)$, wofür wir einfach $c(\varkappa - 1)$ ſchreiben, und deshalb erhalten

$$c_1)\ L_1 = \frac{1}{m-1}\frac{1}{A}c(\varkappa - 1)(T_1 - T_2).$$

(Der Ausdruck wird für $m = 1$ zu $\frac{0}{0}$, hat alſo, wenn die Veränderung nach der iſothermiſchen Curve erfolgt, einen unbeſtimmten Werth, jedoch iſt für dieſen Fall in Aufgabe 56 erſten Capitels, Thl. II., bereits die Expanſionsarbeit

$$L_1 = p_1 v_1 l n \frac{v_2}{v_1} = RT_1 l n \frac{v_2}{v_1}$$

beſtimmt worden.)

Die ganze von der Luftmaſſe auf dem Wege BC verrichtete Arbeit iſt hiernach

$$d_1)\ U_1 + L_1 = \frac{c}{A}(T_2 - T_1) + \frac{1}{m-1}\frac{c}{A}(\varkappa - 1)(T_1 - T_2)$$
$$= \frac{c}{A}(T_2 - T_1)\frac{m-\varkappa}{m-1},$$

und die hierzu von außen zuzuführende Wärmemenge gleich

$$e_1)\ A(U_1 + L_1)$$

gleich $(T_2 - T_1)\frac{m-\varkappa}{m-1}c$, wofür wir $\mu(T_2 - T_1)$ ſetzen wollen.

Während der Veränderung der Luftmaſſe, die durch die Curve CD dargeſtellt iſt, laſſen ſich dieſelben Formeln ableiten, nur haben wir dem angenommenen Geſetze gemäß $m = m_1$ zu ſetzen

$$a_2)\ \left(\frac{v_3}{v_2}\right)^{m_1-1} = \frac{T_2}{T_3}$$

$$b_2)\ U_1 = \frac{c}{A}(T_3 - T_2)$$

$$c_2)\ L_1 = \frac{1}{m_1 - 1}\frac{c}{A}(\varkappa - 1)(T_2 - T_3)$$

$$d_2)\ U_1 + L_1 = \frac{c}{A}(T_3 - T_2)\frac{m_1 - \varkappa}{m_1 - 1} = \mu_1(T_3 - T_2)\frac{1}{A}$$

$$e_2)\ A(U_1 + L_1) = \mu_1(T_3 - T_2).$$

Für die dritte Periode der Aenderung nach der Zuſtandscurve von D bis E iſt wieder

$$a_3)\ \left(\frac{v_4}{v_3}\right)^{m-1} = \frac{T_3}{T_4}$$

$$b_3)\ U_1 = \frac{c}{A}(T_4 - T_3)$$

$c_3)$ $L_1 = \frac{1}{m-1}\frac{c}{A}(\varkappa - 1)(T_3 - T_4)$ die Arbeit zum Zusammendrücken.

$d_3)$ $U_1 + L_1 = \mu (T_4 - T_3)\frac{1}{A}$

$e_3)$ $A(U_1 + L_1) = \mu (T_4 - T_3)$.

Für die vierte Periode, die Aenderung der Zustandscurve von E bis B endlich:

$a_4)$ $\left(\frac{v_1}{v_4}\right)^{m-1} = \frac{T_4}{T_1}$

$b_4)$ $U_1 = \frac{c}{A}(T_1 - T_4)$

$c_4)$ $L_1 = \frac{1}{m_1 - 1}\frac{c}{A}(\varkappa - 1)(T_4 - T_1)$

$d_4)$ $U_1 + L_1 = \mu_1 (T_1 - T_4)\frac{1}{A}$

$e_4)$ $A(U_1 + L_1) = \mu_1 (T_1 - T_4)$.

Die vier Temperaturen T_1, T_2, T_3, T_4 stehen noch in einer eigenthümlichen Beziehung zu einander, die sich mit Hülfe höherer Mathematik ableiten läßt, und welche wir als erste Gleichung aufführen wollen:

1) $T_2 . T_4 = T_1 . T_3$,

d. h. das Product aus der größten und kleinsten Temperatur ist gleich dem Product aus den mittleren Temperaturen, die in dem Kreisprocesse vorkommen.

Fassen wir nun das Verhalten der Luftmasse während der vier Perioden zusammen und berücksichtigen dabei Formel 1, so ist die zuzuführende Wärmemenge Q_1 auf dem Wege EBC gleich den Werthen unter e_4 und e_1.

2) $Q_1 = \mu (T_2 - T_1) + \mu_1 (T_1 - T_4)$.

Die abzuleitende Wärmenge Q_2 auf dem Wege CDE ist gleich den Werthen e_2 und e_3.

3) $Q_2 = \mu_1 (T_3 - T_2) + \mu (T_4 - T_3)$.

Die geleistete äußere Arbeit L gleich der Summe der Werthe unter d_1 und d_2 weniger der Summe der Werthe unter d_3 und d_4.

4) $L = \frac{\mu - \mu_1}{A}\frac{(T_2 - T_3)(T_3 - T_4)}{T_3}$.

Werden für jeden Kreisproceß G Kilogramm Luft verbraucht, so ist das größte Volumen, welches die Luft einnimmt,

$$V = G v_3 = G \frac{RT_3}{p_3}.$$

Finden in der Minute u derartige Kreisprocesse statt, so ist die von der Maschine entwickelte Arbeitsstärke

$$6)\quad L^{=} = \frac{u}{60}\, G.L^{km},$$

und mit Benutzung dieses Werthes, der als gegeben angesehen werden kann, ergiebt sich

$$7)\quad V = \frac{60}{\mu}\,\frac{L^{=}}{p_3}\,\frac{AR}{\mu - \mu_1}\,\frac{T_3^2}{(T_2 - T_3)\,(T_3 - T_4)}.$$

Mit Rücksicht darauf, daß die großen Dimensionen der Luftmaschinen ihrer Verbreitung hauptsächlich hinderlich sind und in Betracht, daß diese Abmessungen mit dem Werth von V zunehmen, empfiehlt es sich, denselben möglichst klein zu halten. Der Ausdruck unter 7 wird aber bei gegebenen Werthen von $L^{=}$, p_3, μ, μ_1, u, T_2 und T_4 zu einem Minimum, wenn $\frac{T_3^2}{(T_2 - T_3)\,(T_3 - T_4)}$ ein Minimum oder $\left(\frac{T_2}{T_3} - 1\right)\left(1 - \frac{T_4}{T_3}\right)$ ein Maximum ist. Setzen wir $T_3 = x$, $T_2 = a$, $T_3 = b$, so hat man zur Bestimmung des Maximums die Gleichung

$$\frac{a+b}{x} - \frac{ab}{x^2} = \frac{a+b}{x_1} - \frac{ab}{x_1^2}$$

oder

$$(a+b)\,\frac{x_1 - x}{x\,x_1} - ab\,\frac{x_1^2 - x^2}{x^2 x_1^2} = 0.$$

Nachdem durch $x - x_1$ dividirt worden, wird $x = x_1$ gesetzt, und es entsteht dann $x = \frac{2ab}{a+b}$, d. h. also, V wird zu einem Minimum, wenn

$$8)\quad T_3 = \frac{2\,T_2\,T_4}{T_2 + T_4}$$

und nun bestimmt sich auch aus Gleichung 1

$$9)\quad T_1 = \frac{T_2\,T_4}{T_3} = \frac{T_2 + T_4}{2}.$$

Werden diese Werthe von T_3 und T_1 in den obigen Formeln substituirt, so erhalten wir

$$2^a)\quad Q_1 = (\mu + \mu_1)\,\frac{T_2 - T_4}{2}$$

$$3^a)\quad Q_2 = (\mu\,T_4 + \mu_1\,T_2)\,\frac{T_4 - T_2}{T_4 + T_2}$$

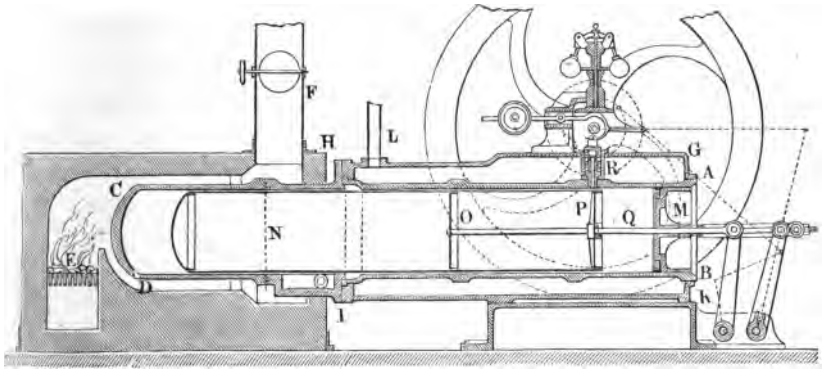
$$6^a)\quad L^{=} = \frac{u}{60}\,\frac{\mu - \mu_1}{AR}\,V p_3\,\frac{(T_2 - T_4)^2}{4\,T_4\,T_2}$$

$$7^a)\quad V = 2\,\frac{GR}{p_3}\,\frac{T_2\,T_4}{T_2 + T_4}$$

37. In Fig. 53 ist eine von Lehmann ausgeführte geschlossene Luftmaschine im Durchschnitt dargestellt. $ABCD$ ist ein gußeiserner liegender Cy-

linder, der vorn offen, hinten geschlossen ist und von den heißen Verbrennungsproducten umspült wird, welche im Feuerraume *E* entwickelt werden nnd ihren Ab-

Fig. 53.

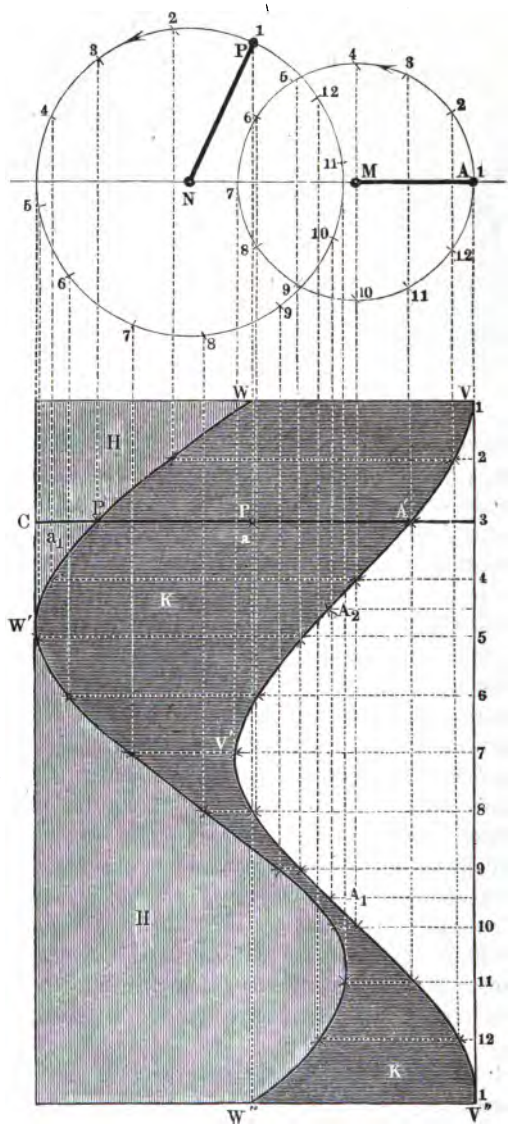


zug durch den Schornstein *F* nehmen. Auf $^2/_3$ der Länge dieses Cylinders wird derselbe von einem zweiten weiteren Cylinder *GHIK* umschlossen, und der sich dadurch bildende ringförmige Zwischenraum ist mit Wasser angefüllt, welches in den unteren Theil des Raumes eintritt, und nachdem es der heißen Luft die Wärme entzogen, durch die Röhre *L* wieder abgelassen wird. In dem Cylinder *ABCD* bewegen sich zwei Kolben *M* und *N*. Der Kolben *M*, der Arbeitskolben genannt, ist durch einen Lederstulp in luftdichte Verbindung mit dem Cylinder *ABCD* gebracht, so daß zwar Luft von außen eindringen, aber nicht umgekehrt heiße Luft ins Freie gelangen kann. Der Kolben *N* heißt Verdränger und besteht aus einem überall luftdicht genieteten Blechcylinder, der im Innern eine Versteifung *O* hat und vorn durch einen hölzernen Deckel *P* verschlossen ist. Zwischen dem Kolben *N* und dem Cylinder *ABCD* bleibt nur ein enger ringförmiger Raum zur Ansammlung der erhitzten Luft übrig. *R* ist ein Ventil das sich öffnet, wenn durch zu starkes Feuern oder Entlastung der Arbeitsmaschine der normale Gang gestört wird. Der Arbeitskolben *M* überträgt die Bewegung auf die Schwungradwelle, und von dieser aus erfolgt die Bewegung des Verdrängers *N* vermittelst der Kolbenstange *Q*, welche luftdicht durch den Arbeitskolben *M* geführt ist. Die Kurbeln und Verbindungsstangen behufs dieser doppelten Bewegung sind so angeordnet, daß die Kurbel des Verdrängers der des Arbeitskolbens um 65° voraneilt.

Das Spiel der beiden Kolben läßt sich sehr leicht übersehen, wenn man ein Kolbendiagramm zeichnet, wie es in Fig. 54 (a. f. S.) geschehen. Die beiden Kreise *M* und *N* stellen die Warzenkreise der beiden Kurbeln vor, welche mit dem Arbeitskolben *M* und dem Verdränger *N* in Verbindung stehen. *MA* und *NP* sind die gegenseitigen Lagen der beiden Kurbeln, für die Stellung

in Fig. 53, in welcher der Arbeitskolben *M* ſeine äußerſte Lage auf der rechten Seite angenommen, wobei der Winkel *PNM* gleich dem Voreilungswinkel

Fig. 54.



gleich 65° iſt. Von *A* und *P* aus ſind die Warzenkreiſe in 12 gleiche Theile getheilt und dadurch 12 verſchiedene Kurbellagen während eines Um-

laufes erhalten worden. Die Linie VV'' stelle den abgewickelten Warzenkreis M vor, welche dem entsprechend ebenfalls in 12 gleiche Theile getheilt werden muß. Als Ordinaten zu den einzelnen Theilpunkten dieser Linie sind die Wege des Arbeitskolbens M aufgetragen worden, so daß also z. B. für den Theilpunkt 3, $V3$ den von der Kurbelwarze zurückgelegten Bogen und $3A'$ den von dem Kolben M zurückgelegten Weg, gemessen von der Anfangsstellung aus, bezeichnet. Auf der Linie WW'', die ebenfalls in 12 gleiche Theile getheilt ist, sind ebenso die Wege des Verdrängers N als Ordinaten aufgetragen worden, so daß für dieselbe Kurbelstellung 3, PP' der von dem Verdränger zurückgelegte Weg ist. Verbindet man sämmtliche Ordinaten-Endpunkte, so erhält man die beiden Curven $VV'V''$ und $WW'W''$ welche die Gesetze der Bewegung beider Kolben vor Augen führen. Für die Kolbenstellung 3 ist nun $3A'$ der Weg, den der Arbeitskolben M nach links zurücklegt, $A'P'$ die Entfernung des Arbeitskolbens M von dem Verdränger N, $P'C$ die Entfernung des Verdrängers vom Boden des Cylinders $ABCD$ (Fig. 53). Der vertical schraffirte Theil H der Figur stellt dabei den Raum vor welcher die heiße Luft, und der horizontal schraffirte Theil H dagegen den Raum welcher die kalte Luft enthält. Es bewegen sich hiernach, von der skizzirten Stellung in Fig. 53 ausgegangen, der Arbeitskolben M und der Verdränger N zuerst beide nach links, bis zur Kolbenstellung 5 ungefähr, von der aus der Verdränger den Weg nach rechts einschlägt, während der Arbeitskolben noch bis zur Kolbenstellung 7 seinen Weg nach links verfolgt, beide Kolben bewegen sich also von 5 bis 7 gegen einander. Jetzt schlägt auch der Arbeitskolben seine entgegengesetzte Bewegung ein, beide Kolben bewegen sich also nach rechts, bis bei der Kolbenstellung 11 ungefähr der Verdränger N die Bewegung nach links einschlägt, während der Arbeitskolben M seinen Weg nach rechts fortsetzt, bis beide wieder ihre Ausgangsstellung erreicht. Für die Kolbenstellung zwischen 4 und 5 ist die heiße Luft in den Raum zwischen Arbeitskolben M und Verdränger N resp. in den ringförmigen Raum zwischen den Verdränger N und den Cylinder $ABCD$ (Fig. 53) gepreßt worden, während entgegengesetzt davon in der Kolbenstellung zwischen 9 und 10 sämmtliche kalte Luft hinter den Verdränger resp. in den oben erwähnten ringförmigen Raum gelangt ist.

Bezeichnet man für irgend einen Augenblick der Kurbeldrehung die Mittelwerthe der Spannung, des specifischen Volumens und der Temperatur im ganzen Behälter mit p, v, T, so ergiebt sich folgender allgemeine Verlauf des Kreisprocesses, indem wir den Weg des Arbeitkolbens M in den vier Perioden $V'A_1$, A_1V'', VA_2 und A_2V' verfolgen.

1. Bei dem ersten Theil der Auswärtsbewegung des Arbeitskolbens, entsprechend dem Curvenstück $V'A_1$, tritt die Luft aus dem Raume K in den Raum H, die Temperatur T wächst deshalb, das Volum nimmt aber ebenfalls zu, daher kann die Spannung p nur eine geringe Aenderung erfahren.

2. Für das Ende der Auswärtsbewegung des Kolbens M, durch das Curvenstück A_1V'' dargestellt, geht die Luft aus dem Raume H in den Raum K,

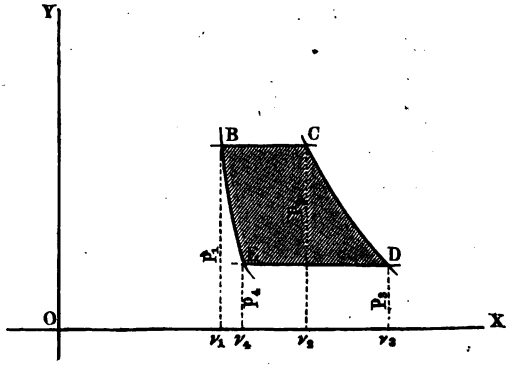
es erfolgt eine Abnahme der Temperatur T und zugleich eine Zunahme des Volumens, daher auch eine wesentliche Abnahme der Spannung p.

3. Für den ersten Theil der Einwärtsbewegung von M, durch das Curvenstück VA_2 bestimmt, dauert der Uebergang der Luft aus H in K fort, daher findet weitere Abnahme der Temperatur T statt, und da gleichzeitig das Volumen kleiner wird, so kann die Spannung p sich nicht wesentlich ändern.

4. Für das Ende der Einwärtsbewegung von M, dem Curvenstück A_2V' entsprechend, wird die Luft wieder aus K in H gepreßt, dabei nimmt die Temperatur T zu, und da das Volumen zugleich kleiner wird, muß die Spannung p eine wesentliche Zunahme erfahren.

Mit Rücksicht auf die vorige Auseinandersetzung und mit Benutzung der von W. Eckerth angestellten Versuche an einer ausgeführten Lehmann'schen Maschine wird sich für die ausgeführte Maschine das Bild des Kreisprocesses annähernd durch Fig. 55 wiedergeben lassen. Die Linien BC und DE sind

Fig. 55.



hier, abweichend von dem Bilde des idealen Kreisprocesses Fig. 51, gerade mit der X-Achse parallele Linien. Das dort für die Curven BC und DE angenommene Gesetz $pv^m = \text{constant}$ muß sich hier auf $p = \text{constant}$ reduciren. Wir haben demnach $m = 0$ zu setzen und erhalten dann

$$\mu = \varkappa c = 0{,}2375.$$

Nach den mit dem Indicator angestellten Versuchen, welcher mit dem Raume K in Verbindung gebracht wurde, war annähernd

$$p_1 = p_2 = 17640 \text{ Kilogrm. und } p_3 = p_4 = 10000 \text{ Kilogr.}$$

In der ausgeführten Maschine war beim Arbeitskolben der Durchmesser $d = 0{,}342^{\text{m}}$, der Hub $s = 0{,}175^{\text{m}}$, und beim Verdränger $d_1 = 0{,}342^{\text{m}}$, $s_1 = 0{,}244^{\text{m}}$.

Es sei a die Entfernung des Arbeitkolbens vom Verdränger N, a_1 der Abstand des Verdrängerbodens von dem des Cylinders $ABCD$, F und F_1

seien die Querschnitte der beiden Kolben und l die Länge des Verdrängers, dann ist das in den Räumen H und K eingeschlossene Luftvolumen:

$$V = Fa + (F - F_1)\, l + Fa_1.$$

Bei der ausgeführten Maschine ist $l = 1{,}527^{\mathrm{m}}$, die Werthe a und a_1 sind dagegen von der gegenseitigen Stellung der beiden Kolben abhängig, für die Kurbelstellung 3 (Fig. 54) z. B. ist $a = A'P'$ und $a_1 = P'C$. Wir haben für

die erste Periode $a = 0{,}089^{\mathrm{m}}$ $a_1 = 0{,}072^{\mathrm{m}}$,
„ zweite „ $a = 0{,}005^{\mathrm{m}}$ $a_1 = 0{,}243^{\mathrm{m}}$,
„ dritte „ $a = 0{,}17^{\mathrm{m}}$ $a_1 = 0{,}166^{\mathrm{m}}$,
„ vierte „ $a = 0{,}196^{\mathrm{m}}$ $a_1 = 0{,}029^{\mathrm{m}}$.

Da nun $F = 0{,}09566$ Quadratmeter, $F_1 = 0{,}09186$ Quadratmeter, so ergiebt sich mit Benutzung dieser Werthe:

$V_1 = 0{,}02125$ Cbk.-Mtr.; $V_2 = 0{,}02955$ Cbk.-Mtr.; $V_3 = 0{,}03795$ Cbk.-Mtr.; $V_4 = 0{,}02731$ Cbk.-Mtr.

Das in der Maschine enthaltene Luftgewicht G ist $= \frac{V}{v} = \frac{Vp}{RT}$, welche Formel zur Berechnung der vier Temperaturen, ausgedrückt durch die größte T_2 benutzt werden kann. Das Verhältniß $\frac{T_1}{T_2}$ ergiebt sich auch aus Formel a_1, und das Verhältniß von $\frac{T_3}{T_4}$ aus Formel a_3 (Aufgabe 36), wenn man $m = 0$ setzt. Es ist hiernach:

$$T_1 = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{p_1}{p_2}\, T_2 = 0{,}719\, T_2; \quad T_3 = \frac{V_3}{V_2} \cdot \frac{p_3}{p_2}\, T_2 = 0{,}728\, T_2;$$

$$T_4 = \frac{V_4}{V_2} \cdot \frac{p_4}{p_2}\, T_2 = 0{,}524\, T_2.$$

Aus Formel a_2 oder a_4 (Aufgabe 36) läßt sich nun m_1 berechnen:

$$\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{m_1 - 1} = \frac{T_2}{T_3},$$

d. h.

$$\left(\frac{3795}{2955}\right)^{m_1 - 1} = 1{,}37,$$

$$m_1 = 2{,}265 \text{ und dann } \mu_1 = 0{,}113.$$

Weiter ist die zugeleitete Wärme $Q_1 = 0{,}08877\, T_2$ (Formel 2),
„ abgeleitete „ $Q_2 = 0{,}07919\, T_2$ (Formel 3),

die geleistete Arbeit für jeden Kreisproceß $L = 0{,}00958\, \frac{T_2}{A}$ (Formel 4).

Wäre der Proceß dem in Aufgabe 35 vorgeführten idealen Kreisprocesse gleich, so wäre die geleistete Arbeit, d. i. das absolute Maximum:

$$\text{Max. } L = 0{,}042255\ \frac{T_2}{A},$$

daher der Nutzeffect des Maschinensystems:

$$\eta = \frac{958}{4226} = 0{,}227.$$

Die Arbeitstärke der Maschine bestimmt sich nach Formel 6:

$$L^{=} = \frac{u}{60} \cdot G \cdot L = \frac{u}{60} \frac{V_3 p_3}{R T_3} L = \frac{u}{60} \frac{V_3 p_3}{R \,.\, 0{,}728\, T_2} 0{,}00958\ \frac{T^2}{A}$$

$$= \frac{u}{60} \frac{V_3 \,.\, p_3}{R} \frac{0{,}00958}{0{,}728} \frac{1}{A}.$$

Für die Maschine war $u = 97$, dann ergiebt sich:

$$L^{=} = 117{,}2^{\frac{\text{km}}{=}}.$$

Die Untersuchung mit dem Bremsdynamometer ergab eine wirkliche Leistung von $73{,}5^{\frac{\text{km}}{=}}$, demnach ist der wirkliche Nutzeffect der Maschine:

$$\eta = \frac{73{,}5}{117{,}2} = 0{,}627.$$

Die Wärmemenge, welche stündlich von dem Kühlwasser aufgenommen wurde, ist:

$$60\, u\, G \,.\, Q_2 = 60 \,.\, 97 \,.\, \frac{V_3 p_3}{R \,.\, 0{,}728} \cdot 0{,}07919 = 8207 \text{ Calorien.}$$

Die von der Maschine getriebene Pumpe förderte stündlich 663 Kilogrm. Wasser, und war die Temperatur des aus dem Kühlraume abfließenden Wassers durchschnittlich um 9^0 höher als die des eintretenden. Das Wasser nahm darnach $9 \,.\, 663 = 5967$ Calorien in sich auf, demnach sind durch die äußere Wand des Wassermantels verloren gegangen:

$$8207 - 5967 = 2240 \text{ Calorien.}$$

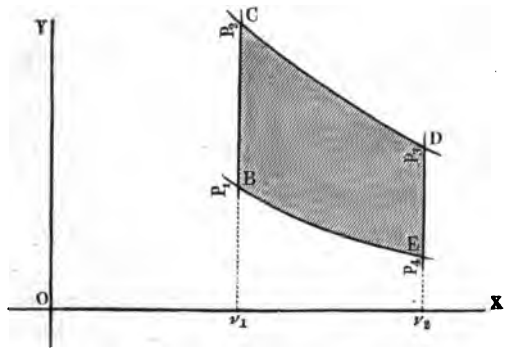
38. Bei den nach dem System von Stirling ausgeführten geschlossenen Luftmaschinen findet die Wärmezuführung und Wärmeableitung bei constantem Volumen statt, die beiden Curvenstücke BC und DE in Fig. 51 werden hiernach gerade zur Y-Achse parallele Linien. Für die beiden anderen Curven CD und EB wollen wir adiabatische annehmen, es stellt sich dann der Kreisproceß bei diesem System durch Fig. 56 dar. Den beiden Curven BC und DE lag das Gesetz $p v^m = \text{constant}$ zu Grunde, worin m ein echter Bruch $= \frac{r}{s}$ sein sollte. Setzen wir diesen Werth für m, so ergiebt sich

$$p^s v^r = \text{constant},$$

und da nun das Volumen dabei constant bleiben soll, so müssen wir $s = 0$ setzen. Mit dieser Annahme wird $\mu = \frac{m - \varkappa}{m - 1} c = \frac{r - s\varkappa}{r - s} c = c.$

Die Wärmezuführung auf der Strecke BC: $Q_1 = c\,(T_2 - T_1)$, die Wärmeentziehung auf der Strecke DE: $Q_2 = c\,(T_3 - T_4)$.

Fig. 56.



Da die Curven CD und EB adiabatische sein sollen, so ist für die Curve CD

$$\frac{p_3}{p_2} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\varkappa}$$

oder

$$\frac{p_3\,v_2}{p_2\,v_1} = \frac{R\,T_3}{R\,T_2} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\varkappa-1}$$

und ebenso für die Curve EB:

$$\frac{p_1}{p_4} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

oder

$$\frac{p_4\,v_2}{p_1\,v_1} = \frac{R\,T_4}{R\,T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\varkappa-1}.$$

Die verbrauchte Wärmemenge ist $Q_1 - Q_2 = c\,(T_2 - T_1 - [T_3 - T_4])$ und die dieser Wärmemenge entsprechende Arbeit für jeden Kreisproceß:

$$L = \frac{Q_1 - Q_2}{A} = \frac{c}{A} \cdot (T_2 - T_1 - [T_3 - T_4])$$

oder mit Benutzung der aufgestellten Formeln für die Volumina

$$L = \frac{c}{A}\,(T_2 - T_1)\left\{1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\varkappa-1}\right\}.$$

Gesetzt die Maschine verbraucht in der Secunde 0,5 Kilogramm Luft, welche von 0° auf 300° erhitzt werden muß, und es sei dabei das Expansionsverhältniß $\frac{v_1}{v_2} = 0{,}8$, dann ist $T_1 = 273°$, $T_2 = 573°$:

$$T_3 = 0{,}8^{0{,}41} \cdot T_2 = 0{,}9 \cdot T_2 = 515{,}7;$$
$$T_4 = 0{,}8^{0{,}41} \cdot T_1 = 0{,}9 \cdot T_1 = 245{,}7;$$

die zugeführte Wärmemenge $Q_1 = 0{,}1684 \cdot 300 = 50{,}52$ Calorien,
die entzogene Wärmemenge $Q_2 = 0{,}1684 \cdot 270 = 45{,}47$ „
die Arbeit pro Kreisproceß $L = 424 \cdot 5{,}05 = 2141^{km}$.

Hätte dagegen ein der Aufgabe 35 gemäß idealer Kreisproceß stattgefunden, so wäre die Arbeit pro Kreisproceß

$$L = \frac{Q_1}{A\,T_2}(T_2 - T_4) = 424 \cdot 50{,}52\,\frac{327{,}3}{573} = 12235^{km}.$$

Die theoretische Arbeitsstärke wäre dagegen

$$L^{=} = 0{,}5 \cdot 0{,}1684 \cdot 424 \cdot 300 \cdot (1 - 0{,}8^{0{,}41})$$
$$= 1071^{\frac{km}{=}} \text{ gleich } 14{,}3 \text{ Pferdestärken.}$$

39. **Dampfmaschinen.** Diejenigen Maschinen, welche durch die Spannkraft des Wasserdampfes in Bewegung gesetzt werden, heißen Dampfmaschinen. Diese zerfallen je nach der Wirkung des Dampfes in rotirende und Kolben- oder Cylindermaschinen. Bei der ersten Art erzeugt der Dampf unmittelbar eine drehende Bewegung. Es sind hierfür eine große Anzahl Constructionen erdacht und ausgeführt worden, die sich aber bis jetzt sämmtlich nicht bewährt haben, so daß wir von diesen hier ganz absehen. Bei den Kolben- oder Cylindermaschinen wirkt der Dampf gegen die Kolbenfläche, bringt auf diese Weise eine hin- und hergehende Bewegung hervor, die durch Zwischenmaschinen in eine drehende umgesetzt oder direkt zum Betriebe von Pumpen und Gebläsen benutzt werden kann. Bewirkt der Dampf die auf- und niedergehende Bewegung des Kolbens, wirkt er also wechselseitig gegen beide Kolbenflächen, so heißt die Maschine doppeltwirkend. Wird dagegen nur eine der beiden Kolbenbewegungen durch den Dampf hervorgebracht, die andere aber durch ein niedersinkendes Gewicht erzeugt, so heißt die Maschine einfachwirkend. Bei Berücksichtigung der größeren oder geringeren Dampfspannung unterscheidet man:

a. Niederdruckdampfmaschinen, bei welchen die Dampfspannung $1^1/_5$ bis $1^1/_4$ Atmosphären beträgt.

b. Mitteldruckdampfmaschinen mit einer Dampfspannung bis zu 2 Atmosphären.

c. Hochdruckdampfmaschinen, wenn die Dampfspannung höher als 2 Atmosphären ist.

Bei den Mittel- und Hochdruckmaschinen ist noch der Umstand zu berücksichtigen, ob dem Dampfe während des ganzen Kolbenlaufes der Eintritt gestattet ist, oder ob der Cylinder bei jedem Hube nur theilweise gefüllt wird, wobei dann der Dampf den Kolben während des letzten Theils seines Weges vermöge seiner Expansivkraft zu bewegen hat. Derartige Maschinen heißen Expansionsmaschinen, im Gegensatze zu den Volldruckmaschinen, die mit ganzer Dampffüllung arbeiten. Der wirksam gewesene Dampf wird von

dem Cylinder aus entweder in einen Raum, den Condensator, geleitet, in welchem der Dampf niedergeschlagen oder condensirt wird, oder man läßt den Dampf unmittelbar in die Atmosphäre treten. Hiernach sind zu unterscheiden:

Maschinen mit oder ohne Condensation. In Bezug auf die äußere constructive Anordnung bei den Maschinen hat man:

a. Maschinen mit Balancier (Fig. 57). AB ist der Balancier, AE die Verbindung desselben mit der Kolbenstange, D der Cylinder, S das Schwungrad, MK der Krummzapfen, mittelst welchen die Bewegung des Balanciers an die rotirende Welle M übertragen wird.

b. Maschinen ohne Balancier mit feststehendem Cylinder (Fig. 58).

Fig. 57.

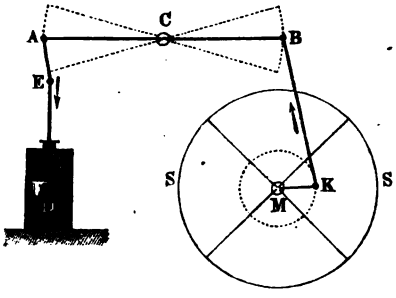
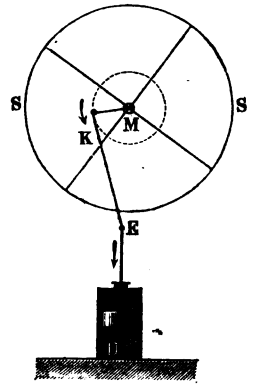
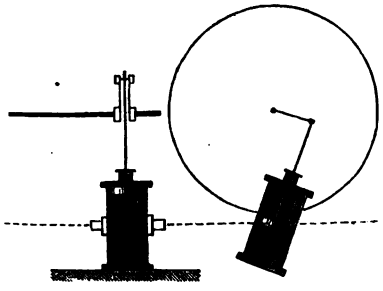


Fig. 58.



c. Maschinen ohne Balancier mit schwingendem Cylinder (oscillirende Maschinen) (Fig. 59). Der Cylinder schwingt um zwei Zapfen, an welchen ein besonderer Leitungsapparat angebracht ist, damit sich die Kolbenstange nur in Richtung ihrer Achse bewegen kann.

Fig. 59.



Nach der Art der Verwendung sind endlich zu unterscheiden:

1. Landmaschinen, stationär oder transportabel.
2. Schiffsmaschinen.
3. Locomotiven.

40. Zu jeder Kolbenmaschine gehören die folgenden fünf Haupttheile, die sich je nach der Art der Maschine in verschiedener Construction an derselben finden.

1. Der Dampferzeuger oder der Dampfkessel.

2. Der Cylinder mit dem Kolben, der Kolbenstange, dem Deckel und Boden.

3. Die Steuerung, das ist die Vorrichtung, wodurch die regelmäßige Vertheilung des Dampfes bewirkt wird.

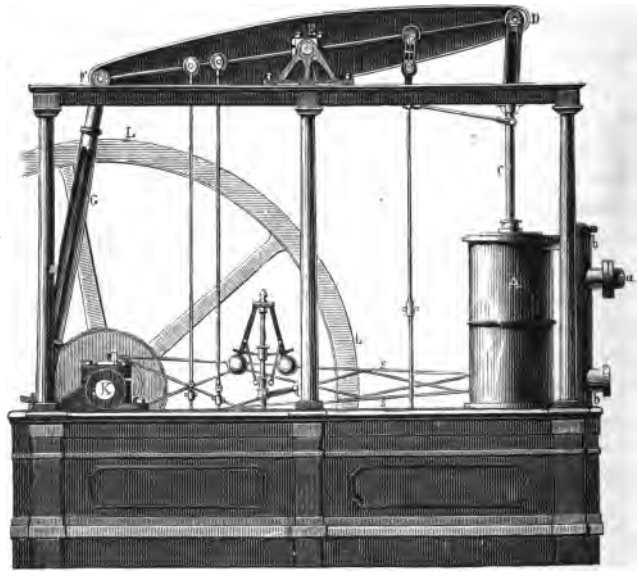
4. Die Zwischenmaschine. Zu dieser gehört: Triebstange, Balancier, Parallelogramm, Krummzapfen, Schwungrad mit Welle u. a. m.

5. Verschiedene Pumpen zur Kesselspeisung.

Die folgende Beschreibung ist aus dem trefflichen Buche von Scholl „Führer des Maschinisten“ (bei Friedrich Vieweg und Sohn in Braunschweig) entnommen, welches wir allen Technikern auf das Angelegentlichste empfehlen.

Die Figuren 60 und 61 verdeutlichen eine doppeltwirkende Nieder-

Fig. 60.



druckdampfmaschine, die sogenannte Watt'sche Maschine. Alle Maschinen von niederem Druck arbeiten mit Condensation, die in dem Condensator durch eingespritztes Wasser vorgenommen wird. Wenn das eingespritzte Wasser immer so kalt wäre und so reichlich in den Condensator gebracht werden könnte, daß das nach der Condensation vorhandene Wasser eine nicht viel höhere Temperatur als 0° C. erhielte, so würde eine Luftverdünnung im Condensator eintreten, welche dem luftleeren Raume sehr nahe käme. In Folge dessen würde die vom Condensator abgewendete Kolbenfläche auf jeden Quadratmeter durch die atmosphärische Luft einen Druck von nahezu 10 334 Kilogramm erleiden, der sich durch den Ueberdruck des Dampfes noch vergrößerte. Es läßt sich aber

das Wasser nicht von so niedriger Temperatur in den Condensator schaffen, und außerdem wird durch das Wasser selbst mechanisch gemengte atmosphärische Luft mit in den Condensator geschafft. Hierdurch bleibt immer ein dem wirksamen Dampfdruck schädlicher Druck auf der Gegenseite des Kolbens übrig, der theils aus dem Drucke der vorhandenen Luft, theils aus der Spannung des nicht condensirten Dampfes hervorgeht, und dessen Größe nicht leicht unter 0,1 Atmosphäre herunterzubringen sein wird. Nach erfolgter Condensation schafft man das Wasser und die Luft aus dem Condensator vermittelst einer Saug- und Hebepumpe, welche Luftpumpe genannt wird. Als Eigenthümlichkeiten der Niederdruckmaschinen finden sich hiernach der Condensator, der Einspritzhahn und die Luftpumpe.

Die Fig. 60 giebt eine Ansicht einer Watt'schen Dampfmaschine, und Fig. 61 (a. f. S.) den Durchschnitt derselben in größerem Maßstabe mit Fortlassung des Balanciers. *A* ist der Dampfcylinder, oben und unten dampfdicht geschlossen. *B* der Kolben, der mit Hanfflechten gepackt und an die Cylinderwand schließend gemacht ist. Die Kolbenstange *O* geht durch die Stopfbüchse des oberen Deckels an das Parallelogramm und überträgt durch dieses die auf- und niedergehende Bewegung an den Balancier *DEF*. *E* ist die mittlere Drehachse des Balanciers, bei *F* ist die Triebstange *G* angehängt, welche an die Warze *H* des Krummzapfens faßt, der auf der Schwungradwelle *K* befestigt ist. Vermittelst der Schubstange und der Kurbel wird die auf- und niederschwingende Bewegung des Balanciers *F* in die drehende der Kurbelwelle verwandelt. *LL* bezeichnen das Schwungrad. Der Balancier ruht in Zapfenlagern auf einer Gesimsplatte, die von sechs Säulen getragen wird. Diese Säulen finden ihre untere Befestigung an dem eisernen Kasten, welcher sämmtlichen Maschinentheilen als Traggerüst dient, und welcher auf einem Steinfundament sicher und richtig befestigt ist.

Das Dampfrohr *a* bringt den Dampf vom Kessel in die Dampfbüchse *b*; zwischen beiden liegt die Regulirungs- oder Drosselklappe. In der Dampfbüchse bewegt sich der Schieber vor den Mündungen der Dampfwege *auf* und *ab*; *d* ist ein Verbindungsrohr zwischen dem Cylinder und dem Condensator *D*, *g* ist der Einspritzhahn für kaltes Wasser, *E* die Luftpumpe und *ii* die Klappenventile ihres Kolbens; *k* eine Klappe zwischen Luftpumpe und Condensator, Fußventil genant; *F* Ausgußkasten der Lumftpumpe, in welchen das Saugrohr *n* der Speisepumpe mündet; *o* und *o* sind Ventile dieser Pumpe, *p* das Druckrohr, welches nach dem Dampfkessel führt. Der ganze Condensationsapparat steht in der mit Wasser gefüllten Hälfte des großen Kastens. Dieses kalte Wasser wird durch die Pumpe *q* gefördert und bei *r* ausgegossen. *xyz* bezeichnen die Theile des Regulators, sein Triebwerk von der Welle *K* aus und seine Verbindung mit der Drosselklappe.

41. Von der Hochdruckmaschine sowie auch von der Mitteldruckmaschine ohne Condensation erhält man ein Bild, wenn man die der Niederdruckmaschine, zum Condensator gehörigen eigenthümlichen Theile fortläßt und den Dampf nach seiner Wirkung in die Atmosphäre treten läßt. Hierbei

iſt es nothwendig, daß der arbeitende Dampf eine zwei-, drei- und mehrfach ſtärkere Spannung als die Atmoſphäre habe. Was bei den Niederdruckmaſchi-

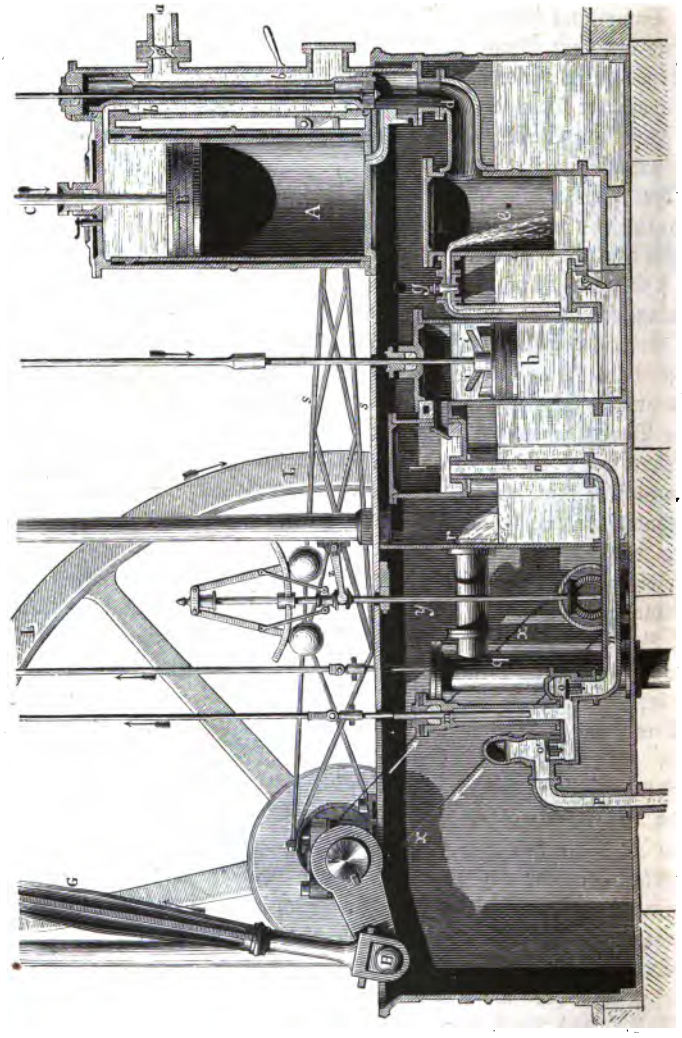
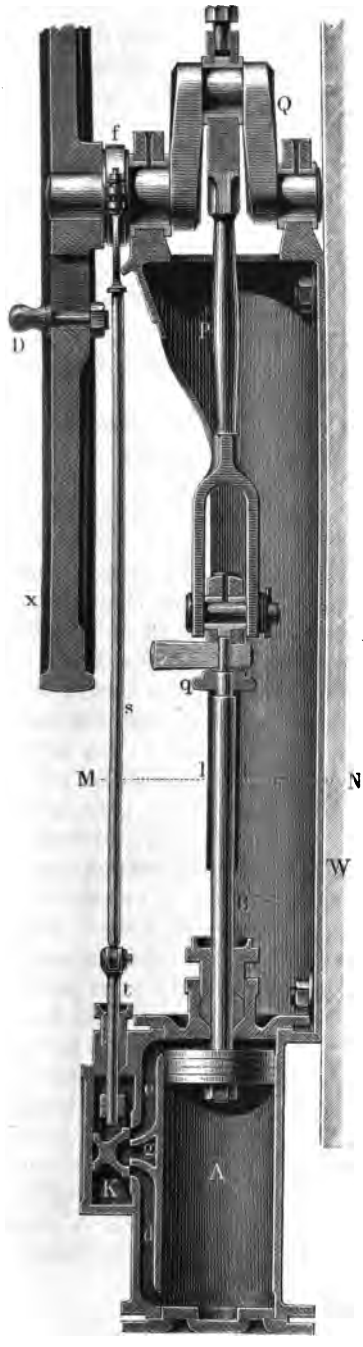


Fig. 61.

nen durch die Condenſation gewonnen wurde, muß hier die größere Dampfſpannung bewirken.

In den Figuren 62, 63 und 64 iſt der Durchſchnitt einer Hochdruckmaſchine ohne Balancier dargeſtellt. *A* iſt der Dampfcylinder, unten mit einer Fußplatte, oben durch einen Deckel verſchloſſen, durch deſſen Stopfbüchſe die

Fig. 64.



Kolbenſtange *B* geht. Dieſe trägt ein Querhaupt *q*, welches mittelſt zweier prismatiſcher Lager an den Leitſtangen *ll* gerade und parallel mit der Cylinderachſe geführt wird. *P* iſt die Schubſtange, welche an den Krummzapfen *Q* angreift, der auf der Schwungradwelle feſtſitzt, *X* iſt das Schwungrad, das zugleich als Riemſcheibe dient und mit einer verſtellbaren Warze *D* verſehen iſt, die zum Anhängen einer Pumpen-

Fig. 62.

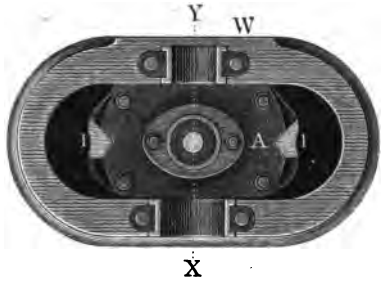
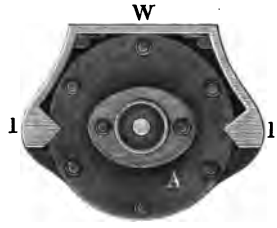


Fig. 63.



ſtange und dergleichen benutzt werden kann. *K* iſt die Dampfkammer. Aus derſelben führt der Dampfweg *d* unter den Kolben, *e* über denſelben; der mittlere Dampfcanal *g* mündet in die atmoſphäriſche Luft. Die Steuerung geſchieht durch den beweglichen Schieber mittelſt des Excentriks *f* durch die Stangen *s* und *t*. Bei der in der Figur ge-

zeichneten Stellung des Schiebers beginnt der Dampf soeben über den Kolben zu strömen. Die Maschine kann an der Wand des Maschinenraumes durch vier Ankerbolzen befestigt werden. Die hierzu dienende Wandplatte W ist nebst den Gradführungen und den unteren Lagerhälften für die Schwungradwelle C mit dem Dampfcylinder A aus einem Stück gegossen. Die Maschine hat eine Leistung von 1 Pferdestärke.

Durchmesser des Kolbens	0,137 Meter,
Dampfspannung	$2\frac{1}{2}$ Atmosphäre,
Hubhöhe des Kolbens	0,262 Meter,
Anzahl der Kolbenspiele in einer Minute .	100

(siehe Skizzenbuch für Ingenieure von Wiebe, Heft 3).

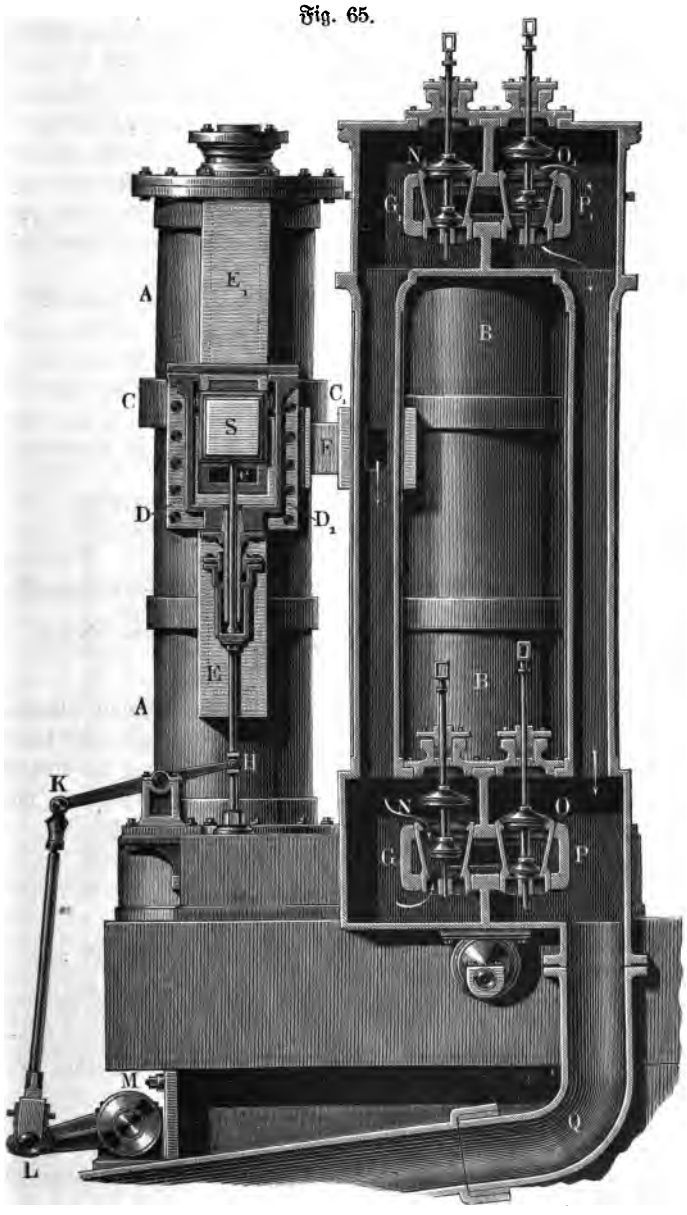
Ein großer Gewinn ist bei den Dampfmaschinen durch Anwendung der Expansion oder der Dampfabsperrung vor vollendetem Kolbenlaufe erzielt worden. Die Expansionswirkung des Dampfes kann auf zweifache Weise möglich gemacht werden.

In den Maschinen mit einem Cylinder wird durch die Steuerung oder durch andere Vorrichtungen der Dampfzufluß unterbrochen, ehe der Kolben seinen vollen Weg zurückgelegt hat.

In den Maschinen mit zwei Cylindern von ungleicher Größe füllt sich der kleinere ganz mit gespanntem Dampfe, und dieser gebrauchte Dampf strömt nach dem Kolbenwechsel in den zweiten drei- bis fünfmal so großen Cylinder, dehnt sich dort zu Dampf von sehr niedriger Spannung aus und wird zuletzt noch condensirt. Es sind dies die sogenannten Woolf'schen Maschinen (Fig. 65), welche Arthur Woolf schon im Jahre 1804 construirte, die aber erst in neuerer Zeit mit verbesserten Steuerungsvorrichtungen in Anwendung gekommen sind. Der Dampf kommt, wie schon angegeben, nach und nach in den beiden Cylindern AA und BB, welche das Verhältniß $1:3\frac{1}{2}$ bis $1:5$ haben, zur Wirkung. Befinden sich die Cylinder seitlich nebeneinander an einer Balanciermaschine, so haben die Kolben gleiche Schublänge. Steht aber der kleinere Cylinder, wie es gewöhnlich der Fall ist, zwischen dem großen Cylinder und der Mitte des Balanciers, so ist dessen Kolbenhub geringer als der des großen. In der hier angegebenen Figur wird die Steuerung in dem kleinen Cylinder durch einen Schieber S, in dem großen Cylinder dagegen durch die Ventile NN_1 und OO_1 hervorgebracht. Der Dampf tritt aus dem Zuleitungsrohre in den um den kleinen Cylinder ringförmig herum laufenden Canal CC_1 und gelangt von hier aus durch die Oeffnungen dd in die Dampfkammer DD_1, in welcher sich, wie bei allen Schiebersteuerungen, drei Oeffnungen befinden, welche mit den drei Dampfcanälen E, E_1 und F communiciren. Durch den Canal E wird der Dampf unter den Kolben des kleinen Cylinders, durch den Canal E_1 über denselben und durch F in den größeren Cylinder BB geleitet. Bei der in der Figur angedeuteten Stellung strömt frischer Dampf unter den Kolben des Cylinders AA, während der oberhalb desselben befindliche, bereits in Wirksamkeit gewesene, durch die vom Schieber S verdeckte Oeffnung in den Canal F gelangt. Von hier aus strömt dieser Dampf in

den großen Cylinder und kommt durch das bei der jetzigen Schieberſtellung geöffnete Ventil *N* ebenfalls unter dem Kolben des großen Cylinders zur Wirkſamkeit, wo er die Kolbenbewegung theilweiſe durch Expanſion vermittelt. Der oberhalb des Kolbens im Cylinder *BB* von dem letzten Kolbenſpiele her

Fig. 65.



befindliche Dampf gelangt durch das ebenfalls geöffnete Ventil O_1 und durch das Rohr Q in den Condensator. Die äußere Steuerung, d. h. der Bewegungsmechanismus für Schieber und Ventile, muß hiernach in der Weise angeordnet sein, daß während der Communication des Dampfes mit dem Canale E die Ventile N und O_1 geöffnet sind, beim Kolbenwechsel dagegen, wenn der frische Dampf durch den Canal E_1 in den kleinen Cylinder strömt, müssen sich N_1 und O öffnen. Die Ventile NN_1 und OO_1 befinden sich in zwei von einander getrennten Dampfkammern. Aus der Beschreibung ist ersichtlich, daß sich beide Kolben gleichzeitig von unten nach oben und umgekehrt bewegen, daß der Dampf fortwährend mit seiner vollen Kraft gegen eine der Flächen des kleinen Kolbens wirkt, während eine der Flächen des großen Kolbens mit dem Condensator in Verbindung steht. Die entgegengesetzten Flächen aber erfahren während derselben Zeit eine in dem Maße abnehmende Dampfspannung als die Expansion des Dampfes fortschreitet.

42. Die Leistung einer Volldruck-Dampfmaschine zu berechnen. Die Kolbenfläche enthalte F Quadratmeter Inhalt, p sei der mittlere wirksame Dampfdruck, q der mittlere Gegendruck in Kilogrammen auf jeden Quadratmeter, l_1 sei die Länge eines Kolbenhubes in Metern, und in der Minute mögen u Kolbenspiele gemacht werden. Für diese Annahmen ist der wirksame Druck auf den Kolben $= F(p - q)$, daher die Arbeitgröße für jeden Kolbenhub $= F(p - q)\,l_1$ und die Arbeitstärke:

$$L^{=} = F(p - q) \cdot \frac{2\,l_1\,u}{60} = \frac{l_1\,u}{30}\,F(p - q).$$

Berücksichtigt man, daß $F \cdot \frac{l_1\,u}{30}$ das in einer Secunde verbrauchte Dampfquantum in Kubikmetern vorstellt, welches wir mit V bezeichnen wollen, so ist

$$L^{=} = V(p - q)^{\frac{km}{=}}$$

Führen wir anstatt der Dampfdrucke p und q die Dampfspannungen in Atmosphären ein, setzen demnach $p = 10334\,a$, unter a die Anzahl der Atmosphären verstanden, so ist für Maschinen ohne Condensation $q = 10334$, für Maschinen mit Condensation dagegen $q = 10334 \,.\, 0{,}1$ zu nehmen, und wir erhalten dadurch

für Maschinen ohne Condensation

$$L^{=} = 10334\,V(a - 1)^{\frac{km}{=}},$$

für Maschinen mit Condensation

$$L^{=} = 10334\,V(a - 0{,}1)^{\frac{km}{=}}.$$

Für $F = 0{,}174234$ Quadr.-Mtr.; $l_1 = 0{,}942$ Mtr.; $a = 3{,}5$; $u = 24$ ist $V = 0{,}131303$ Kubikmeter, und

$L^{=} = 3392{,}3^{\frac{km}{=}} = 45{,}23$ Pferdestärken für Maschinen ohne Condensation,

$L^{=} = 4613{,}4^{\frac{km}{=}} = 61{,}5$ Pferdestärken für Maschinen mit Condensation.

43. Bei der Berechnung der Leistung für eine Expansions-Dampfmaschine ist das Gesetz maßgebend, nach welchem sich während der Expansion die Dampfspannung ändert.

Erstes Expansionsgesetz. Die Dämpfe behalten während der Expansion dieselbe Temperatur, und folgen hinsichtlich des Zusammenhanges zwischen Druck p und specifischem Volumen v genau dem Gesetze von Mariotte:

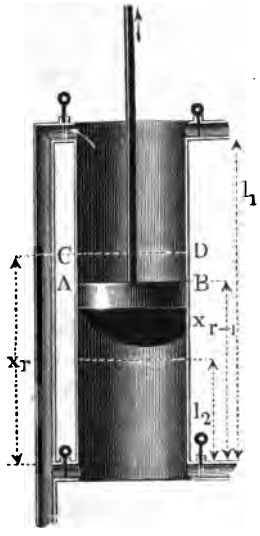
$$p v = \frac{p}{\gamma} = \text{constant}.$$

Nachdem der Kolben den Weg l_2 zurückgelegt, werde der Dampf abgesperrt, dann ist bei Benutzung der Bezeichnungen aus der vorigen Aufgabe die Arbeitgröße während der Dampfeinströmung:

$$L' = F(p - q) l_2.$$

Um die Arbeitgröße während der Expansionsperiode zu finden, nehmen wir an, daß bei Zurücklegung eines unendlich kleinen Kolbenweges die Dampfspannung constant bleibt. Für einen beliebigen Punkt der Expansion sei die Stellung des Kolbens durch AB (Fig. 66) angedeutet, der dabei zurückgelegte Weg sei x_{r-1}, die gerade herrschende Spannung p_{r-1}, dann ist die von dem Kolben verrichtete Arbeitgröße beim Durchlaufen des unendlich kleinen Weges $AC = x_r - x_{r-1}$ gleich

Fig. 66.



$$F p_{r-1} (x_r - x_{r-1}).$$

Zur Bestimmung von p_{r-1} benutzen wir die zu Grunde gelegte Gleichung:

$$F l_2 p = F . x_{r-1} . p_{r-1} = F l_1 p_1,$$

wenn p_1 die Spannung des Dampfes zu Ende der Expansion bezeichnet.

Daher die obige Arbeit gleich

$$F p l_2 \frac{x_r - x_{r-1}}{x_{r-1}}.$$

Die Summation dieser unendlich kleinen Arbeitgrößen, welche in Aufgabe 56 des ersten Capitels ausgeführt worden ist, liefert die Expansionsarbeit L'' des Dampfes, wobei noch darauf Rücksicht zu nehmen, daß auch während dieser Periode der Gegendruck q zu überwinden ist:

$$L'' = F p l_2 ln \frac{l_1}{l_2} - F q (l_1 - l_2).$$

Die von dem Dampfe während eines Kolbenlaufes verrichtete Arbeitgröße L ist daher:

$$L = F p l_2 \left\{1 + ln \frac{l_1}{l_2} - \frac{q\, l_1}{p\, l_2}\right.$$

Für u Kolbenspiele in der Minute ergiebt sich dann die Arbeitstärke:

$$L^{=} = F \frac{l_2\, u}{30}\, p \left\{1 + ln \frac{l_1}{l_2} - \frac{q\, l_1}{p\, l_2}\right\}^{\text{km}}_{=}$$

$$L^{=} = V p \left\{1 + ln \frac{l_1}{l_2} - \frac{q\, l_1}{p\, l_2}\right\}^{\text{km}}_{=}$$

wenn V das in einer Secunde verbrauchte Dampfquantum in Kubikmetern von der Spannung p bezeichnet. Setzen wir wieder $p = 10334\, a$, $q = 10334\, a'$ und nennen $\frac{l_2}{l_1}$ das Expansionsverhältniß, welches durch ε wiedergegeben werden soll, so ist:

$$L^{=} = 10334\, V a \left\{1 + ln \frac{1}{\varepsilon} - \frac{a'}{a\, \varepsilon}\right\}^{\text{km}}_{=}.$$

Bei dieser Entwickelung ist vorausgesetzt, daß die Temperatur T des Dampfes während der Expansion constant bleibe, daß also dem Dampfe eine Wärmemenge Q gleich $A . L_1$ für jeden Kolbenhub zuzuführen ist, unter A den Wärmewerth der Arbeitseinheit und unter L_1 die durch Expansion verrichtete Arbeit $F p l_2 ln \frac{l_1}{l_2}$ verstanden.

Für $F = 0{,}174234\,\square^{\text{m}}$.; $l_1 = 0{,}942^{\text{m}}$; $\varepsilon = 1/3$; $a = 3{,}5$; $a' = 1$; $u = 24$ ist:

$V = 0{,}043768$ Kubikmeter,

$L^{=} = 1965{,}3^{\text{km}}_{=} = 26{,}2$ Pferdestärken,

$Q = 5{,}13$ Wärmeeinheiten.

Zweites Expansionsgesetz. Die Dämpfe verhalten sich im gesättigten Zustande genau so wie permanente Gase, d. h. sie folgen hinsichtlich des Zusammenhanges zwischen Druck p, specifischem Volumen v und der Temperatur t resp. T dem Gesetze von Mariotte und Gay-Lussac:

$$p v = \frac{p}{\gamma} = R T.$$

Da nun ferner beim gesättigten Wasserdampf einer bestimmten Temperatur T auch ein ganz bestimmter Druck p entspricht, so kann man in der obigen Gleichung die Temperatur T durch die Spannkraft p ausdrücken, und erhält dann eine einfache Beziehung zwischen dem Druck p in Kilogrammen pro $\square^{\text{m}}$ und dem specifischen Volum v. Der auf diese Weise erhaltene Werth von v ist von Navier durch folgende empirische Formel ersetzt worden:

Für niedrigen Druck $v = \frac{20000000}{1200 + p}$

Für hohen Druck $v = \frac{21232000}{3020 + p}$

Allgemein: $v = \frac{\alpha}{\beta + p} = \frac{1}{\gamma}$.

Unter Benutzung dieser Formel von Navier hat de Pambour zuerst die Leistung einer Expansionsdampfmaschine bestimmt.

Indem wir die obigen Bezeichnungen anwenden, ist die Arbeitgröße vor der Expansion:

$$L' = Fpl_2,$$

die Expansionsarbeit während eines unendlich kleinen Weges:

$$Fp_{r-1}(x_r - x_{r-1}),$$

und da nach dem Gesetze von Navier

$$Fl_2(\beta + p) = Fl_1(\beta + p_1) = Fx_{r-1}(\beta + p_{r-1})$$

ist, so ist diese kleine Expansionsarbeit:

$$Fl_2(\beta + p)\frac{x_r - x_{r-1}}{x_{r-1}} - F\beta(x_r - x_{r-1}).$$

Die Summation dieser unendlich kleinen Arbeitgröße liefert die Expansionsarbeit des Dampfes:

$$L'' = Fl_2(\beta + p)ln\frac{l_1}{l_2} - F\beta(l_1 - l_2).$$

Berücksichtigt man noch die zu überwindende Arbeit des Gegendruckes q gleich Fql_1, so ist die Arbeit pro Kolbenhub:

$$L = Fpl_2 + Fl_2(\beta + p)ln\frac{l_1}{l_2} - F\beta(l_1 - l_2) - Fql_1$$

$$= Fl_2(\beta + p)\left(1 + ln\frac{l_1}{l_2}\right) - Fl_1(\beta + q),$$

$$L = F(\beta + p)l_2\left\{1 + ln\frac{l_1}{l_2} - \frac{l_1}{l_2}\frac{\beta + q}{\beta + p}\right\},$$

daher die Arbeitstärke bei u Kolbenspielen in der Minute:

$$L^{m} = F\frac{ul_2}{30}(\beta + p)\left\{1 + ln\frac{l_1}{l_2} - \frac{\beta + q}{\beta + p}\frac{l_1}{l_2}\right\},$$

$$L^{m} = V(\beta + p)\left\{1 + ln\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\beta + q}{\varepsilon(\beta + p)}\right\}^{km}$$

Für $\beta = 0$ geht diese Formel in die auf dem Gesetze von Mariotte beruhende über. Es sei $F = 0{,}174234\,\square^{m}$; $l_1 = 0{,}942^{m}$; $\varepsilon = 1/3$; $p = 10334.3{,}5$; $q = 10334$; $u = 24$; $\beta = 3020$, dann ist:

$\varepsilon(\beta + p) = (\beta + p).\frac{l_2}{l_1} = 13063$ Kilogrm.; $V = 0{,}043768$ Kbkm.,

$L^{m} = 1846{,}2^{km} = 24{,}6$ Pferdestärken.

Drittes Expansionsgesetz. Die Spannkräfte verhalten sich umgekehrt, wie eine Potenz der specifischen Volumina:

$$pv^m = p_1 v_1^m.$$

Dieser Werth von m ist von der Constitution des Wasserdampfes abhän-

gig, und zwar iſt nach Zeuner für überhitzten Dampf $m = 1/3$, für geſättigten Waſſerdampf ohne Beimiſchung von Waſſer $m = 1{,}135$, für geſättigten Waſſerdampf, der auf 1 Kilogramm Miſchung y Kilogramm Dampf enthält, $m = 1{,}035 + 0{,}1\,y$, ſo lange y mehr als 0,7 Kilogramm beträgt. Dieſes Geſetz entſpricht dem von Poiſſon für die Gaſe aufgeſtellten Geſetze (§. 14) bei plötzlich ſtattfindenden Ausdehnungen, unter der Vorausſetzung, daß weder Wärme zugeführt noch Wärme entzogen wird, und iſt daſſelbe zuerſt von Rankine aufgeſtellt worden.

Für die obigen Bezeichnungen iſt die Arbeitgröße des Dampfes vor der Expanſion gleich Fpl_2, die Arbeit des Gegendrucks Fql_1, die Expanſionsarbeit während eines unendlich kleinen Weges:

$$Fp_{r-1}\,(x_r - x_{r-1}).$$

Nach dem an die Spitze geſtellten Geſetze iſt aber

$$p\,(Fl_2)^m = p_{r-1}\,(Fx_{r-1})^m = p_1\,(Fl_1)^m.$$

Daher die Expanſionsarbeit gleich $Fpl_2{}^m \dfrac{x_r - x_{r-}}{x_{r-1}^m}$, oder kürzer, wenn wir $x_r - x_{r-1} = \dfrac{x}{n}$ und $x_{r-1} = x$ ſetzen, unter n eine bis ins Unendliche wachſende Zahl verſtanden:

$$Fpl_2{}^m\, x^{-m}.\frac{x}{n}.$$

Die Summe dieſer unendlich kleinen Arbeitgrößen liefert die Expanſionsarbeit des Dampfes, und zwar handelt es ſich dabei um die Summation der unendlich ſchmalen Rechtecke von der Breite $\dfrac{x}{n}$ und der veränderlichen Höhe x^{-m}. Eine derartige Summation iſt in Aufgabe 31 des erſten Capitels, Theil I. ausgeführt worden, und zwar iſt dieſe Summe in den Grenzen von $x = 0$ bis $x = x$:

$$\frac{1}{-m+1}\,x^{-m+1},$$

in den Grenzen von $x = x$ bis $x = x_1$ daher:

$$\frac{1}{-m+1}\,x_1{}^{-m+1} - \frac{1}{-m+1}\,x^{-m+1}.$$

Es iſt aber in unſerem vorliegenden Falle $x_1 = l_1$ und $x = l_2$, daher erhalten wir:

$$\frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{l_2{}^{m-1}} - \frac{1}{l_1{}^{m-1}}\right),$$

und die ganze Expanſionsarbeit

$$= \frac{Fpl_2{}^m}{m-1}\left(\frac{1}{l_2{}^{m-1}} - \frac{1}{l_1{}^{m-1}}\right).$$

Die Arbeit für jeden Kolbenhub ist darnach:

$$L = Fpl_2 - Fql_1 + \frac{Fpl_2{}^m}{m-1}\left(\frac{1}{l_2{}^{m-1}} - \frac{1}{l_1{}^{m-1}}\right)^{\text{km}}$$

$$= Fpl_2\left\{1 + \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m-1}\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^{m-1} - \frac{q}{p}\frac{l_1}{l_2}\right\}$$

und die Arbeitstärke:

$$L^{=} = F\frac{l_2 u}{30}p\left\{1 + \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m-1}\varepsilon^{m-1} - \frac{q}{p\varepsilon}\right\}$$

$$= Vp\left\{1 + \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m-1}\varepsilon^{m-1} - \frac{q}{p\varepsilon}\right\}^{\frac{\text{km}}{=}}$$

Berechnen wir auch nach dieser Formel das obige Beispiel, indem wir annehmen, daß der Dampf 10 Proc. Wasser enthalte, den Werth von m nach der obigen Angabe $= 1{,}035 + 0{,}1 \,.\, 0{,}9 = 1{,}125 = \frac{9}{8}$:

$$L^{=} = 1851{,}2^{\frac{\text{km}}{=}} = 24{,}7 \text{ Pferdestärken.}$$

Der im Vorstehenden entwickelte theoretische Werth der Arbeitstärke $L^{=}$ wird hauptsächlich durch die Kolbenreibung sowie durch die Abkühlung und den Druckverlust heruntergezogen, welchen der Dampf beim Uebergang aus dem Kessel in den Cylinder erleidet. Andererseits hat aber auch das zur Anwendung gebrachte Maschinensystem sowie die Stärke der Maschine auf das Verhältniß zwischen der nutzbaren und rohen Arbeitstärke Einfluß. Es erscheint daher zweckmäßig, dieses Verhältniß bei den Dampfmaschinen mit Constructionscoefficient anstatt mit Nutzeffect, wie es gewöhnlich geschieht, zu bezeichnen. In der folgenden Tabelle sind diese Constructionscoefficienten η für die hauptsächlich zur Anwendung kommenden Dampfmaschinensysteme zusammengestellt. Es ist, mit $L_n^{=}$ und $L_a^{=}$ die nutzbare und rohe Arbeitstärke des Dampfes bezeichnet, $\eta = \frac{L_n^{=}}{L_a^{=}} = \frac{N_n}{N_a}$, unter N die entsprechenden Pferdestärken verstanden.

Theoretische Arbeitstärke in Pferdestärken N_a.	Constructionscoefficient η bei			
	Niederdruckmaschinen.	Mitteldruckmaschinen mit zwei Cylindern.	Hochdruckmaschinen mit Condensation.	Hochdruckmaschinen ohne Condensation.
1	0,32	—	0,25	0,25
2	0,36	—	0,30	0,31
4	0,40	—	0,34	0,35
8	0,43	—	0,38	0,39
16	0,46	0,42	0,41	0,43
32	0,48	0,48	0,44	0,48
64	0,49	0,54	0,45	0,50
128	0,50	0,58	0,47	0,52

Drittes Capitel.

Ueber den Ausfluß der Flüssigkeiten aus Gefäßen und Röhren.

25 Bei den folgenden Untersuchungen nehmen wir an, daß der Ausfluß der Flüssigkeit unter *constantem Druck* erfolge. Die Bewegung mag schon eine Zeit lang gedauert und sich deshalb ein *permanenter Bewegungszustand* gebildet haben, in der Weise, daß in irgend einem bestimmten Punkte der Flüssigkeit *immer derselbe Druck* und *dieselbe Geschwindigkeit* für das durch den Punkt gehende Flüssigkeitstheilchen stattfindet.

Die zweite Voraussetzung, die wir machen und die unter dem Namen: „*Die Hypothese der parallelen Schichten*“ bekannt ist, besteht darin, daß die sämmtlichen Flüssigkeitstheilchen in *gewissen ebenen Querschnitten* des Gefäßes oder der Röhre *eine gleich große* und *zwar zu denselben normale Geschwindigkeit* besitzen und daß in *sämmtlichen Punkten dieser Querschnitte derselbe Druck* stattfindet.

Bezeichnen wir zwei solcher Querschnitte mit F_1 und F_2, die hier herrschenden Geschwindigkeiten mit v_1 und v_2, die Dichtigkeiten mit γ_1 und γ_2, und berücksichtigen wir noch, daß die zufließende Flüssigkeitsmasse weiter geschafft werden, ihren Zusammenhang behalten muß, und nicht theilweise zurückbleiben kann, so ergiebt sich aus diesen Voraussetzungen: Die in derselben Zeit durch die auf die oben angegebene Weise bestimmte Querschnitte durchfließende Flüssigkeitsmasse hat immer dasselbe Gewicht:

$$F_1 v_1 \gamma_1 = F_2 v_2 \gamma_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

Bei den tropfbarflüssigen Körpern, wo durchgehends dieselbe Dichtigkeit stattfindet, kann noch in der erhaltenen Formel $\gamma_1 = \gamma_2$ gesetzt werden und wir erhalten daher für diese Flüssigkeiten:

$$F_1 v_1 = F_2 v_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

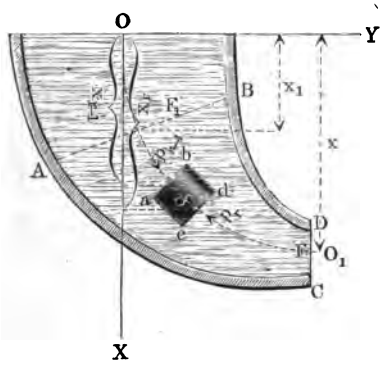
oder

$$F_1 : F_2 = v_2 : v_1,$$

d. h. die Querschnitte sind den Geschwindigkeiten des durchfließenden Wassers umgekehrt proportional.

Um eine Beziehung zwischen dem Drucke und der zugehörigen Geschwindig- 26
keit für die einzelnen Flüssigkeitstheilchen eines auf die oben angedeutete Weise construirten Querschnitts zu erhalten, untersuchen wir die Bewegung eines Flüssigkeitstheilchens zwischen zwei Querschnitten AB und CD in dem nebenstehenden Gefäße (Fig. 67). Das Flüssigkeitselement $abcd$, ein Cylinder von der Grundebene f und der Höhe δ, bewege sich in der Curve OO_1. Die durch O gelegte Horizontalebene sei die ZY Ebene und die XAchse sei mit ihrem positiven Theile nach unten gerichtet. Die Druckhöhen der Grundebenen ab und cd bezeichnen wir durch x_{r-1} und x_r, die hier stattfindenden Drucke auf die Flächeneinheit seien p_{r-1} und p_r und die zugehörigen Geschwindigkeiten v_{r-1} und v_r. Bei der Bewegung sehen wir von allen Hindernissen vorläufig ab, und nehmen auch an, daß die Flüssigkeit keine nutzbare Arbeit zu verrichten habe. Für diese Voraussetzungen reducirt sich Formel 160, Theil I., auf

Fig. 67.



$$\Sigma P_1 s_1 - \Sigma \tfrac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = 0.$$

Die von dem Flüssigkeitselement verrichtete Arbeitgröße $\Sigma P_1 s_1$ besteht aus der seines Gewichtes, indem der Schwerpunkt sich um $x_r - x_{r-1}$ tiefer bewegt, und aus der Arbeitgröße der Druckdifferenz $p_{r-1} - p_r$.

Es sei γ die Dichtigkeit der Flüssigkeit an dieser Stelle, so ist

$$\Sigma P_1 s_1 = f\delta\gamma\,(x_r - x_{r-1}) + f\delta\,(p_{r-1} - p_r),$$

die durch Aenderung der Geschwindigkeit verbrauchte Arbeitgröße $\Sigma \tfrac{1}{2} m_1 (v_2^2 - v_1^2)$ ist im vorliegenden Falle

$$\frac{1}{2}\frac{f\delta\gamma}{g}(v_r^2 - v_{r-1}^2).$$

Wir haben hiernach die Gleichung:

$$f\delta\gamma\,(x_r - x_{r-1}) + f\delta\,(p_{r-1} - p_r) - \frac{1}{2}\frac{f\delta\gamma}{g}(v_r^2 - v_{r-1}^2) = 0,$$

oder

$$x_r - x_{r-1} + \frac{p_{r-1} - p_r}{\gamma} = \frac{v_r^2 - v_{r-1}^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

durch welche die während eines Zeitmomentes stattfindende Bewegung eines Flüssigkeitselementes unter den gemachten Voraussetzungen bestimmt ist.

Die erhaltene Grundgleichung gilt für sämmtliche Flüssigkeiten und es sind darin die nothwendigen Substitutionen zu machen, wenn sie auf specielle Flüssig-

keiten in Anwendung gebracht werden soll. Zwischen den gewählten Querschnitten AB und CD des Gefäßes, von dem Flächeninhalte F_1 und F, sei die Hypothese der parallelen Schichten vollkommen richtig. Wir suchen jetzt die Gleichung, die für die Bewegung der Flüssigkeitstheilchen zwischen diesen Querschnitten benutzt werden kann, indem wir, da es sich nicht mehr um eine sehr kleine Bewegung handelt, auf die Art der Flüssigkeit Rücksicht nehmen. Die zu den Querschnitten gehörigen Größen bezeichnen wir mit p, x_1, v_1, und q, x, v.

A. Ausfluß einer tropfbaren Flüssigkeit, insbesondere des Wassers.

27 Die Grundgleichung (36) behält in der aufgestellten Form für die sämmtlichen Flüssigkeitstheilchen der Curve $O O_1$ ihre Richtigkeit, da die Dichtigkeit γ durch die ganze Flüssigkeit constant ist. Wir erhalten daher für die einzelnen Flüssigkeitselemente folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
x_2 - x_1 &+ \frac{p - p_1}{\gamma} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \\
x_3 - x_2 &+ \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{v_3^2 - v_2^2}{2g} \\
x_4 - x_3 &+ \frac{p_2 - p_3}{\gamma} = \frac{v_4^2 - v_3^2}{2g} \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
x_n - x_{n-1} &+ \frac{p_{n-1} - p_n}{\gamma} = \frac{v_n^2 - v_{n-1}^2}{2g} \\
x - x_n &+ \frac{p_n - q}{\gamma} = \frac{v - v_n^2}{2g}.
\end{aligned}$$

Durch Elimination der Zwischenwerthe entsteht die Endgleichung:

$$x - x_1 + \frac{p - q}{\gamma} = \frac{v^2 - v_1^2}{2g}.$$

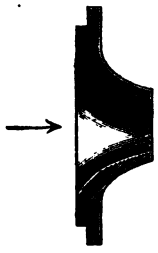
Führen wir die Flächeninhalte F_1 und F ein, indem wir berücksichtigen, daß für tropfbare Flüssigkeiten $F_1 v_1 = F v$ ist, so entsteht

$$x - x_1 + \frac{p - q}{\gamma} = \frac{v^2}{2g}\left[1 - \left(\frac{F}{F_1}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Die entwickelte Formel behält ihre Gültigkeit, so lange zwischen den Querschnitten F_1 und F des Gefäßes die Hypothese der parallelen Schichten vollkommen richtig ist. Für die Stelle des Ausflusses in dem Gefäße findet diese Hypothese keine Anwendung, da sich hier ein Drängen der einzelnen Flüssigkeitstheilchen bemerkbar macht, wodurch ganz andere Verhältnisse hervorgerufen werden, als die oben vorausgesetzten. Die abgeleitete Formel läßt sich deshalb nur dann zur Bestimmung der Geschwindigkeit v in der Ausflußmündung benutzen, wenn diese unendlich klein ist, wenn also immer nur einem Flüssigkeitselemente der Austritt gestattet ist. Handelt es sich hiernach um die Geschwindigkeit der ausfließenden Flüssigkeit aus einer beliebig großen Oeffnung, wie die Sache in der Praxis vorliegt, so

hat man auch auf die praktischen Verhältnisse Rücksicht zu nehmen und die obigen Formeln darnach zu corrigiren. Zahlreiche Versuche haben ergeben, daß die theoretisch berechnete Geschwindigkeit v wenig von der wirklich beobachteten abweicht, besonders wenn man die Ausflußmündung nach dem Innern des Gefäßes allmälig erweitert, wie es die nebenstehende Fig. 68 zeigt, die ein eigens zu diesem Zwecke construirtes Mundstück vorstellt.

Fig. 68.



Die Zahl, mit der die theoretisch berechnete Ausflußgeschwindigkeit multiplicirt werden muß, um die wirkliche Geschwindigkeit zu erhalten, nennen wir den Geschwindigkeitscoefficienten und bezeichnen denselben in der Folge durch φ. Soll hiernach in den obigen Formeln v die wirkliche Geschwindigkeit der ausfließenden Flüssigkeit vorstellen, so ist statt v, $\frac{v}{\varphi}$ zu setzen. Bei der Bewegung der Flüssigkeit durch die Ausflußöffnung gehen die einzelnen Flüssigkeitstheilchen vermöge des Drängens von allen Seiten nicht in parallelen, sondern in convergenten Richtungen durch die Oeffnung, der ausfließende Strahl wird dadurch zusammengezogen, contrahirt. Von dem Punkte der größten Contraction ab bewegen sich jedoch die Flüssigkeitstheilchen wieder in paralleler Richtung weiter, so daß hier in dem Punkte der größten Zusammenziehung auch wieder die Hypothese der parallelen Schichten Anwendung findet und die oben entwickelten Formeln für praktische Verhältnisse brauchbar werden, wenn wir statt des Querschnittes F der Mündung den Querschnitt des zusammengezogenen Strahles setzen.

Bezeichnen wir die Zahl, mit der F zu diesem Zwecke multiplicirt werden muß, den Contractionscoefficienten, mit r, so geht die obige Formel nach diesen Substitutionen in folgende über, die nun auf den Ausfluß der Flüssigkeiten aus Gefäßen in Anwendung gebracht werden kann:

$$x - x_1 + \frac{p - q}{\gamma} = \left(\frac{v}{\varphi}\right)^2 \frac{1}{2g}\left[1 - \left(\frac{rF}{F_1}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad (38)$$

Gehen wir nun zur Entwickelung der Formeln für specielle Fälle über 28
und setzen wir eine tropfbare Flüssigkeit voraus, die aus einem Gefäße ausfließt. Die freie Oberfläche nehmen wir als die ZY Ebene und die Ausflußöffnung sei in einem horizontalen Theile der Wandung angebracht. Für diese Voraussetzung ist $x_1 = 0$ und wir erhalten deshalb, wenn wir die Druckhöhe x wieder mit h bezeichnen:

$$h + \frac{p - q}{\gamma} = \left(\frac{v}{\varphi}\right)^2 \frac{1}{2g}\left[1 - \left(\frac{rF}{F_1}\right)^2\right].$$

Hieraus ergiebt sich die Geschwindigkeit v in der Ausflußmündung:

$$v = \varphi \sqrt{\frac{h + \frac{p - q}{\gamma}}{1 - \left(\frac{rF}{F_1}\right)^2} \cdot 2g} \text{ Meter} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

und der während der Bewegung stattfindende Druck q in der Mündung, welchen man den hydrodynamischen oder hydraulischen Druck nennt:

$$q = h\gamma + p - \left(\frac{v}{\varphi}\right)^2 \frac{\gamma}{2g}\left[1 - \left(\frac{r\,F}{F_1}\right)^2\right] \text{ Kilogramm.}$$

Der hydraulische Druck nimmt hiernach mit der Zunahme der Geschwindigkeit ab, und geht für $v = 0$ in den hydrostatischen Druck $q = h\gamma + p$ über. Dies gilt natürlich nicht allein für die Ausflußmündung, sondern für jeden beliebigen Punkt der Flüssigkeit.

Setzen wir in der obigen allgemeinen Gleichung

$$x - x_1 + \frac{p - q}{\gamma} = \frac{v^2 - v_1^2}{2g}$$

$x_1 = 0$ und $x = h$, so ergiebt sich:

$$q = h\gamma + p - \frac{v^2 - v_1^2}{2g}\gamma,$$

woraus ebenfalls ersichtlich, daß mit der Zunahme von v der hydraulische Druck abnimmt, der hier wieder zum hydrostatischen wird, wenn wir $v = v_1 = 0$ setzen, d. h. wenn die Flüssigkeit ohne Bewegung ist.

Die in der Secunde ausfließende Wassermenge V in Kubikmetern erhalten wir, wenn wir den Querschnitt des contrahirten Wasserstrahles mit der Geschwindigkeit multipliciren:

$$V = rFv$$

$$V = r\varphi F\sqrt{\frac{h + \frac{p - q}{\gamma}}{1 - \left(\frac{r\,F}{F_1}\right)^2}\,2g}.$$

Die Zahl $r\varphi$ kann man den Ausflußcoefficienten nennen und denselben mit μ bezeichnen:

$$V = \mu F\sqrt{\frac{h + \frac{p - q}{\gamma}}{1 - \left(\frac{r\,F}{F_1}\right)^2}\,2g} \text{ Kubikmeter} \quad . \quad . \quad (40)$$

Ist die freie Oberfläche F_1 bedeutend größer als die Ausflußöffnung F, so läßt sich $\left(\frac{r\,F}{F_1}\right)^2$ gegen 1 vernachlässigen, und es ist dann einfacher:

$$v = \varphi\sqrt{2g\left(h + \frac{p - q}{\gamma}\right)} \text{ Meter,}$$

$$q = h\gamma + p - \left(\frac{v}{\varphi}\right)^2 \frac{\gamma}{2g} \text{ Kilogramm,}$$

$$V = \mu F\sqrt{2g\left(h + \frac{p - q}{\gamma}\right)} \text{ Kubikmeter.}$$

Die Differenz der Drucke $p - q$ pflegt man auch durch das Gewicht einer Flüſſigkeitsſäule auszudrücken. Wählen wir hierzu die unterſuchte Flüſſigkeit und nennen die Höhe der Säule h_1, ſo iſt $p - q = \pm h_1 \gamma$ zu ſetzen, je nachdem der Druck p auf die freie Oberfläche oder der Druck q auf die Ausflußmündung der größere iſt. Die Formeln gehen durch dieſe Subſtitution über in

$$v = \varphi \sqrt{2g(h \pm h_1)} \text{ Meter},$$

$$V = \mu F \sqrt{2g(h \pm h_1)} \text{ Kubikmeter}.$$

Steht die freie Oberfläche und die Ausflußmündung mit der Luft in Berührung, ſo ſtellt p und q den Druck der Atmoſphäre vor und wir haben:

$$v = \varphi \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{rF}{F_1}\right)^2}} \text{ Meter},$$

$$V = \mu F \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{rF}{F_1}\right)^2}} \text{ Kubikmeter},$$

und bei Vernachläſſigung des Werthes $\left(\frac{rF}{F_1}\right)^2$ ergeben ſich die einfachen Formeln:

$$v = \varphi \sqrt{2gh} \text{ Meter},$$

$$V = \mu F \sqrt{2gh} \text{ Kubikmeter}.$$

Die im vorigen Paragraphen abgeleiteten Formeln gelten, wie ſchon angegeben, nur für Mündungen in einem horizontalen Theile der Wandung, ſie laſſen ſich jedoch auch für kleine Ausflußöffnungen, die ſich in einer Seitenwand des Gefäßes befinden, annähernd als richtig anwenden. Will man jedoch für dergleichen Seitenöffnungen genaue Formeln entwickeln, ſo muß man darauf achten, daß die einzelnen Elemente der Ausflußöffnung verſchiedene Druckhöhen haben, die Flüſſigkeitselemente daher auch mit ungleicher Geſchwindigkeit ausfließen, weshalb es ſich um Beſtimmung der mittleren Geſchwindigkeit v handelt. Die Oeffnung F beſtehe aus den Elementen $f_1, f_2, f_3 \ldots$, zu welchen die Druckhöhen $h_1, h_2, h_3 \ldots$ gehören, ſo ſind die entſprechenden Geſchwindigkeiten $v_1, v_2, v_3 \ldots$ bei Anwendung der letzten Formeln: 29

$$v_1 = \varphi \sqrt{2gh_1},\ v_2 = \varphi \sqrt{2gh_2},\ v_3 = \varphi \sqrt{2gh_3} \ldots,$$

die in der Secunde durch die kleinen Querſchnitte gehenden Ausflußmengen V_1, V_2, $V_3 \ldots$ ſind deshalb:

$$V_1 = v_1 r f_1,\ V_2 = v_2 r f_2,\ V_3 = v_3 r f_3 \ldots$$

Zur Beſtimmung der in der Secunde ausgefloſſenen Waſſermenge V haben wir hiernach die Gleichung:

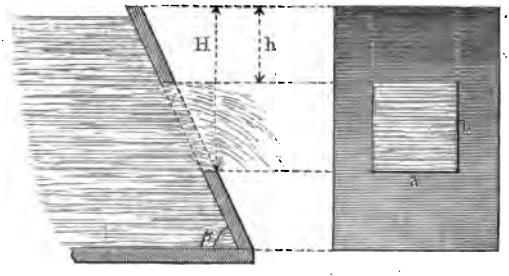
$$V = \Sigma V_1 = \mu \sqrt{2g}\,(f_1 \sqrt{h_1} + f_2 \sqrt{h_2} + f_3 \sqrt{h_3} + \ldots),$$

und die mittlere Geſchwindigkeit v iſt deshalb:

$$v = \frac{V}{rF} = \frac{\mu}{r}\sqrt{2g}\,\frac{f_1\sqrt{h_1} + f_2\sqrt{h_2} + f_3\sqrt{h_3} + \cdots}{F}.$$

Die Oeffnung in der Seitenwand eines Gefäßes sei ein Rechteck (Fig. 69) mit horizontaler Grundlinie a und der Höhe b, die Druckhöhen für die untere

Fig. 69.



und obere Grundlinie seien H und h und die Seitenwand sei gegen den Horizont um den Winkel β geneigt. Gesetzt, die Ausflußöffnung reichte bis an den Wasserspiegel, so wäre:

$$f_1 = f_2 = f_3 = \ldots f_n = a\,\frac{b + \frac{h}{\sin\beta}}{n}$$

$$h_1 = \frac{H}{n},\quad h_2 = 2\,\frac{H}{n},\quad h_3 = 3\,\frac{H}{n},\ \ldots$$

und die Wassermenge:

$$V' = \mu a\,\frac{b + \frac{h}{\sin\beta}}{n}\sqrt{2g}\,\sqrt{\frac{H}{n}}\,(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots \sqrt{n}).$$

Die Summe der Quadratwurzeln ist, da wir n sehr groß denken müssen,

$$= \frac{1}{1/2 + 1}\cdot n^{1/2+1}$$
$$= 2/3\,\sqrt{n^3},$$

daher

$$V' = 2/3\,\mu a\left(b + \frac{h}{\sin\beta}\right)\sqrt{2gH}.$$

Nehmen wir andererseits an, die Oeffnung fange bei der oberen Grundlinie an und reiche bis zum Wasserspiegel, so ist

$$h_1 = \frac{h}{n},\quad h_2 = 2\,\frac{h}{n},\quad h_3 = 3\,\frac{h}{n},\ \ldots$$

und die ausfließende Wassermenge

$$V'' = \frac{2}{3}\,\mu\,\frac{ah}{\sin\beta}\,\sqrt{2gh}.$$

Die durch die angenommene Seitenöffnung in der Secunde ausfließende Wassermenge ist daher:

$$V = V' - V'' = \frac{2}{3}\mu a\sqrt{2g}\left[\left(b + \frac{h}{\sin\beta}\right)\sqrt{H} - \frac{h}{\sin\beta}\sqrt{h}\right]$$

$$= {}^2/_3\mu\frac{a}{\sin\beta}\sqrt{2g}\left[(H-h)\sqrt{H} + h(\sqrt{H}-\sqrt{h})\right]$$

$$= {}^2/_3\mu\frac{a(H-h)}{\sin\beta}\sqrt{2g}\,\frac{\sqrt{H^3}-\sqrt{h^3}}{H-h}$$

$$V = {}^2/_3\mu F\sqrt{2g}\,\frac{H^{3/2}-h^{3/2}}{H-h} \text{ Kubikmeter} \quad \ldots\ldots\ldots (41)$$

und die mittlere Geschwindigkeit:

$$v = {}^2/_3\frac{\mu}{r}\sqrt{2g}\,\frac{H^{3/2}-h^{3/2}}{H-h} \text{ Meter} \quad \ldots\ldots\ldots (42)$$

Liegt die obere Grundlinie des Rechtecks im Wasserspiegel, so ist $h = 0$ und

$$V = {}^2/_3\,\mu F\sqrt{2gH} \text{ Kubikmeter},$$

$$v = {}^2/_3\frac{\mu}{r}\sqrt{2gH} \text{ Meter}.$$

Es ist hierbei zu bemerken, daß die Druckhöhen in einiger Entfernung von der Ausflußmündung gemessen werden müssen, da das Wasser wegen seiner Bewegung unmittelbar vor der Oeffnung niedriger steht.

Was die Erfahrungscoefficienten φ, r und μ anbetrifft, so ist nach den neuesten Versuchen (siehe Experimental-Hydraulik von Weisbach) für Ausflußöffnungen in einer dünnen Wand oder aus eingesetzten abgerundeten Mundstücken

$$\varphi = 0{,}96$$

zu nehmen. Die größte Contraction des Wasserstrahles findet ungefähr in einer Entfernung gleich der der halben Mündungsweite von der Ausflußöffnung statt und der contrahirte Strahl hat einen Durchmesser von 0,8 des Durchmessers der Ausflußöffnung. Hiernach ist

$$r = (0{,}8)^2 = 0{,}64$$

und

$$\mu = r\varphi = 0{,}96 \,.\, 0{,}64$$
$$= 0{,}615.$$

Bei den vorigen Untersuchungen wurde angenommen, daß das ausfließende Wasser fortwährend ersetzt wurde, daß sich also die Druckhöhe während der Bewegung nicht änderte. Die Bewegung des ausfließenden Wassers wird eine ungleichförmige, wenn eine größere oder kleinere Wassermasse zufließt, als durch die Ausflußöffnung abfließen kann.

B. Ausfluß der permanenten Gase insbesondere der atmosphärischen Luft.

30 In der oben für die Bewegung eines beliebigen Flüssigkeitstheilchens entwickelten Formel (36):

$$x_r - x_{r-1} + \frac{p_{r-1} - p_r}{\gamma} = \frac{1}{2g}\,(v_r^2 - v_{r-1}^2)$$

stellen die beiden ersten Summanden $x_r - x_{r-1}$ die senkrechte Höhe vor, von welcher das Flüssigkeitstheilchen herabsinkt und das dadurch vermöge seines Gewichtes Arbeit verrichtet. Bei den luftförmigen Körpern wird diese letztere Arbeit $f\delta\gamma\ (x_r - x_{r-1})$ als gering gegen die Arbeit $fd\,(p_{r-1} - p_r)$ der Expansivkräfte fortgelassen werden können und wir dürfen deshalb bei den luftförmigen Körpern die Gleichung

$$\frac{p_{r-1} - p_r}{\gamma} = \frac{1}{2g}\,(v_r^2 - v_{r-1}^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

als Ausgangspunkt nehmen.

a. Es werde die Voraussetzung gemacht, daß während des Hinströmens der Flüssigkeit nach der Mündung das specifische Gewicht γ der Luft constant bleibe, dann ist auch das specifische Volumen v constant, da wir $v\,\gamma = 1$ Kilogramm haben. In diesem Falle erhalten wir, wie bei der tropfbaren Flüssigkeit, die Gleichung für die Bewegung eines luftförmigen Körpers, zwischen den Querschnitten F_1 und F, zu welchen die Spannungen p und q und die Geschwindigkeiten v_1 und v gehören:

$$\frac{p - q}{\gamma} = \frac{v^2}{2g}\left\{1 - \left(\frac{F}{F_1}\right)^2\right\}$$

und wenn wir die Formel bis auf die Ausflußmündung ausdehnen, den Geschwindigkeitscoefficienten φ und den Contractionscoefficienten r einführen:

$$\frac{p - q}{\gamma} = \left(\frac{v}{\varphi}\right)^2 \frac{1}{2g}\left\{1 - \left(\frac{rF}{F_1}\right)^2\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

Die Bedingung des constanten specifischen Gewichtes γ, welches sich mit der betreffenden Spannung p durch Formel 11

$$pv = \frac{p}{\gamma} = RT$$

bestimmt zeigt daß, da die Spannungen der Luft im Inneren und außerhalb des Behälters verschieden, nämlich gleich p und q sind, auch die Temperaturen T innerhalb des Ausflußgefäßes und in der Mündungsebene verschieden sein müssen und wir haben, wenn wir diese betreffenden Temperaturen mit T_1 und T bezeichnen, zur Bestimmung derselben:

$$\frac{p}{\gamma} = RT_1 \text{ und } \frac{q}{\gamma} = RT.$$

Hieraus ergiebt sich, daß die Temperatur T in der Mündungsebene kleiner ist als die Temperatur T_1 im Gefäße, woraus folgt, daß jedem Kilogramm Luftmasse

während des Ausflusses eine bestimmte Wärmemenge Q entzogen werden muß. Es ist aber nach Aufgabe 62, Capitel 1 die Schwingungsarbeit bei Temperaturänderungen gleich

$$\frac{c}{A}(T_1 - T),$$

unter c die Gewichtscapacität bei constantem Volumen verstanden, daher die darauf zu verwendende Wärmemenge

$$Q = c(T_1 - T),$$

welche also für unsere Voraussetzung des constanten specifischen Gewichtes γ der Luftmasse pro Kilogramm entzogen werden muß. Führen wir statt der Temperaturen die betreffenden Spannungen respective die Geschwindigkeiten ein, so ist

$$Q = c(T_1 - T) = \frac{c}{R}\frac{p - q}{\gamma} = \frac{c}{R}\left(\frac{v}{\varphi}\right)^2 \frac{1}{2g}\left\{1 - \left(\frac{rF}{F_1}\right)^2\right\} \quad . \quad (45)$$

Im Allgemeinen finden beim Ausflusse der Gase die vorstehenden Bedingungen nicht statt, jedoch kann man Formel (44) annähernd in dem Fall verwenden, wenn die Differenzen der Spannungen respective der Temperaturen gering sind.

b. Machen wir zweitens die Voraussetzung, daß die Luftmasse unter constanter Temperatur T zum Ausflusse gelangt, so ist eine gewisse Wärmemenge Q der Gewichtseinheit Luft zuzuführen. Da sich das specifische Gewicht in diesem Falle der Gleichung $\frac{p}{\gamma_1} = RT = \frac{q}{\gamma}$ gemäß ändert, so ist in der Ausgangsgleichung (43), $\frac{1}{\gamma_1}$ durch $\frac{RT}{p}$ zu ersetzen und wir erhalten deshalb für die einzelnen Luftelemente folgende Gleichungen:

$$RT\frac{p - p_1}{p_1} = \frac{1}{2g}(v_2^2 - v_1^2),$$

$$RT\frac{p_1 - p_2}{p_2} = \frac{1}{2g}(v_3^2 - v_2^2) \text{ u. s. w. bis}$$

$$RT\frac{p_n - q}{q} = \frac{1}{2g}(v^2 - v_n^2)$$

und durch Elimination der Zwischenglieder:

$$\frac{1}{2g}(v^2 - v_1^2) = RT\sum_{p}^{q}\frac{p_{r-1} - p_r}{p_r}.$$

Der Werth für die angedeutete Summation liefert die Arbeitgröße, welche 1 Kilogramm Luft vermöge seiner Expansivkraft verrichtet, wenn dieselbe von p bis q abnimmt. In Aufgabe 56, Capitel I. Thl. II. ist dieselbe berechnet und gleich $l\,n\,\frac{p}{q}$ gefunden worden. Wir haben demnach

$$\frac{1}{2g}(v^2 - v_1^2) = RT\,l\,n\,\frac{p}{q}.$$

Da nun nach Formel (34) $F_1 v_1 \gamma_1 = F v \gamma$ oder mit Benutzung von $\frac{p}{\gamma_1} = \frac{q}{\gamma}$

$$F_1 v_1 p = F v q \text{ ist,}$$

so erhalten wir, die Formel bis auf die Ausflußmündung ausdehnend,

$$RT ln \frac{p}{q} = \left(\frac{v}{\varphi}\right)^2 \frac{1}{2g} \left\{1 - \left(\frac{rFq}{F_1 p}\right)^2\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

Da die Temperatur T constant bleiben soll, so findet die zugeführte Wärmemenge Q allein zu Verrichtung der äußeren Arbeit, d. h. ist Veränderung der lebendigen Kraft der Luftmasse Verwendung und wir haben deshalb:

$$Q = ART ln \frac{p}{q} = A \left(\frac{v}{\varphi}\right)^2 \frac{1}{2g} \left\{1 - \left(\frac{rFq}{F_1 p}\right)^2\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

In den vorstehenden Formeln kann man RT durch $\frac{p}{\gamma_1}$, unter γ_1 das specifische Gewicht der Luft im Querschnitt F_1 verstanden, und den natürlichen Logarithmus durch den gemeinen ersetzen und haben wir dann:

$$2{,}3026 \frac{p}{\gamma_1} log \frac{p}{q} = \left(\frac{v}{\varphi}\right)^2 \frac{1}{2g} \left\{1 - \left(\frac{rFq}{F_1 p}\right)^2\right\}$$

$$Q = 2{,}3026\, A \frac{p}{\gamma_1} log \frac{p}{q} = A \left(\frac{v}{\varphi}\right)^2 \frac{1}{2g} \left\{1 - \left(\frac{rFq}{F_1 p}\right)^2\right\}.$$

Bei Anwendung der letzten Formeln ist darauf zu achten, daß dem Gase die berechnete Wärmemenge Q zugeführt werden muß, was in der Praxis wohl niemals erfüllt wird, und deshalb giebt die einfache Formel (44) in den gewöhnlichen Fällen jedenfalls praktisch brauchbarere Werthe.

c. Der für die Praxis wichtigste Fall ist jedenfalls der, wo dem Gase während des Ausflusses weder Wärme zugeführt noch demselben entzogen wird, wo also die Arbeit im Inneren des Gases, die Schwingungsarbeit, im Verein mit der Expansionsarbeit die Aenderung der lebendigen Kraft bewirkt. Bezeichnen wir in der Ausflußmündung, wo der Druck q herrscht, das specifische Volumen mit v, die absolute Temperatur mit T, im Inneren des Gefäßes dagegen, wo wir die Spannkraft p vorausgesetzt haben, mögen v_1 und T_1 die entsprechenden Werthe sein, so ist Formel (17) zufolge:

$$\frac{T_1}{T} = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \left(\frac{v}{v_1}\right)^{\varkappa-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Die Schwingungsarbeit für jedes Kilogramm Gas ist nach Aufgabe 62, Capitel 1, gleich $\frac{c}{A}(T_1 - T)$, und die Arbeit der Expansion ist gleich $p v_1 - q v$, daher dient für die jetzt gemachte Annahme als Ausgangsgleichung:

$$\left(\frac{v}{\varphi}\right)^2 \frac{1}{2g} \left\{1 - \left(\frac{rFq}{F_1 p}\right)^2\right\} = p v_1 - q v + \frac{c}{A}(T_1 - T)$$

$$= p v_1 \left(1 - \frac{qv}{p v_1}\right) + \frac{c}{A}(T_1 - T).$$

Die oben in Anwendung gebrachte Formel (17) ist aus dem Gesetz von Poisson

$$p v_1^{\varkappa} = q v^{\varkappa}$$

abgeleitet worden. Aus demselben ergiebt sich weiter:

$$\frac{q v}{p v_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{\varkappa-1} = \frac{T}{T_1}.$$

Mit Benutzung dieses Werthes und indem wir für $p v_1$ nach Formel (11) $R T_1$ schreiben, erhalten wir:

$$\left(\frac{v}{\varphi}\right)^2 \frac{1}{2g}\left\{1 - \left(\frac{rFq}{F_1 p}\right)^2\right\} = R(T_1 - T) + \frac{c}{A}(T_1 - T)$$
$$= (T_1 - T)\frac{AR + c}{A},$$

und da wir in Formel (14) $AR = c_1 - c$ gefunden haben, so ist die Gleichung zur Berechnung der Geschwindigkeit v in ihrer einfachsten Form:

$$\left(\frac{v}{\varphi}\right)^2 \frac{1}{2g}\left\{1 - \left(\frac{rFq}{F_1 p}\right)^2\right\} = \frac{c_1}{A}(T_1 - T) \quad \ldots \quad (49)$$

worin c_1 die Gewichtscapacität bei constantem Drucke bezeichnet, für atmosphärische Luft ist also $c_1 = 0{,}2375$.

Man könnte noch aus den Formeln (47 und 48) T eliminiren, dann $T_1 = \frac{p}{\gamma R}$ und $A = \frac{c_1 - c}{R}$ setzen, jedoch ist es für die Rechnung vortheilhafter, beide Formeln neben einander zu benutzen.

Die unter a. b. c. entwickelten Geschwindigkeitsformeln, für die atmosphärische Luft, vereinfachen sich besonders, wenn wir die Geschwindigkeit v_1 der Luft im Inneren des Gefäßes gleich Null setzen. Diese Substitution ist aber immer erlaubt, wenn der Querschnitt F_1 des Gefäßes verhältnißmäßig groß gegen den Querschnitt F der Mündung ist, und wenn auch der Druck p im Inneren den Druck q auf der äußeren Seite der Mündung an Größe bedeutend übersteigt. Für diese Annahmen erhalten wir:

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{v}{\varphi}\right)^2 = \frac{p - q}{\gamma} = RT_1\left(1 - \frac{q}{p}\right) \quad \ldots \quad (44a)$$

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{v}{\varphi}\right)^2 = RT \ln \frac{p}{q} = 2{,}3026\, RT \log \frac{p}{q} \quad \ldots \quad (46a)$$

und

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2g}\left(\frac{v}{\varphi}\right)^2 = \frac{c_1}{A}(T_1 - T) \\ &\frac{T_1}{T} = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (49a)$$

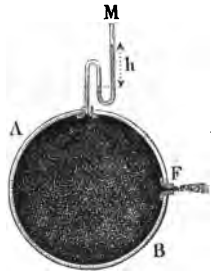
Das Verhältniß der Drucke p und q läßt sich durch die betreffenden Barometerhöhen ersetzten. Bezeichnet b die dem Drucke q in der Mündung F (Fig. 70 a. f. S.) entsprechende Höhe und $b + h$ die zum Drucke p gehörige Höhe, wobei h an

einem mit dem Gefäße verbundenen offenen Manometer abgelesen werden kann, so ist in den vorstehenden Formeln:

$$\frac{p}{q} = \frac{b + h}{b}$$

zu setzen.

Fig. 70.



Das Volumen V der in einer Secunde ausfließenden Luftmasse wird erhalten, wenn man den Querschnitt des contrahirten Luftstrahles rF mit der Geschwindigkeit v multiplicirt.

Es ist demnach die in der Secunde ausgeflossene Luftmasse in Kubikmetern:

$$V = rFv,$$

worin für v einer der obigen Werthe zu substituiren ist. Setzen wir allgemein $v = \varphi W$, unter W den betreffenden Wurzelausdruck verstanden, so ist:

$$V = r\varphi F W = \mu F W \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

unter μ den Ausflußcoefficienten der Luft verstanden. Das Luftgewicht G, welches pro Secunde aus der Mündung strömt, ist, wenn wir mit γ das specifische Gewicht der Luft in der Mündungsebene bezeichnen:

$$G = rFv\gamma = V\frac{q}{RT} = \mu F W \frac{q}{RT} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

Was schließlich die Coefficienten φ, r und μ anbetrifft, so kann man bei dem Ausflusse durch eine Mündung in einer dünnen Wand oder durch ein gut construirtes Mundstück φ nahezu gleich 1 setzen, so daß hier $\mu = r$ wird. Für μ ist 0,67 zu nehmen, wenn sich die Mündung in einer dünnen Wand befindet, dagegen ist $\mu = 0{,}95$, wenn ein gut construirtes Mundstück als Ausflußöffnung dient.

C. Ausfluß des gesättigten Wasserdampfes.

31 Gehen wir wieder von der Gleichung (43) $\frac{p_{r-1} - p_r}{\gamma} = \frac{1}{2g}(v_r^2 - v_{r-1}^2)$ aus, und denken dieselbe auf sämmtliche Flüssigkeitselemente zwischen dem Querschnitt F_1 und der Mündung F aufgestellt, so entsteht:

$$\sum_{p}^{q} \frac{p_{r-1} - p_r}{\gamma_r} = \frac{1}{2g}(v^2 - v_1^2),$$

in welcher Gleichung es sich um die angedeutete Summation handelt, die nur dann möglich, wenn zwischen der Spannung p und dem zugehörigen specifischen Gewicht γ der Mischung von Wasserdampf und Wasser eine Beziehung gegeben. Es seien in einem beliebigen Augenblicke der Bewegung nach der Ebene der Ausflußöffnung hin in einem Kilogramm der Flüssigkeitsmasse enthalten x_1 Kilogramm Dampf und x_2 Kilogramm Wasser, so ist $x_1 + x_2 = 1$ Kilogramm.

Bezeichnen wir ferner mit y_1 und y_2 das specifische Volumen des Dampfes und des Wassers, bezogen auf die in dem herangezogenen Querschnitt herrschende Spannung und Temperatur, so ist das specifische Volumen v der ganzen Flüssigkeitsmasse:

$$v = x_1 y_1 + x_2 y_2 = x_1 (y_1 - y_2) + (x_1 + x_2) y_2 = x_1 (y_1 - y_2) + y_2.$$

Setzen wir noch $y_1 - y_2$ gleich u und vernachlässigen wir y_2, welcher Werth jederzeit sehr klein ist, so erhalten wir:

$$v = x_1 u = \frac{1}{\gamma}.$$

Unter der Voraussetzung, daß während des Dampfausflusses weder Wärme von Außen zugeführt noch der Mischung entzogen wird, und indem man von der Wärmeleitung der Gefäßwand, sowie der durch die Widerstände entwickelten Wärme absieht, kann man der Rechnung folgende Beziehung zwischen der Spannkraft p und dem specifischen Volumen v der Mischung zu Grunde legen:

$$p v^m = \text{constant} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

Für überhitzte Dämpfe ist $m = \frac{4}{3}$, für gesättigte Dämpfe dagegen, die aus einem Gemisch von Dampf und Wasser bestehen, kann man nehmen

$$m = 1{,}035 + 0{,}1\, x_1$$

so lange x_1 größer als 0,7 Kilogramm ist. Für gesättigten trockenen Dampf ist hiernach $m = 1{,}135$ und für gesättigten Dampf mit 10 Proc. Wassergehalt ist $m = 1{,}035 + 0{,}1 \,.\, 0{,}90 = 1{,}125$. Bezeichnen wir das specifische Volumen in dem Querschnitt F_1 mit v_1, in dem Mündungsquerschnitt F mit v, für einen beliebigen Querschnitt, in dem die Spannung p_r herrscht mit v_r, so ist nach Formel (52)

$$p v_1^m = q v^m = p_r v_r^m.$$

Setzen wir deshalb in dem obigen Summen-Ausdruck $\frac{1}{\gamma_r} = v_r$, so ist

$$\sum_p^q \frac{p_{r-1} - p_r}{\gamma_r} = p^{\frac{1}{m}} v_1 \sum_p^q \frac{p_{r-1} - p_r}{p_r^{\frac{1}{m}}} = p^{\frac{1}{m}} v_1 \sum_p^q p_r^{-\frac{1}{m}} (p_{r-1} - p_r)$$

$p_{r-1} - p_r$, können wir $= \frac{1}{n} p_r$ setzen, unter n eine unendlich große Zahl verstanden, dann bedeutet die Summe eine Fläche, bestehend aus unzählig vielen sehr schmalen Rechtecken von der Breite $\frac{1}{n} p_r$ und der Höhe $p_r^{-\frac{1}{m}}$. Die Summe derartig gebildeter Rechtecke ist nach Aufgabe (31) Abschnitt I. gleich

$$\frac{1}{-\frac{1}{m} + 1} p^{-\frac{1}{m}+1}$$

daher

$$\sum_{p}^{q} \frac{p_{r-1} - p_r}{\gamma_r} = p^{\frac{1}{m}} v_1 \frac{m}{m-1} \left\{ p^{\frac{m-1}{m}} - q^{\frac{m-1}{m}} \right\}$$

$$= \frac{m}{m-1} p v_1 \left\{ 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{m-1}{m}} \right\}.$$

Die Gleichung für die Berechnung der Geschwindigkeit v des ausströmenden Wasserdampfes ist deshalb:

$$\frac{1}{2g} \left(\frac{v}{\varphi}\right)^2 \left\{ 1 - \left(\frac{rFq}{F_1 p}\right)^2 \right\} = \frac{m}{m-1} p v_1 \left\{ 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{m-1}{m}} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

Setzen wir wieder die Geschwindigkeit v_1 im Innern des Gefäßes gleich Null, so ist

$$\frac{1}{2g} \left(\frac{v}{\varphi}\right)^2 = \frac{m}{m-1} p v_1 \left\{ 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{m-1}{m}} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53a)$$

Das Volumen V des in einer Secunde ausfließenden Dampfes ist, wenn wir zur Abkürzung $v = \varphi W$ setzen:

$$V = rF\varphi W \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

und das Gewicht G dieser Dampfmasse

$$G = \mu F W \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{m}} \frac{1}{v_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

in welchen Formeln den Coefficienten r, φ und μ die in §. 30 angegebene Größe zu geben ist.

32 Das mit einer Flüssigkeit angefüllte Gefäß stehe mit einer Röhre in Verbindung, aus welcher der Ausfluß erfolgt, wobei die Druckhöhe dieselbe bleiben mag. Wir benutzen dieselben Bezeichnungen wie bei den vorigen Untersuchungen, nennen den constanten Röhrenquerschnitt F_2 und den Druck auf die Flächeneinheit am Anfange der Röhre p_1. Das Ende der Röhre sei durch ein besonderes Ansatzrohr gebildet, welches am Ausflußpunkte den Querschnitt F hat. Legen wir wieder, wie es oben geschehen, F. 160, Theil I. der Untersuchung zu Grunde, so ist, da die Flüssigkeit weiter keine nutzbare Arbeit verrichten soll, die zu benutzende Gleichung

$$\Sigma P_1 s_1 - \Sigma P_3 s_3 - {}^1/_2 \Sigma m_1 (v_2^2 - v_1^2) = 0,$$

worin das Glied $\Sigma P_3 s_3$, die Arbeitgröße der Widerstände auftritt, welches wir früher ganz außer Acht gelassen haben. Die hier zu berücksichtigenden Widerstände beziehen sich hauptsächlich auf den Widerstand der Flüssigkeit beim Eintritte in die Röhre, bei der Bewegung durch dieselbe und beim Austritte aus dem Ansatzrohre. Auf den Widerstand der Flüssigkeit beim Uebergange derselben aus der Röhre in das Ansatzrohr brauchen wir nicht Rücksicht zu nehmen, da das letztere im Verhältniß zur Röhre eine so geringe Länge hat, daß eine wesentliche Aenderung des Bewegungszustandes nicht zu erwarten ist. Was die Be-

rechnung der Arbeitgrößen dieser Widerstände anbetrifft, so ist es am zweckmäßigsten, die der Arbeitgröße entsprechende lebendige Kraft zu ermitteln. Da sich theoretisch hierüber fast gar nichts feststellen läßt, so ist es am einfachsten, sich der durch Versuche bestimmten Widerstandscoefficienten zu bedienen und das Product aus diesen und der an der Stelle der Leitung gerade vorhandenen lebendigen Kraft als Arbeitgröße der Widerstände in Rechnung zu bringen.

Es bezeichne m_1 die Masse eines Flüssigkeitselementes und v_2 die Geschwindigkeit der Flüssigkeit beim Eintritt in die Röhre. Die hier vorhandene lebendige Kraft ist dann für ein Flüssigkeitstheilchen:

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_2^2.$$

Für tropfbare Flüssigkeiten ist:

$$r F v = F_2 v_2,$$

für luftförmige Körper:

$$r F v q = F_2 v_2 p_1,$$

unter p_1 den Druck auf die Flächeneinheit am Anfange der Röhre verstanden. Bei Benutzung dieser Angaben ist die lebendige Kraft des Flüssigkeittheilchens beim Anfange der Röhre

für tropfbare Flüssigkeiten: $\tfrac{1}{2} m_1 v^2 \left(\frac{r F}{F_2}\right)^2$,

für luftförmige Körper: $\tfrac{1}{2} m_1 v^2 \left(\frac{r F q}{F_2 p_1}\right)^2$.

Bezeichnen wir den Widerstandscoefficienten für den Eintritt des Wassers in die Röhre mit ξ_1, so ist, der obigen Bemerkung zufolge, der hier stattfindende Verlust an Arbeitgröße:

$$\xi_1 \tfrac{1}{2} m_1 v^2 \left(\frac{r F}{F_2}\right)^2,$$

oder:

$$\xi_1 \tfrac{1}{2} m_1 v^2 \left(\frac{r F q}{F_2 p_1}\right)^2,$$

je nachdem eine tropfbare oder luftförmige Flüssigkeit vorgelegt ist. Die lebendige Kraft eines Flüssigkeitelementes beim Austritt aus der Röhre ist $\tfrac{1}{2} m_1 v^2$, der hier auftretende Verlust an Arbeitgröße ist daher, wenn wir den Erfahrungscoefficienten mit ξ_2 bezeichnen, für jede beliebige Flüssigkeit:

$$\xi_2 \tfrac{1}{2} m_1 v^2.$$

Um die Arbeitgröße zu bestimmen, die durch die Reibung der Flüssigkeitstheilchen an den Röhrenwänden verbraucht wird, nimmt man die Geschwindigkeit in der Röhre constant $= v \cdot \frac{r F}{F_2}$ an. Die lebendige Kraft eines Flüssigkeitstheilchens während der Bewegung in der Röhre ist daher

$$\tfrac{1}{2} m_1 v^2 \left(\frac{r F}{F_2}\right)^2.$$

Zahlreiche Versuche haben ergeben, daß der Reibungswiderstand mit der Länge l der Röhren zunimmt, bei weiteren Röhren jedoch geringer als bei engeren ist. Bezeichnen wir den Durchmesser der Röhre mit d und den nothwendigen Widerstandscoefficienten mit ξ_3, so ist die Arbeitgröße, die durch die Reibung der Flüssigkeitstheilchen an den Röhrenwänden und durch die Adhäsion der Flüssigkeitstheilchen in vollkommen glatten Röhren verloren geht, wenn wir noch voraussetzen, daß in der Röhrenleitung keine plötzliche Abzweigungen vorkommen,

$$\xi_3 \, {}^1/_2 m_1 v^2 \frac{l}{d} \left(\frac{rF}{F_2}\right)^2.$$

Der in den früheren Formeln einzuführende Summand $\Sigma P_3 s_3$, die Arbeitgröße der Widerstände bestimmend, ist hiernach:

$${}^1/_2 m_1 v^2 \left[\left(\frac{rF}{F_2}\right)^2 \xi_1 + \xi_2 + \frac{l}{d}\left(\frac{rF}{F_2}\right)^2 \xi_3\right]$$ für tropfbare Flüssigkeiten,

und

$${}^1/_2 m_1 v^2 \left[\left(\frac{rFq}{F_2 p_1}\right)^2 \xi_1 + \xi_2 + \frac{l}{d}\left(\frac{rF}{F_2}\right)^2 \xi_3\right]$$ für luftförmige Körper.

Bewegung des Wassers in Röhren.

33 Die in §. 27 gefundene Gleichung für die Bewegung einer tropfbaren Flüssigkeit war:

$$x - x_1 + \frac{p - q}{\gamma} - \frac{1}{2g} v^2 \left[1 - \left(\frac{rF}{F_1}\right)^2\right] = 0.$$

Multipliciren wir dieselbe mit dem Gewichte $f \delta \gamma$ eines Flüssigkeitselementes, so entsteht dadurch die Gleichung zwischen den Arbeitgrößen, in welcher der in der vorigen Nummer berechnete Arbeitverlust der Widerstände als Summand eingeführt werden muß, wenn wir die Bewegung des Wassers in Röhren untersuchen. Nach dieser Veränderung der obigen Gleichung und Substitution der Arbeitgröße $\Sigma P_3 s_3$ ergiebt sich, wenn wir berücksichtigen, daß

$m_1 = \frac{f \delta \gamma}{g}$ ist,

$$f\delta\gamma\,(x - x_1) + f\delta(p - q) - f\delta\gamma \frac{1}{2g} v^2 \left[1 - \left(\frac{rF}{F_1}\right)^2 + \xi_1 \left(\frac{rF}{F_2}\right)^2 + \xi_2 + \xi_3 \frac{l}{d}\left(\frac{rF}{F_2}\right)^2\right] = 0,$$

oder:

$$x - x_1 + \frac{p - q}{\gamma} - \frac{1}{2g} v^2 \left[1 - \left(\frac{rF}{F_1}\right)^2 + \xi_1 \left(\frac{rF}{F_2}\right)^2 + \xi_2 + \xi_3 \frac{l}{d}\left(\frac{rF}{F_2}\right)^2\right] = 0 \quad (56)$$

Aus dieser allgemeinen Gleichung läßt sich die Geschwindigkeit v des ausfließenden Wassers sowie die Ausflußmenge in jedem speciellen Falle entwickeln,

wenn die Widerſtandscoefficienten bekannt ſind. Wir ſetzen wieder wie oben $x_1 = 0$, nehmen alſo den Querſchnitt $HO = F_1$ (Fig. 71) des Gefäßes AB

Fig. 71.

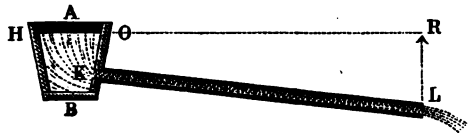
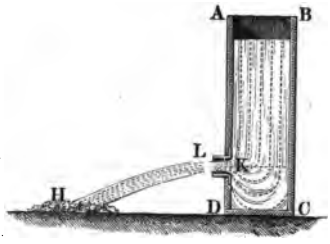


Fig. 72.



in der ZY Ebene gelegen an, bezeichnen die Druckhöhe $RL = x$ mit h und ſetzen voraus, daß die freie Oberfläche in dem Gefäße und die Ausflußöffnung in die atmoſphäriſche Luft münden. Für dieſe letzte Annahme iſt $p = q$, weshalb wir erhalten:

$$h = \frac{1}{2g} v^2 \left[1 - \left(\frac{rF}{F_1}\right)^2 + \zeta_1 \left(\frac{rF}{F_2}\right)^2 + \zeta_2 + \zeta_3 \frac{l}{d} \left(\frac{rF}{F_2}\right)^2 \right] = 0$$

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \left(\frac{rF}{F_1}\right)^2 + \zeta_1 \left(\frac{rF}{F_2}\right)^2 + \zeta_2 + \zeta_3 \frac{l}{d} \left(\frac{rF}{F_2}\right)^2}}.$$

Iſt das Gefäß AB (Fig. 72) nur mit einer kurzen Anſatzröhre LK verſehen, ſo läßt ſich der Reibungswiderſtand ſowie der Widerſtand für das beſonders angeſetzte Mundſtück vernachläſſigen und wir haben dann, da $rF = F_2$ wird,

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \left(\frac{rF}{F_1}\right)^2 + \zeta_1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

Setzen wir andererſeits $v = \varphi \sqrt{2gh}$, unter φ den Geſchwindigkeitscoefficienten verſtanden, der ſich durch Verſuche beſtimmen läßt, ſo erhalten wir dadurch eine Gleichung zur Beſtimmung des Widerſtandscoefficienten ζ_1.

Aus

$$\varphi \sqrt{2gh} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \left(\frac{rF}{F_1}\right)^2 + \zeta_1}}$$

folgt

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{rF}{F_1}\right)^2 + \zeta_1}}$$

Da weiter der Querschnitt rF des ausfließenden Wasserstrahles im Verhältniß zu dem Querschnitt F_1 des Gefäßes sehr klein ist, so reducirt sich die letzte Gleichung auf

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{\sqrt{1+\xi_1}} \\ \text{oder} \\ \xi_1 &= \left(\frac{1}{\varphi}\right)^2 - 1. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

Die mit cylindrischen Ansatzröhren angestellten Versuche haben gezeigt, daß das Wasser einen uncontrahirten Strahl bildet, sobald die Länge der Röhre $2^1/_2$ bis 3mal so groß ist, als ihr Durchmesser, und daß bei einer geringeren Länge, das Rohr gar keinen Einfluß ausübt, sondern das Ausfließen in derselben Weise wie durch eine Oeffnung in einer dünnen Wand stattfindet. Im ersten Falle, der bei der Bestimmung des Coefficienten ξ_1 zu Grunde gelegt werden muß, ist also $r = 1$ und $\varphi = \mu$ zu setzen. Der hierbei zu benutzende Mittelwerth für den Geschwindigkeitscoefficienten φ ist 0,815, daher:

$$\xi_1 = \left(\frac{1}{0{,}815}\right)^2 - 1$$

$$\xi_1 = 0{,}505.$$

Nehmen wir eine nach außen convergirende konische Ansatzröhre an, so ist bei gehöriger Ueberführung der Röhre in das Gefäß $\varphi = \mu = 0{,}94$, woraus

$$\xi_1 = \left(\frac{1}{0{,}94}\right)^2 - 1$$

$$\xi_1 = 0{,}132$$

folgt.

Bei der Bestimmung des Widerstandscoefficienten ξ_2 für den Austritt aus dem Ansatzrohre verfahren wir in derselben Weise, indem wir annehmen, daß sich dasselbe unmittelbar an dem Gefäße befinde und sich demselben durch eine gehörige Abrundung allmälig anschließe. Es ist dann ebenfalls

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\xi_2}},$$

wobei jedoch dem Geschwindigkeitscoefficienten φ hier der Werth 0,96, wie beim Ausfluß aus einer dünnen Wand oder einem gehörig abgerundeten Mundstücke zu geben ist. Aus der obigen Gleichung folgt:

$$\xi_2 = \left(\frac{1}{\varphi}\right)^2 - 1$$

$$= \left(\frac{1}{0{,}96}\right)^2 - 1$$

$$\xi_2 = 0{,}09.$$

Was den Widerstandscoefficienten ξ_3 anbetrifft, der sich auf die Reibung des Wassers in den Röhren bezieht, so haben die Versuche bewiesen, daß der

Reibungswiderstand nicht genau mit dem Quadrate der Geschwindigkeit, sondern auch noch mit einer andern Potenz der Geschwindigkeit wächst. Die in neuester Zeit von Weisbach angestellten Versuche zeigen, daß man den Beobachtungen recht nahe kommt, wenn man

$$\xi_3 = 0{,}01439 + \frac{0{,}0094711}{\sqrt{v}}$$

setzt, wobei die Geschwindigkeit v in Metern zu nehmen ist. Da dieser Coefficient noch von der Geschwindigkeit v abhängig ist, so ist bei Anwendung der obigen Formeln zur Berechnung der Geschwindigkeit der Coefficient ξ_3 annähernd zu ermitteln, indem man statt v in $\sqrt{v}$ einen der wirklichen Geschwindigkeit nahekommenden Werth setzt und die Rechnung mit dem aus der Formel gefundenen Werthe von Neuem wiederholt, bis die nothwendige Uebereinstimmung erhalten ist. Die aus der Röhre abfließende Wassermasse V erhält man, wenn man den Querschnitt $r\,F$ des contrahirten Strahles an der Ausflußstelle mit der berechneten wirklichen Geschwindigkeit v multiplicirt,

$$V = r\,F\,v.$$

In der folgenden Tabelle sind die für verschiedene Geschwindigkeiten v in Metern nach der obigen Formel berechneten Werthe von ξ_3 zusammengestellt. In der ersten Vertical-Reihe finden sich die ganzen Meter, in der ersten Horizontal-Reihe dagegen die Zentel-Meter aufgeführt und man erhält den zu einer gewissen Geschwindigkeit gehörigen Werth ξ_3, wenn man die im Durchschnitt der beiden entsprechenden Reihen befindliche Zahl benutzt.

Zehntel-Meter.

v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ganze Meter. 0	∞	0,0443	0,0356	0,0317	0,0294	0,0228	0,0266	0,0257	0,0250	0,0244
1	0,0239	0,0234	0,0230	0,0227	0,0224	0,0221	0,0219	0,0217	0,0215	0,0213
2	0,0211	0,0209	0,0208	0,0206	0,0205	0,0204	0,0203	0,0202	0,0201	0,0200
3	0,0199	0,0198	0,0197	0,0196	0,0195	0,0195	0,0194	0,0193	0,0193	0,0192
4	0,0191	0,0191	0,0190	0,0190	0,0189	0,0189	0,0188	0,0188	0,0187	0,0187

Umfassende Versuche von Darcy haben gezeigt, daß dieser Widerstandscoefficient ξ_3 außer von der Geschwindigkeit v, noch von dem Durchmesser d der Röhre abhängig ist, und daß außerdem das Material und die Oberflächen-Beschaffenheit einen bedeutenden Einfluß auf die Größe von ξ_3 ausüben. Bezeichnen wir mit α einen Zahlenwerth, welcher die Abhängigkeit des Materials von der Oberflächen-Beschaffenheit darstellt, so lassen sich die Versuchsresultate nach Gauchler, durch die folgende Formel wiedergeben:

$$\zeta_3 = \frac{2g}{\alpha^4} \frac{\left(1 + \frac{d}{4\sqrt[4]{v}}\right)^4}{\sqrt[2]{d}}$$

Der Werth von α soll dabei folgender Angaben gemäß gewählt werden:

1) Für gußeiserne Röhren, deren Oberfläche durch Rost und Niederschläge verunreinigt ist, nehme man $\alpha = 6{,}625$ bis $5{,}5$
2) Für neue gußeiserne Röhren . . . . . $\alpha = 6{,}625$
3) Für Röhren von Eisenblech, Asphalt, Blei und für gezogene eiserne Röhren . . . . . $\alpha = 7{,}0$

Bewegung luftförmiger Körper in Röhren.

34 Bei der Entwickelung der Geschwindigkeitsformeln für die Bewegung luftförmiger Körper in Röhren, setzen wir der Einfachheit wegen, die in den Gleichungen 44a, 46a, 49a und 53a vorkommenden Ausdrücke, welche gleich $\frac{1}{2g}\left(\frac{v}{\varphi}\right)^2$ sind gleich f_p und erhalten dann mit Anwendung der in §. 32 für die verschiedenen Widerstände aufgestellten Arbeitsverluste, indem wir noch $\varphi = 1$ annehmen, da die Correktur der Geschwindigkeit hinlänglich durch die Coefficienten ζ geschieht:

$$v^2\left\{1 + \zeta_1\left(\frac{rFq}{F_2 p_1}\right)^2 + \zeta_2 + \zeta_3 \frac{l}{d}\left(\frac{rF}{F_2}\right)^2\right\} = 2g \,.\, f_p.$$

Das Verhältniß der Drucke q und p_1 läßt sich wieder durch die betreffenden Manometerhöhen ersetzen, die an den, an verschiedenen Punkten der Leitung angebrachten Manometern M abgelesen werden können, wie Fig. 73 zeigt. Bei Anwendung derselben ist:

$$v^2\left\{1 + \zeta_1\left(\frac{rFb}{F_2(b+h_1)}\right)^2 + \zeta_2 + \zeta_3 \frac{l}{d}\left(\frac{rF}{F_2}\right)^2\right\} = 2g \,.\, f_p \quad . \quad (59)$$

Fig. 73.

Liegt die Einmündungsstelle der Luft um h Meter höher als die Ausflußöffnung, so verrichtet die Luft vermöge ihres Gewichtes eine gewisse Arbeit, welche die der Expansion vermehrt. Es ist demnach in der letzten Formel für diesen Fall $f_p = f_p + h$ zu setzen und sollte die Ausflußöffnung um h Meter höher liegen

als die Einmündungsöffnung, so ist in der Formel $f_p - h$ zu benutzen. Wir haben für diese Annahme:

$$v^2 \left\{ 1 + \zeta_1 \frac{r F b}{F_2 (b + h_1)} + \zeta_2 + \zeta_3 \frac{l}{d} \left(\frac{r F^2}{F_2} \right) \right\} = 2g(f_p \pm h) \ldots (59a)$$

Die Bestimmung der Widerstandscoefficienten geschieht in derselben Weise, wie im vorigen Paragraphen, bei der Bewegung des Wassers. Für kurze cylindrische Ansatzröhren ist $r = 1$ und $\varphi = \mu = 0{,}74$. Hieraus erhalten wir:

$$\zeta_1 = \left(\frac{1}{0{,}74} \right)^2 - 1 = 0{,}83.$$

Für kurze conische, nach außen convergirende Ansatzröhren ist $\varphi = \mu = 0{,}85$ und bei gehöriger Ueberführung in das Gefäß $\varphi = \mu = 0{,}96$. Für diese Werthe findet sich:

$$\zeta_1 = 0{,}38$$

oder

$$\zeta_1 = 0{,}09.$$

Bei der Bestimmung des Coefficienten ζ_2 setzen wir eine gut übergeführte conische Ansatzröhre voraus, nehmen also $\mu = \varphi = 0{,}96$ und erhalten daraus:

$$\zeta_2 = 0{,}09.$$

Der Reibungcoefficient ζ_3 läßt sich nach den neuesten Versuchen von Weisbach als ein Mittel bei mäßigen Windgeschwindigkeiten von circa 25 Meter gleich 0,024 annehmen, jedoch ist zu bemerken, daß derselbe um so kleiner ausfällt, je größer die Geschwindigkeit der Luft in der Röhre ist. Die von Weisbach aufgestellte Formel:

$$\zeta_3 = \frac{0{,}12}{\sqrt{v}}$$

zeigt diese Abhängigkeit von der Geschwindigkeit und liefert annähernd zuverlässige Werthe. Nach derselben ist z. B.:

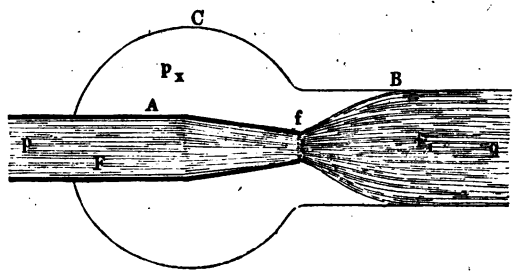
Für $v =$	9	16	25	36	49	64	81	100m
ist $\zeta_3 =$	0,04	0,03	0,024	0,02	0,017	0,015	0,013	0,012.

Vom Material der Röhre zeigte sich ζ_3 wenig abhängig, dagegen nahm der betreffende Werth mit der Zunahme des Röhrendurchmessers ab.

In Fig. 74 (a. f. S.) sei A eine Röhre, aus deren Mündung vom Quer- 35
schnitt f irgend eine Flüssigkeit strömt und daher in das weitere Rohr B vom Querschnitte f_1 gelangt. Die Flüssigkeit wird in einiger Entfernung von der Mündung das Rohr B vollständig anfüllen und zugleich die in dem vollkommen geschlossenen Behälter C enthaltene Luft theilweise mit fortreißen. In Folge dessen entsteht in dem Behälter C eine Luftverdünnung, deren Größe in dem Folgenden bestimmt werden soll. Die ausströmende Flüssigkeit stehe im Innern unter einem Druck von p Kilogramm pro Quadratmeter, der Gegendruck gegen die Oeffnung des Rohres B sei q Kilogramm und der im Inneren des Gefäßes herrschende Druck betrage während der Aus-

strömung der Flüssigkeit p_x Kilogramme. Bezeichnen wir mit v die Geschwindigkeit der aus der Röhre A strömenden Flüssigkeit, deren specifisches Gewicht γ sein

Fig. 74.



mag, mit F den Querschnitt der Röhre, mit φ den Geschwindigkeits- und r den Contractionscoefficienten, so ist n. F. 44:

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{v}{\varphi}\right)^2\left\{1-\left(\frac{rf}{F}\right)^2\right\}=\frac{p-p_x}{\gamma}.$$

Wir nehmen auch hier, wie in dem Vorigen F bedeutend größer als f an, können dann $\frac{rf}{F}$ vernachlässigen und die Flüssigkeit in dem Rohre A annähernd als ruhend betrachten. Die Ausgangsgleichung ist deshalb:

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{v}{\varphi}\right)^2=\frac{p-p_x}{\gamma}.$$

Es sei ferner die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in dem Rohre B gleich v_1, welche bei dem Uebergange aus A in B plötzlich hergestellt werden muß, woraus sich ein Arbeitsverlust ergiebt, der in gleicher Weise, wie der beim centralen Stoß unelastischer fester Körper (§. 73, Thl. I.) berechnet werden muß. Ist die Masse des stoßenden Elementes m_1, die des gestoßenen m, so ist dieser Arbeitsverlust:

$$\frac{1}{2}(v-v_1)^2\,\frac{m_1 m}{m_1+m}.$$

Vernachlässigen wir die Masse m_1 des stoßenden Flüssigkeittheilchens gegen die Masse m des gestoßenen, so ist dieser Arbeitsverlust $\frac{1}{2}(v-v_1)^2 m_1$ und wenn wir dabei die Gewichtseinheit Flüssigkeit, wie das bisher immer geschehen, in Betracht ziehen, so ergiebt sich als Arbeitsverlust:

$$\frac{1}{2g}(v-v_2)^2.$$

Die von der Flüssigkeit in der Röhre B zu überwindende Reibung ruft einen weiteren Arbeitsverlust hervor welcher, die Dimensionen der Röhre mit l_1 und d_1 bezeichnend nach dem Vorigen gleich ist:

$$\zeta_3 \frac{l_1}{d_1} \frac{1}{2g} v_1^2.$$

Die Flüssigkeit hatte nun beim Ausströmen aus der Röhre A die Arbeit $\frac{1}{2g} v^2$ in sich aufgenommen, sie steht dabei unter dem Druck p_x, während ein Gegendruck q sich geltend macht, weshalb wir das specifische Gewicht der Flüssigkeit in dem Rohre gleich γ_1 genommen, erhalten:

$$\frac{1}{2g} v^2 + \frac{p_x - q}{\gamma_1} = \frac{1}{2g} v_1^2 \left(1 + \zeta_3 \frac{l_1}{d_1}\right) + \frac{1}{2g} (v - v_1)^2$$

oder

$$\frac{p_x - q}{\gamma_1} = \frac{1}{2g} \left\{ v_1^2 \left(2 + \zeta_3 \frac{l_1}{d_1}\right) - 2 v v_1 \right\}.$$

Für den Beharrungszustand gehen in der Secunde durch alle Querschnitte gleiche Gewichtsmengen der Flüssigkeit und wenn wir noch annehmen, daß das specifische Gewicht von der Mündung f an durch das ganze Rohr B hindurch constant gleich γ_1 bleibt, so ist $f v = f_1 v_1$, daher $v_1 = \frac{f}{f_1} v$, wofür wir $m v$ schreiben wollen. Mit Benutzung dieser Angabe haben wir:

$$\frac{p_x - q}{\gamma_1} = \frac{1}{2g} v^2 \left\{ \left(2 + \zeta_3 \frac{l_1}{d_1}\right) m^2 - 2m \right\}.$$

In der letzten Gleichung stellt m einen echten Bruch vor, so daß $2m^2$ jederzeit kleiner als $2m$, und deshalb ist der Ausdruck auf der rechten Seite negativ. Hieraus folgt, daß für den Beharrungszustand, der Druck p_x in dem Behälter C jederzeit kleiner als der gegen die Mündung von B ausgeübte Druck q sein muß und daß $q - p_x$ den Ueberdruck in Bezug auf die Mündung der Röhre B vorstellt. Da nun

$$\frac{1}{2g} \left(\frac{v}{\varphi}\right)^2 = \frac{p - p_x}{\gamma} = \frac{p - q}{\gamma} + \frac{q - p_x}{\gamma}$$

und

$$\frac{q - p_x}{\gamma} = \frac{p - p_x}{\gamma} - \frac{p - q}{\gamma} \text{ gesetzt werden kann,}$$

so erhalten wir als Endgleichungen:

$$q - p_x = (p - q)\, \varphi^2 \gamma_1 \frac{2m - \left(2 + \zeta_3 \frac{l_1}{d_1}\right) m^2}{\gamma - \varphi^2 \gamma_1 \left\{ 2m - \left(2 + \zeta_3 \frac{l_1}{d_1}\right) m^2 \right\}} \quad (60)$$

$$p - p_x = \frac{(p - q)\, \gamma}{\gamma - \varphi^2 \gamma_1 \left\{ 2m - \left(2 + \zeta_3 \frac{l_1}{d_1}\right) m^2 \right\}} \quad \ldots \quad (61)$$

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{\varphi^2 (p - q)}{\gamma - \varphi^2 \gamma_1 \left\{ 2m - \left(2 + \zeta_3 \frac{l_1}{d_1}\right) m^2 \right\}} \quad \ldots \ldots \quad (62)$$

Hat die Röhre B eine geringe Länge l_1, ſo kann man noch den auf die Reibung im Rohre ſich beziehenden Summand $\zeta_3 \frac{l_1}{d_1}$ gleich o ſetzen und die für dieſe Annahme in Anwendung zu bringenden Formeln ſind deshalb:

$$q - p_x = (p - q)\,\varphi^2\,\gamma_1\,\frac{2m\,(1-m)}{\gamma - \varphi^2\,\gamma_1\,2m\,(1-m)} \quad . \quad . \quad . \quad (60a)$$

$$p - p_x = \frac{(p-q)\,\gamma}{\gamma - \varphi^2\,\gamma_1\,2m\,(1-m)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61a)$$

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{(p-q)\,\varphi^2}{\gamma - \varphi^2\,\gamma_1\,2m\,(1-m)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62a)$$

Die vorſtehenden Formeln finden Anwendung zur Berechnung der ſogenannten Saugſtrahlpumpen, deren Wirkung darin beſteht, daß durch das Ausſtrömen von Waſſer, Luft oder Dampf eine andere Flüſſigkeit, welche durch ein Rohr mit dem obigen Behälter C in Verbindung ſteht, in Folge der hier ſtattfindenden Luftverdünnung angeſaugt wird, und in Gemeinſchaft mit der durch das Rohr A ausſtrömenden Flüſſigkeit in dem Rohre B zum Ausfluß gebracht werden kann.

Uebungen.

1. Wie groß ist die Wassermenge, welche während einer Stunde aus einer Oeffnung von 0,00205 □Meter Inhalt mit 6,3 Meter Geschwindigkeit ausfließt?

46,5 Kubikmeter.

2. Durch eine Ausflußöffnung von 0,0048 □Meter Inhalt fließen in jeder Minute 0,46 Kubikmeter Wasser. Welche mittlere Geschwindigkeit hat der ausfließende Strahl?

1,6 Meter.

3. In einem Behälter von 0,2 □Meter Querschnitt bewegt sich das Wasser mit 1,9 Meter Geschwindigkeit und kommt zum Ausfluß durch eine Mündung von 0,003 □Meter Inhalt. Wie groß ist die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers?

$$F v = F_1 v_1$$

$$v_1 = 126{,}7 \text{ Meter.}$$

4. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Wassers, das aus einer Oeffnung von 0,003 □Meter in dem dünnen Boden eines Gefäßes von 0,04 □Meter Querschnitt fließt, wenn die constante Druckhöhe 3,8 Meter beträgt, und die Wasseroberfläche sowohl wie die Ausflußöffnung unter dem Drucke der atmosphärischen Luft steht. Wie groß ist die in 15 Minuten ausgeflossene Wassermenge?

$$v = \varphi \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{rF}{F_1}\right)^2}}$$

$$V = rFv.$$

Für $\varphi = 0{,}96$; $r = 0{,}64$; $r\varphi = \mu = 0{,}615$ ist

$v = 8{,}3$ Meter

$V = 14{,}34$ Kubikmeter.

5. Wie ändern sich die Resultate der vorigen Aufgabe, wenn man in der allgemeinen Formel $\frac{rF}{F_1} = 0$ setzt?

$$v = 8{,}289 \text{ Meter}$$
$$V = 14{,}32 \text{ Cubikmeter.}$$

6. Die Geschwindigkeit des in einen Behälter fließenden Wassers sei c, so ist, wenn F_1 den Querschnitt des Behälters, rF den Querschnitt des contrahirten Strahles und v die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers bezeichnet,

$$F_1 c = rFv.$$

Setzen wir hierin statt v den in §. 28 entwickelten Werth, so erhalten wir:

$$F_1 c = rF\varphi \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{rF}{F_1}\right)^2}}$$

und

$$rF = \frac{F_1}{\sqrt{1 + \varphi^2 \frac{2gh}{c^2}}}.$$

Aus dieser Formel folgt, daß bei einem stetigen Zu- und Abflusse, wobei die constante Druckhöhe h erhalten bleiben soll, der Querschnitt F der Mündung stets kleiner als der Querschnitt F_1 des Behälters bleiben, und daß die Geschwindigkeit c des zufließenden Wassers immer mehr zunehmen muß, je mehr sich F dem Querschnitt F_1 des Behälters nähert. Für den Grenzfall $F = F_1$ müßte $\frac{2gh}{c^2} = 0$, d. h. $c = \infty$ werden.

7. Welche constante Druckhöhe ist nothwendig, um aus einer Oeffnung von 0,3 □Meter in einem Boden in einer Minute 19 Kubikmeter Wasser ausfließen zu lassen, wenn der Behälter 0,5 Quadratmeter im Querschnitt hält?

$$v = 1{,}65 \text{ Meter}$$
$$h = 0{,}128 \text{ Meter.}$$

8. Auf den Kolben einer Druckpumpe wird ein Druck von 1000 Kilogramm ausgeübt. Mit welcher Geschwindigkeit fließt das Wasser aus einer 0,16 Meter weiten Oeffnung, wenn der Kolben 0,3 Meter Durchmesser hat? Welche Höhe wird der ausfließende Strahl erreichen, wenn die Ausflußöffnung nach oben gekehrt in einem horizontalen Theile der Wandung angebracht ist?

$$v = \varphi \sqrt{\frac{2g\frac{p}{\gamma}}{1 - \left(\frac{rF}{F_1}\right)^2}}$$

$$H = \frac{v^2}{2g}$$

$$v = 17{,}01 \text{ Meter}$$

$$H = 14{,}75 \text{ Meter.}$$

9. Es fließt Wasser bei einer constanten Druckhöhe von 1,6 Meter in den Condensator einer Dampfmaschine. Der Barometerstand sei 760 Millimeter und der Monometerstand im Condensator 183 Millimeter. Mit welcher Geschwindigkeit strömt das Wasser in den Condensator?

$$v = \varphi \sqrt{\left(h + \frac{p - q}{\gamma}\right) 2g}$$

$$v = 13 \text{ Meter.}$$

10. Wie groß ist die Geschwindigkeit des in den Kessel einer Dampfmaschine zufließenden Wassers, wenn dasselbe in der Speiseröhre 5 Meter über der Wasseroberfläche im Kessel steht und der Dampfdruck 1,25 Atmosphären beträgt?

$$v = 6{,}62 \text{ Meter.}$$

11. In einer dünnen Seitenwand eines Gefäßes befindet sich eine 0,16 Meter breite und 0,314 Meter hohe Oeffnung. Die Entfernung des constanten Wasserspiegels von der Mitte der Oeffnung beträgt 2,8 Meter. Wie groß ist die in einer Secunde ausfließende Wassermenge?

$$V = 0{,}23 \text{ Kubikmeter.}$$

12. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Wassers und die in einer Secunde ausfließende Wassermenge, wenn die Oeffnung sich in einer Seitenwand befindet, eine Breite von 0,3 Meter und eine Höhe von 3 Meter hat und der mittlere Wasserstand von der unteren Kante der Oeffnung 3,7 Meter beträgt?

$$v = 6{,}17 \text{ Meter}$$

$$V = 3{,}55 \text{ Kubikmeter,}$$

oder bei Annahme einer mittleren Druckhöhe von 2,12 Meter.

$$v = 6{,}19 \text{ Meter}$$

$$V = 3{,}57 \text{ Kubikmeter.}$$

13. Welche Größe muß man der Ausflußöffnung in der Seitenwand eines Gefäßes geben, wenn in jeder Secunde 0,155 Kubikmeter Wasser ausfließen sollen, und die Entfernung des Wasserspiegels von der Mitte der Oeffnung 1,9 Meter betragen soll?

$$0{,}0413 \text{ □Meter.}$$

14. Befindet sich die Ausflußöffnung unter Wasser, so ist nach Aufgabe 21 des ersten Capitels für jeden Punkt der Oeffnung die Differenz der constanten Wasserspiegel als Druckhöhe zu benutzen. Bezeichnen wir die Entfernungen der Wasserspiegel von irgend einem Punkte der Oeffnung mit h_1 und h_2, so ist für die einfachste Annahme die Geschwindigkeit

$$v = \varphi \sqrt{2g\,(h_1 - h_2)},$$

die in einer Secunde ausfließende Wassermenge

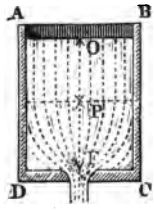
$$V = \mu\, F \sqrt{2g\,(h_1 - h_2)}.$$

Die Wasserspiegel haben von der oberen Kante der Ausflußöffnung in einer Seitenwand eine Entfernung von 3,77 Meter und 0,942 Meter, und die Größe der Ausflußöffnung sei 0,6 □Meter. Wie groß ist die Geschwindigkeit und die in einer Secunde ausfließende Wassermenge?

$$v = 7{,}15 \text{ Meter},$$
$$V = 2{,}75 \text{ Kubikmeter}.$$

15. Wird das aus dem Gefäße $ABCD$ (Fig. 75) abfließende Wasser nicht wieder ersetzt, so sinkt der Wasserspiegel und die Geschwindigkeit des ausfließenden Strahles nimmt allmälig bis auf 0 ab. Für die ursprüngliche Druckhöhe $FO = h$ ist die Geschwindigkeit v des ausfließenden Strahles, wenn wir den Querschnitt des Behälters mit F_1, den der Oeffnung mit F bezeichnen,

Fig. 75.



$$v = \varphi \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{rF}{F_1}\right)^2}},$$

während die Geschwindigkeit v_1 des im Gefäße sinkenden Wasserspiegels

$$v_1 = \frac{rF}{F_1}\, v$$
$$= \frac{r\varphi F}{F_1} \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{rF}{F_1}\right)^2}}$$
$$= \mu \frac{F}{F_1} \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{rF}{F_1}\right)^2}}$$

ist.

So lange das Gefäß $ABCD$ prismatisch ist, bleibt $\frac{F}{F_1}$ constant, die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers ändert sich daher nur mit der Druckhöhe, und da diese sich allmälig vermindert, so muß auch die Geschwindigkeit v allmälig bis auf 0 abnehmen, d. h. die Bewegung des sinkenden Wassers ist eine gleichmäßig verzögerte.

Bezeichnen wir die Zeit in Secunden, die zum Ausleeren des Gefäßes nothwendig ist, mit t und die Aenderung in der Geschwindigkeit mit j, so ist

$$v_1 = jt$$

und

$$v_1 = \sqrt{2js}.$$

Die Vergleichung der letzten Formel mit der oben hingestellten zeigt, daß

$$j = \left(\frac{\mu F}{F_1}\right)^2 \frac{g}{1 - \left(\frac{r F}{F_1}\right)^2}$$

ist.

Benutzen wir diesen Werth bei der Bestimmung von t, so ergiebt sich:

$$t = \mu \frac{F}{F_1} \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{r F}{F_1}\right)^2} : \left(\frac{\mu F}{F_1}\right)^2 \frac{g}{1 - \left(\frac{r F}{F_1}\right)^2}}$$

$$t = \frac{2 F_1}{\mu F} \sqrt{\frac{h}{2g}\left[1 - \left(\frac{r F}{F_1}\right)^2\right]}.$$

In ähnlicher Weise bestimmt sich die Zeit t, welche nothwendig ist, damit der Wasserspiegel von der ursprünglichen Höhe h_1 bis auf die Höhe h_2 herabsinke:

$$t = \frac{2 F_1}{\mu F}(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) \sqrt{\left[1 - \left(\frac{r F}{F_1}\right)^2\right] : 2g}.$$

16. Ein prismatisches Gefäß von 1 □Meter Querschnitt ist im horizontalen Boden mit einer Oeffnung von 0,3 □Meter Querschnitt versehen, und die ursprüngliche Druckhöhe sei 4,1 Meter. In welcher Zeit sinkt der Wasserspiegel, wenn kein Zufluß stattfindet, um 1,26 Meter?

In welcher Zeit leert sich der Behälter?

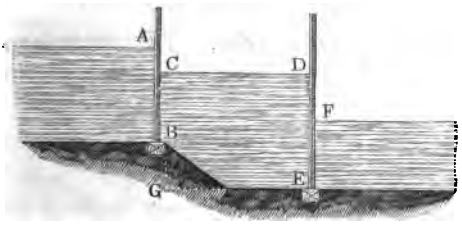
0,816 Secunden
4,863 „

17. In einem Teiche, dessen constanter Querschnitt 118 □Meter ist, befindet sich eine Schützenöffnung von 3,14 Meter Breite und 0,314 Meter Höhe. Beim Aufziehen der Schütze steht der Wasserspiegel um 2,51 Meter höher als der Mittelpunkt der Schützenöffnung. Um wie viel sinkt der Wasserspiegel innerhalb 1 Minute?

1,7 Meter.

18. Die nebenstehende Figur 76 stellt eine einfache Schleuse vor, BE ist die Kammer, AB das Oberthor und EF das Unterthor. Es sei die mittlere Länge der Schleusenkammer 47 Meter, die mittlere Breite 5,7 Meter. Der Wasserspiegel vor dem Oberthore stehe 1,57 Meter über der Mitte der Oeffnung. Die Breite beider Oeffnungen betrage 0,47 Meter; die Höhen

Fig. 76.



derselben seien für das Ober- und Unterthor 1,26 Meter und 1,9 Meter, und das Gefälle von B bis $E = BG$ sei $= 0{,}9$ Meter. In welcher Zeit füllt sich die Kammer?

In welcher Zeit wird dieselbe geleert?

Nehmen wir an, daß die Kammer auf 0,6 Meter Wasser gefüllt sei, so ist zur Füllung derselben bis auf eine Höhe, die der Mitte der Oeffnung im Oberthore entspricht, eine Wassermenge von $47 . 5{,}7\ (0{,}3 + 0{,}63) = 249{,}14$ Kubikmeter nothwendig. Durch die Oeffnung im Oberthore fließen in jeder Secunde $0{,}615 . 0{,}47 . 1{,}26\ \sqrt{2g\,1{,}57} = 2{,}021$ Kubikmeter zu, deshalb vergeht für den ersten Theil der Füllung eine Zeit t_1 von

$$\frac{249{,}14}{2{,}02} = 123 \text{ Secunden.}$$

Bei der Füllung des übrigen Theiles der Schleusenkammer nimmt die Druckhöhe allmälig von 1,57 Meter bis auf 0 ab, weshalb die zur Füllung nothwendige Zeit t_2

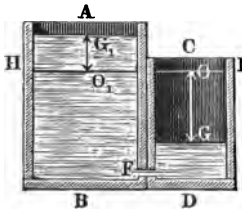
$$t_2 = \frac{2 . 47 . 5{,}7\sqrt{1{,}57}}{0{,}615 . 0{,}47 . 1{,}26\ \sqrt{2g}} = 416 \text{ Secunden.}$$

Die Zeit für die ganze Füllung ist deshalb 540 Secunden oder 9 Minuten. Die Zeit zum Leeren der Kammern ist, wenn wir annehmen, daß die Oeffnung im Unterthore ganz unter Wasser steht, da die Druckhöhe allmälig von 2,5 Meter bis auf 0 abnimmt,

$$\frac{2 . 47 . 5{,}7\ \sqrt{2{,}5}}{0{,}615 . 0{,}47 . 1{,}9\ \sqrt{2g}}$$
$$= 348 \text{ Secunden}$$
$$= 5 \text{ Minuten } 48 \text{ Secunden.}$$

19. Die beiden Gefäße AB vom Querschnitte G_1 und CD vom Querschnitte G communiciren durch die Oeffnung F (Fig. 77). In welcher Zeit steht das Wasser in beiden Gefäßen auf derselben Höhe?

Fig. 77.



Bezeichnet HR den gleichen Stand des Wassers in beiden Gefäßen, so ist

$$G_1 O_1 + G O = x + y = h$$

die ursprüngliche Druckhöhe. Die Geschwindigkeit v_1 des ausfließenden Wassers ist daher im ersten Momente:

$$v_1 = \varphi \sqrt{\frac{2g}{1 - \left(\frac{r\,F}{G_1}\right)^2}\,(x + y)},$$

oder, da $G_1 x = G y$ sein muß:

$$v_1 = \varphi \sqrt{\frac{2g}{1 - \left(\frac{rF}{G_1}\right)^2}\left(1 + \frac{G}{G_1}\right) y}.$$

Die Geschwindigkeit v des im Behälter CD steigenden Wassers ist aber

$$v = \frac{rF}{G} v_1$$

$$v = \frac{\mu F}{G} \sqrt{\frac{2g}{1 - \left(\frac{rF}{G_1}\right)^2}\left(1 + \frac{G}{G_1}\right) y}.$$

Die Bewegung ist auch hier eine gleichmäßig verzögerte, so lange die Gefäße prismatisch angenommen werden. Die Aenderung j der Geschwindigkeit ist daher:

$$j = \left(\frac{\mu F}{G}\right)^2 g \left(1 + \frac{G}{G_1}\right) : \left[1 - \left(\frac{rF}{G_1}\right)^2\right],$$

und die Zeit t in Secunden, die gebraucht wird, damit das Wasser in beiden Behältern auf derselben Höhe stehe, ist:

$$t = \frac{2G}{\mu F} \sqrt{\frac{y}{2g} \frac{1 - \left(\frac{rF}{G_1}\right)^2}{1 + \frac{G}{G_1}}},$$

oder,

$$y = \frac{h}{1 + \frac{G}{G_1}} \text{ gesetzt,}$$

$$t = \frac{2G}{\mu F\left(1 + \frac{G}{G_1}\right)} \sqrt{\frac{h}{2g}\left[1 - \left(\frac{rF}{G_1}\right)^2\right]}.$$

Andererseits ist die Zeit t, innerhalb welcher der Wasserstand von der Höhe h_1 auf h_2 sinkt:

$$t = \frac{2G}{\mu F\left(1 + \frac{G}{G_1}\right)} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) \sqrt{\left[1 - \left(\frac{rF}{G_1}\right)^2\right] : 2g}.$$

20. Aus einem Behälter fließt atmosphärische Luft, die unter einem Drucke von 0,078 Meter Manometerhöhe steht, durch eine Oeffnung von 0,00137 □Meter Querschnitt, bei einer Temperatur von 13° C., in einen Raum, in welchem das Barometer auf 732 Mlm. steht.

Wie groß ist die Geschwindigkeit der ausströmenden Luft?

Wie groß ist die in einer Secunde ausfließende Luftmasse?

Wie groß ist dieselbe auf 0^0 und den normalen Barometerstand von 760 Millimeter reducirt?

a. Die Luft behalte dasselbe specifische Gewicht

$$\gamma = \frac{p}{R\,T_1} = 1{,}3156 \text{ Kilogramm} = \frac{q}{R\,T}$$

$$T = 258{,}5,$$

daher die jedem Kilogramm Luft zu entziehende Wärmemenge

$$Q = 0{,}1684\,(T_1 - T) = 0{,}1684 \,.\, 27{,}5 = 4{,}6 \text{ Wärmeeinheiten}$$

$$v = \varphi \sqrt{2g\frac{p-q}{\gamma}} = \varphi \sqrt{2g\,RT_1\left(1 - \frac{q}{p}\right)} = 125{,}77 \text{ Meter}$$

für $\varphi = 1$.

b. Die Luft behalte dieselbe Temperatur T während der Ausströmung, dann ist

$$v = \varphi \sqrt{2g\,.\,RT\,.\,ln\,\frac{p}{q}} = \varphi \sqrt{2\,g\,.\,2{,}3026\,R\,T\,log\,\frac{p}{q}}\,.$$

Für $ln\,\frac{p}{q}$ kann man annähernd $2\,\frac{p-q}{p+q}$ setzen, mit welchem Werthe und für $\varphi = 1$ wir erhalten

$$v = 128{,}9 \text{ Meter.}$$

Die zuzuführende Wärmemenge ist $Q = A\,\frac{v^2}{2g} = 1{,}9975$ Wärmeeinheiten für jedes Kilogramm Luft.

c. Der Luft werde von Außen weder Wärme zugeführt noch entzogen, dann ist

$$\frac{T_1}{T} = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \text{ und } \frac{1}{2g}\,v^2 = \frac{c_1}{A}\,(T_1 - T).$$

Für $\varkappa = 1{,}41$ ist $\frac{\varkappa - 1}{\varkappa} = 0{,}2908$, und damit ist $T = 277{,}7$ und $v = 128{,}1$ Meter für $\varphi = 1$.

Das in der Secunde ausfließende Luftquantum ist, wenn wir den Ausflußcoefficienten $\mu = 0{,}67$ nehmen und den letzteren Geschwindigkeitswerth benutzen

$$V = 0{,}67\,.\,0{,}00137\,.\,128{,}1 = 0{,}118 \text{ Kubikmeter.}$$

Auf 0^0 und den normalen Barometerstand von 760 Millimeter reducirt, erhalten wir:

$$V_0 = V\,\frac{732}{760}\,\frac{273}{277{,}7} = 0{,}112 \text{ Kubikmeter.}$$

Das in der Secunde aus der Mündung tretende Luftgewicht ist:

$$G = V \frac{q}{RT} = 0{,}145 \text{ Kilogramm.}$$

21. Bei einer Windleitung ist das Manometer durch Wasser gesperrt und der Ausfluß erfolgt aus einer Oeffnung von 0,0021 □ Meter Querschnitt, die in einer Secunde ausfließende Luft beträgt 0,25 Kubikmeter, hat eine Temperatur von 12° C. und das Barometer steht in dem äußeren Raume 760 Millimeter.

Mit welcher Geschwindigkeit fließt die Luft aus?

Wie hoch steht das Manometer?

$$0{,}25 = 0{,}67 \,.\, 0{,}0021 \,.\, v,$$

d. h.

$$v = 177{,}6 \text{ Meter,}$$

$$177{,}6^2 = 2g \,.\, RT \left(1 - \frac{q}{p}\right),$$

d. h.

$$\frac{q}{p} = 0{,}80729, \; p = 941{,}42 \text{ Millim. Quecksilberhöhe.}$$

Der Manometerstand ist demnach

$$= 181{,}42 \text{ Millimeter Quecksilberhöhe}$$
$$= 2{,}47 \text{ Meter Wasserhöhe.}$$

22. Welche Größe muß die Ausflußöffnung in einem Gasbehälter erhalten, damit stündlich 927,5 Kubikmeter Leuchtgas bei einem Manometerstande von 0,05 Meter Wassersäule ausströmen. Der äußere Barometerstand sei 732 Millimeter, die Temperatur des Gases betrage 15° C. und das specifische Gewicht desselben ist 1,163 Kilogramm.

$$\frac{927{,}5}{60 \,.\, 60} = 0{,}67 \,.\, F \sqrt{2g \,.\, RT \, 2 \frac{p - q}{p + q}}$$

$$F = 0{,}00437 \text{ □ Meter.}$$

23. In einem Behälter befindet sich Luft von 120° C. unter einer Pressung von 157 Millimeter Manometerhöhe. Welche Luftmenge strömt in einer Secunde aus einer Oeffnung von 0,0027 □ Meter Querschnitt in einen Raum, in welchem das Barometer auf 732 Millimeter steht?

Wie groß ist diese Luftmenge bei 0° und 15° unter dem normalen Barometerstande von 760 Millimeter?

$$\frac{393}{T} = \left(\frac{889}{732}\right)^{0{,}2908},$$

daher $T = 371$

$$V = 0{,}67 \,.\, 0{,}0027 \sqrt{2g \frac{c_1}{A} (T_1 - T)} = 0{,}377 \text{ Kubikmeter}$$

$V_0 = 0{,}267$ Kubikmeter, $V_{15} = 0{,}282$ Kubikmeter.

24. Eine Windleitung hat einen Durchmesser von 0,1 Meter und das angebrachte Queckſilbermanometer zeigt einen Stand von 105 Millimeter, der bei der Manometeröffnung vorbeigehende Wind hat eine Temperatur von 12° C. und ſtrömt aus einer Oeffnung von 0,066 Meter Durchmeſſer.

Wie groß iſt die Geſchwindigkeit der ausſtrömenden Luft?

Wie groß müßte die Manometerhöhe ſein, wenn das Inſtrument an einer Stelle angebracht iſt, wo die Luft noch als ruhend betrachtet werden kann?

$$v = \sqrt{\frac{2\,g\,R\,T_1\,2\,\frac{p-q}{p+q}}{1-\left(\frac{r\,F}{F_1}\,\frac{q}{p}\right)^2}} = 150{,}5 \text{ Meter.}$$

Zur Erledigung der zweiten Frage iſt:

$$150{,}5 = \sqrt{2g\,.\,29{,}272\,.\,285\,.\,2\,\frac{p-760}{p+760}},$$

und hieraus $p = 873$ Millimeter,
daher die entſprechende Manometerhöhe
$h = 113$ Millimeter.

25. Welche Waſſermenge fließt unter einer Druckhöhe von 1,57 Meter durch eine kurze Röhre von 0,079 Meter Durchmeſſer aus, wenn der Waſſerbehälter 0,3 □ Meter Querſchnitt hat?

$$V = \mu\,F\,\frac{\sqrt{2\,g\,h}}{\sqrt{1-\left(\frac{F}{F_1}\right)^2+\zeta_1}}.$$

$\varphi = \mu = 0{,}815$; $\zeta_1 = 0{,}505$
$V = 0{,}0182$ Kubikmeter.

26. Aus einer kurzen Anſatzröhre von 0,157 Meter Durchmeſſer fließen unter einem Drucke von 6,3 Meter in jeder Minute 9,5534 Kubikmeter Waſſer aus. Wie groß iſt der Geſchwindigkeitscoefficient, der Widerſtandscoefficient und die den Hinderniſſen in der Röhre entſprechende Druckhöhe?

$$\sqrt{2\,g\,h} = \frac{V}{\mu\,F} = \frac{V}{\varphi\,F}$$

$\varphi = 0{,}757$

$$\zeta_1 = \left(\frac{1}{0{,}757}\right)^2 - 1$$
$$= 0{,}745$$
$$h_1 = \zeta_1 \cdot \frac{v^2}{2\,g} = 2{,}57 \text{ Meter.}$$

27. Welche Druckhöhe iſt für eine Röhrenleitung von 0,157 Meter Durchmeſſer nothwendig, deren Länge 41 Meter iſt und wenn vermittelſt derſelben in der Minute 1,9 Kubikmeter Waſſer fortgeleitet werden ſollen?

$$V = \frac{F\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \xi_1 + \xi_3 \frac{l}{d}}},$$

für $\xi_3 = 0{,}024$ und $\xi_1 = 0{,}505$

$h = 1{,}06$ Meter.

28. Wie groß ist die Wassermenge, welche eine Röhrenleitung von 15 Meter Länge und 0,08 Meter Weite bei 2,4 Meter Druckhöhe fortleitet?

Für $\xi_3 = 0{,}02$ ist

$V = 0{,}015$ Kubikmeter.

29. Welche Weite muß eine 25 Meter lange Röhrenleitung erhalten, die bei 1,6 Meter Druckhöhe in jeder Secunde 0,09 Kubikmeter abführen soll?

Es ist

$$V = \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{\frac{2gh}{(1 + \xi_1)\, d + \xi_3 l}}\, d,$$

daher

$$d^5 = \left(\frac{4V}{\pi}\right)^2 \frac{(1 + \xi_1)\, d + \xi_3 l}{2gh},$$

woraus wir, in dem Ausdruck rechts $d = 0$ gesetzt, zuerst einen angenäherten Werth für d erhalten, nämlich bei Annahme von $\xi_3 = 0{,}02$, $d = 0{,}1837$ Meter. Führen wir nun die Rechnung mit dem erhaltenen Werthe noch einmal durch, so ergiebt sich

$d = 0{,}2$ Meter.

30. Der lichte Durchmesser einer 942 Meter langen Röhrenleitung sei 0,262 Meter, die Druckhöhe 3,8 Meter und die in einer Secunde abzuführende Wassermasse betrage 0,02 Kubikmeter. Welchen Durchmesser hat die Ausflußöffnung, die in einer dünnen Wand am Ende der Leitung angebracht ist?

Es ist:

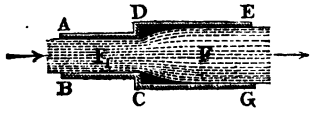
$$0{,}02 = \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{\frac{2g \cdot 3{,}8}{1{,}505 + 0{,}02 \frac{942}{0{,}262}}},$$

daher

$d = 0{,}016$ Meter.

31. Bei der Entwickelung der Formeln für die Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen ist angenommen worden, daß der Uebergang des einen Querschnittes in den folgenden allmälig geschehe. Tritt dieser Uebergang jedoch plötzlich ein (Fig. 78), so ist ein neuer Verlust an Arbeitgröße in Rechnung zu bringen, der durch den Stoß des bewegten Wassers gegen die vorliegende Wassermasse hervorgerufen wird. Nach dem Stoße nimmt das bewegte Wasserelement die Geschwindigkeit des vorhergegangenen an, beide bewegen

Fig. 78.



sich daher mit einer gemeinschaftlichen Geschwindigkeit weiter. Es tritt hiernach derselbe Fall ein, den wir bei der Behandlung des centralen Stoßes unelastischer fester Körper (§. 73, Thl. I.) untersucht haben.

Bezeichnen wir mit m_1 die Masse des stoßenden Wasserelementes, mit m die des gestoßenen, mit v_1 und v die dazu gehörigen Geschwindigkeiten, so ist dieser Verlust an Arbeitgröße:

$$\tfrac{1}{2}(v_1 - v)^2 \frac{m_1 m}{m_1 + m}.$$

Im Nenner läßt sich die Masse m_1 des stoßenden Elementes als klein gegen m vernachlässigen, wonach sich dieser Verlust durch

$$\tfrac{1}{2}(v_1 - v)^2 m_1$$

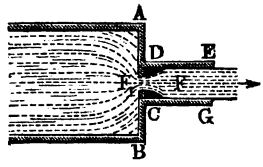
ausdrückt. Bezeichnen wir die aufeinanderfolgenden Querschnitte des Behälters mit F_1 und F, so ist

$$F_1 v_1 = F v,$$

und der obige Verlust bei Benutzung dieser Gleichung daher:

$$\tfrac{1}{2} m_1 v^2 \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2.$$

Fig. 79.



Ein ähnlicher Verlust an Arbeitgröße tritt ein, wenn das Wasser aus einem Gefäße AB (Fig. 79) in eine Röhre tritt. Ist dieser Eintritt noch durch eine dünne Wand, durch ein Sieb oder Gitter verengt, so ist auch noch auf die Contraction an dieser Stelle Rücksicht zu nehmen. Der hierdurch entstandene Verlust an Arbeitgröße ist dann:

$$\tfrac{1}{2} m_1 v^2 \left(\frac{F}{r F_1} - 1\right)^2,$$

oder allgemein gleich

$$\zeta_4 \cdot \tfrac{1}{2} m_1 v^2.$$

Versuche von Weisbach über den Ausfluß des Wassers durch Ansatzröhren, mit verengtem Eintritte, haben gezeigt, daß sich der Werth r des Contractionscoefficienten mit dem Verhältnisse $\frac{F_1}{F}$ ändert. Die entsprechenden Werthe von r und ζ_4 sind aus der folgenden Tabelle zu entnehmen:

$\frac{F_1}{F}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$r =$	0,616	0,614	0,612	0,610	0,607	0,605	0,603	0,601	0,598	0,596
$\zeta_4 =$	231,7	50,99	19,78	9,612	5,256	3,077	1,876	1,169	0,734	0,480

Andererseits ist der Werth

$r =$	0,624	0,632	0,643	0,659	0,681	0,712	0,755	0,813	0,892	1
$\zeta_4 =$	225,9	47,77	30,83	7,801	3,753	1,796	0,797	0,290	0,060	0,000

wenn sich die beiden durch die Oeffnung F_1 verbundenen Gefäße in ihrem Querschnitte wenig von einander unterscheiden.

Bildet die Achse einer Röhrenleitung an irgend einer Stelle einen Winkel ACB (Fig. 80), bildet die Röhre also ein Knie, so tritt bei dem Ueber-

Fig. 80.

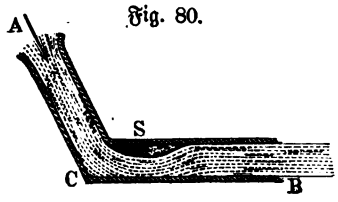
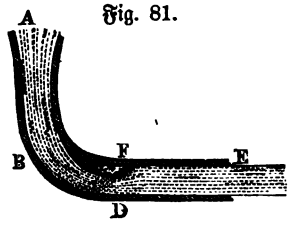


Fig. 81.



gange des Wassers ein bedeutender Verlust an Arbeitgröße ein. Ist der Schenkel CB der Röhre verhältnißmäßig kurz, so hört der volle Ausfluß aus der Röhre auf, wodurch die Ausflußmenge geringer wird, als bei einer ebenso langen geraden Röhre. Ist dagegen der Schenkel CB länger, so bildet sich hinter dem Knie ein Wirbel S, wodurch ein Theil der vorhandenen Geschwindigkeit vernichtet wird, und das Wasser tritt daher bei wieder gefülltem Querschnitte mit einer verminderten Ausflußgeschwindigkeit aus.

Bezeichnen wir die Geschwindigkeit des Wassers mit v, ein Wasserelement mit m_1 und den durch Versuche zu bestimmenden Widerstandscoefficienten bei Knieröhren mit ζ_5, so ist der Verlust an Arbeitgröße:

$$\zeta_5 \cdot {}^1/_2\, m_1 v^2.$$

Nach Angaben von Weisbach ist

$$\zeta_5 = 0{,}9457\ \sin\delta^2 + 2{,}047\ \sin\delta^4,$$

worin δ den halben spitzen Ablenkungswinkel ACB bezeichnet. In der folgenden Tabelle finden sich die für verschiedene Winkel berechneten Coefficienten ζ_5:

$\delta =$	10	20	30	40	45	50	55	60	65	70
$\zeta_5 =$	0,046	0,139	0,364	0,740	0,984	1,260	1,556	1,861	2,158	2,431

Bei Anwendung von gekrümmten Röhren, Kropfröhren (Fig. 81), ist der Verlust an Arbeitgröße viel geringer als bei Knieröhren. Bezeichnen wir diesen Verlust mit $\zeta_6 \cdot {}^1/_2\, m_1 v^2$, unter ζ_6 den durch Versuche zu bestimmenden Erfahrungscoefficienten verstanden, so ist nach Weisbach

$$\zeta_6 = 0{,}131 + 1{,}847 \left(\frac{a}{\varrho}\right)^{7/2},$$

worin a den Halbmesser der kreisförmigen Röhrenquerschnitts- und ϱ den Krümmungshalbmesser der Röhrenachse an dem Kropfe B,D bezeichnet. In der folgenden Tabelle sind die nach der letzten Formel berechneten Werthe für ζ_6 zusammengestellt:

$\frac{a}{\varrho} =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\zeta_6 =$	0,131	0,138	0,158	0,206	0,294	0,440	0,661	0,977	1,408	1,978

Handelt es sich hiernach in der Praxis um Bestimmung der Ausflußgeschwindigkeit des Wassers und der in einer gewissen Zeit ausgeflossenen Menge für Röhrenleitungen, bei welchen plötzliche Verengungen, Abzweigungen oder Kröpfe vorkommen, so ist der in §. 33 entwickelte Werth von v noch durch die in dieser Nummer angegebenen Widerstandscoefficienten zu corrigiren.

32. Befindet sich die Ausflußöffnung am Ende einer Röhrenleitung in dem oberen Theile der Röhre, so steigt der ausfließende Wasserstrahl senkrecht in die Höhe. Die Höhe des springenden Strahles, die Sprunghöhe s bestimmt sich theoretisch aus der berechneten Geschwindigkeit v durch die Gleichung

$$s = \frac{v^2}{2g}.$$

Ist andererseits δ der Neigungswinkel des springenden Strahles gegen den Horizont, so ist nach §. 18, 2. Thl. I. (Wurfhöhe):

$$s = \frac{v^2 \sin \delta^2}{2g}.$$

Diese Höhe wird jedoch niemals erhalten, da die Luft und das zurückfallende Wasser bei den senkrecht in die Höhe schwingenden Strahlen dem Aufsteigen hinderlich sind. Nach einzelnen angestellten Versuchen läßt sich mit Rücksicht hierauf

$$\frac{v^2}{2g} = s\,(1 + 0{,}00126\,s)$$

setzen.

Die Leitungsröhre zu einem Springbrunnen habe 126 Meter Länge und einen Durchmesser von 0,1 Meter. Die Röhre habe auf ihrer Länge drei Kröpfe, für welche $\frac{a}{\varrho} = 0{,}4$ ist. Der Durchmesser des Mundstückes sei 0,02 Meter und der Querschnitt des Behälters so groß, daß auf eine Bewegung des Wassers in demselben nicht gerechnet werden kann.

Wie groß ist die Sprunghöhe des Wassers, wenn die Druckhöhe 19 Meter beträgt?

$$h = \frac{v^2}{2g}\left[1 + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 \frac{l}{d}\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 + 3\,\zeta_6\right]$$

$$\zeta_1 = 0{,}505;\quad \zeta_2 = 0{,}09;$$
$$\zeta_3 = 0{,}018;\quad \zeta_6 = 0{,}206$$

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{h}{1 + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 \frac{l}{d}\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 + 3\,\zeta_6} = s\,(1 + 0{,}00126\,s)$$

$$s^2 + 794\,s = 6720, \text{ daher } s = 8{,}5 \text{ Meter.}$$

33. Aus einem mit einer Gasart gefüllten Gasometer strömt durch eine 126 Meter lange Röhre von 0,24 Meter Durchmesser Gas unter einem Drucke von 78 Millimeter Quecksilbersäule aus. Wie groß ist die in einer Secunde ausfließende Gasmenge, wenn das specifische Gewicht des Gases 0,6, bezogen auf Luft, der Barometerstand 745 Millimeter und die Temperatur 20°C. ist?

$$V = \mu F \sqrt{\frac{2g\frac{p-q}{\gamma}}{1+\xi_1+\xi_2+\xi_3\frac{l}{d}}}.$$

Ferner ist

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{RT}{0{,}6}, \text{ daher } \frac{1}{\gamma} = \frac{5}{3}\frac{RT}{p}$$

und deshalb

$$V = \mu F \sqrt{\frac{2g\,RT\left(1-\frac{q}{p}\right)\cdot\frac{5}{3}}{1+\xi_1+\xi_2+\xi_3\frac{l}{d}}}.$$

Für $\mu = 0{,}74$; $\xi_1 = 0{,}4$; $\xi_2 = 0{,}09$; $\xi_3 = 0{,}024$ ist

$$V = 1{,}5 \text{ Kubikmeter.}$$

34. Mit einem Gebläse steht eine 314 Meter lange Windleitung von 0,12 Meter Durchmesser in Verbindung. Welchen Querschnitt muß man der Düsenöffnung geben, damit in einer Secunde 0,11 Kubikmeter Luft ausströmen? Die Luft steht unter einem Drucke von 78 Millimeter Quecksilber, der Barometerstand sei 745 Millimeter und die Temperatur 9° C.

$$0{,}11 = 0{,}74\,F \sqrt{\frac{2g.2\frac{p-q}{p+q}RT}{1+0{,}38+0{,}09+0{,}024\frac{314}{0{,}12}\cdot\left(\frac{F}{\frac{\pi}{4}0{,}12^2}\right)^2}}.$$

Zur annähernden Berechnung von F wird in dem Ausdruck unter der Wurzel $F = 0$ gesetzt, dann erhalten wir

$$F = \frac{11}{74}\cdot\sqrt{\frac{1{,}47}{2g\frac{156}{1568}.29{,}272.282}} = 0{,}00142 \square\text{Meter},$$

und mit Benutzung dieses Werthes unter der Wurzel ergiebt sich

$$F = 0{,}00184 \square\text{Meter}.$$

35. Eine Windleitung von 100 Meter Länge soll in jeder Secunde 0,15 Kubikmeter Luft liefern. Der Stand des Quecksilbermanometers sei 81 Millimeter, der des Barometers 752 Millimeter. Die Temperatur des Windes sei 20° und der Durchmesser der Düsenöffnung 0,05 Meter. Welchen Durchmesser hat unter diesen Verhältnissen die Windleitung?

Es ist:

$$0{,}15 = 0{,}74 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}05^2 \sqrt{\frac{2\,g\,\frac{c_1}{A}\,(T_1 - T)}{1{,}47 + 0{,}024\,\frac{100}{d} \cdot \left(\frac{0{,}05}{d}\right)^4}}$$

und

$$\frac{T_1}{T} = \left(\frac{p}{q}\right)^{0{,}2908},$$

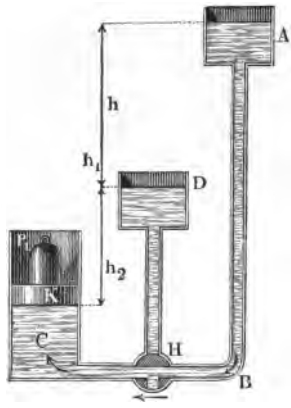
d. h.

$$\left(\frac{833}{752}\right)^{0{,}2908} = \frac{293}{T}$$

$T = 284{,}4$ und $d = 0{,}15$ Meter.

36. **Wassersäulenmaschine.** Ist die zum Betriebe einer Maschine zu verwendende Wassermenge gering, das vorhandene Gefälle aber sehr groß (100m und darüber), so ist es zweckmäßig, eine Wassersäulenmaschine als Kraftmaschine zu benutzen. Bei dieser führt man das Wasser aus dem Sammelkasten A (Fig. 82) durch die Einfallröhre AB in einen stehenden oder liegenden Cylinder C, in welchem ein Kolben K sich luft- und wasserdicht auf- und niederbewegen kann. Eine in dem Communicationsrohre BC angebrachte Vorrichtung, die sogenannte Steuerung, welche hier aus einem Tförmig durchbohrten Hahne besteht, dient dazu, die Verbindung zwischen der Einfallröhre und dem Cylinder abwechselnd herzustellen und wieder aufzuheben. In der durch die Figur angedeuteten Maschine bewirkt das Wasser nur die aufsteigende Bewegung des Kolbens, während die niedergehende Bewegung (nachdem der Hahn um 90° gedreht worden ist) durch das eigene Gewicht des Kolbens oder durch ein mit ihm verbundenes Gewicht hervorgebracht und dabei das Wasser aus dem Cylinder durch die Austragerröhre HD fortgeschafft wird.

Fig. 82.



Die in dieser Weise construirten Maschinen heißen einfachwirkende Wassersäulenmaschinen. Die Maschine ist dagegen doppeltwirkend, wenn das Wasser abwechselnd gegen die untere und obere Kolbenfläche wirken kann, wenn also der Wasserdruck den Auf- und Niedergang des Kolbens bewirkt. Man hat auch einfachwirkende Maschinen mit zwei Cylindern, einer Einfallröhre und einer Steuerung construirt, bei welchen abwechselnd die Kolben zum Steigen gebracht werden. Bei derartigen Maschinen drückt der eine Kolben bei seinem Niedergange das gebrauchte Wasser in die Austrage-

röhre, während der andere seinen Aufgang macht und umgekehrt. Die Berechnung solcher Maschinen mit zwei Cylindern wird im Allgemeinen mit der für doppeltwirkende eincylindrige übereinstimmen. Durch die auf- und niedersteigende Bewegung des Kolbens in einer Wassersäulenmaschine kann man, wie es häufig geschieht, Wasserpumpen unmittelbar in Bewegung setzen, oder es ist möglich, wenn man die auf- und niedergehende Bewegung des Kolbens in eine rotirende umsetzt, eine Wassersäulenmaschine zum Betriebe jeder anderen Maschine zu benutzen. Die Steuerung ist bei einer Wassersäulenmaschine von ganz besonderer Wichtigkeit. Durch diese Vorrichtung wird, wie schon angegeben, der Cylinder abwechselnd mit dem Betriebswasser in Verbindung gesetzt, wobei zugleich verlangt wird, daß diese nothwendige Bewegung der Steuerung durch die Maschinen selbst bewirkt werde. Es ist daher eine geeignete Verbindung der Steuerungsvorrichtung mit der Kolbenstange der Wassersäulenmaschine nothwendig. Hiernach unterscheiden wir eine innere und äußere Steuerung, und verstehen speciell unter der letzteren die Verbindung der inneren Steuerungsvorrichtung mit der Kolbenstange. Zur inneren Steuerung kann man, wie die vorige Figur zeigt, Hähne benutzen, wie sich die Anordnung noch bei älteren Maschinen findet. Bei neueren Maschinen ist am meisten die sogenannte Kolbensteuerung in Anwendung gekommen.

Diese besteht für eine eincylindrige einfachwirkende Maschine (Fig. 83) aus dem Steuerkolben *K* und dem Gegenkolben *L*, welcher eine leichtere Bewegung des Steuerkolbens durch Erzeugung eines Gegendruckes gestattet. *B* ist der den Kolben umgebende Steuercylinder, *A* das Einfall- und *D* das Ausgußrohr. Für eine doppeltwirkende oder eine zweicylindrige ein-

Fig. 83.

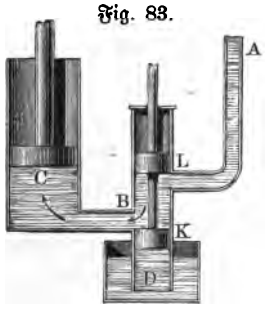
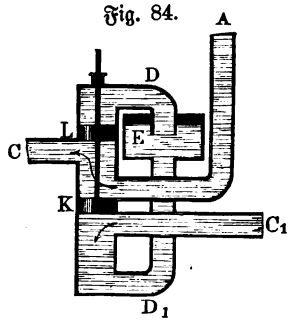


Fig. 84.



fachwirkende Wassersäulenmaschine giebt die beistehende Fig. 84 die Einrichtung der Kolbensteuerung näher an. *A* ist das Einfallrohr, *C* und C_1 sind die Verbindungsrohre mit den beiden Cylindern (oder mit den beiden Seiten des Cylinders einer doppeltwirkenden Maschine), *D* und D_1 sind endlich die Ausgußrohre. Der Figur gemäß communicirt das Rohr *C* mit dem wirksamen Wasser, während das gebrauchte Wasser durch C_1 fortgeschafft wird.

In der neuesten Zeit sind zur inneren Steuerung, ähnlich wie bei den Dampfmaschinen, Ventile und Schieber benutzt. Die Einrichtung solcher Steuerungen zeigen die Figuren 85 und 86.

37. Die äußere Steuerung bei einer Waſſerſäulenmaſchine iſt ſehr complicirt, da man es mit einem unausdehnbaren Körper, dem Waſſer, zu thun hat, welches keinen Druck weiter auszuüben im Stande iſt, wenn es von der drückenden Waſſerſäule überall abgeſperrt iſt. Wenn man die innere Steuerung unmittelbar durch die Kolbenſtange in Bewegung ſetzen wollte, ſo würde der

Fig. 85.

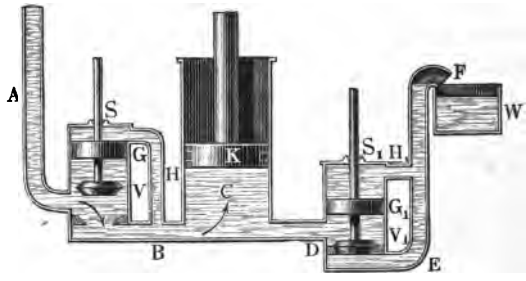
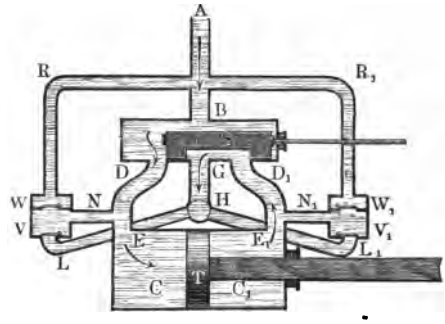


Fig. 86.



Kolben während der Zurücklegung ſeines letzten Wegtheiles nicht im Stande ſein, die Umſteuerung vollſtändig zu beendigen. Der Austritt des gebrauchten Waſſers würde dadurch verhindert werden; der Kolben und mit ihm die Steuerung in Ruhe kommen, die Maſchine alſo plötzlich zum Stillſtehen gebracht werden. Aus dieſem Grunde und um die dabei vorkommenden nachtheiligen Erſchütterungen zu vermeiden, iſt es nothwendig, beſondere mechaniſche Hülfsmittel zu benutzen, die äußere Steuerung alſo nicht unmittelbar durch die Bewegung des Kolbens vollziehen zu laſſen.

Bei den einfachwirkenden Waſſerſäulenmaſchinen, ſowie bei allen denen, die eine hin- und hergehende Bewegung übertragen ſollen, gebraucht man einen Zwiſchenapparat, welcher für die fernere Bewegung der Steuerung zu ſorgen hat, wenn der Kolben im Cylinder zur Ruhe gekommen iſt. Dieſe Anordnung beſteht:

1. In einem Gewichte, welches von der Kolbenſtange bei ihrem Aufgange emporgehoben und von ihr in dem Augenblicke fallen gelaſſen wird, wenn ſie ihren Weg zurückgelegt hat.

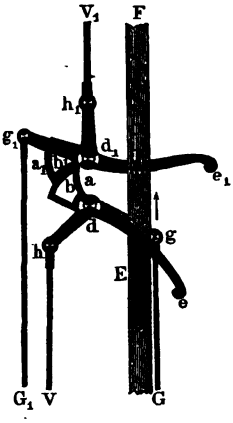
2. In einer Feder, welche während der Kolbenbewegung gespannt und am Ende derselben losgelassen wird.

3. In einer Hülfswassersäulenmaschine, deren Treibkolben die Steuerung der Hauptmaschine zu der Zeit in Bewegung setzt, wenn der Treibkolben derselben den letzten Theil seines Weges durchläuft.

Die Gewichtssteuerung kommt zur Anwendung, wenn die innere Steuerung durch einen Hahn, Kolben oder ein Ventil bewirkt wird.

Für die letztere Anordnung zeigt die nebenstehende Fig. 87 die Construction der äußeren Steuerung. Die Steuerstange F ist mit der Kolbenstange der Wassersäulenmaschine durch einen Querarm verbunden, so daß beide sich gemeinschaftlich auf- und niederbewegen. Bei dem Aufgange der Steuerstange dreht der Knaggen E den Hebel de um d, das damit in Verbindung stehende Gewicht G wird gehoben, und das Ventil bei V geschlossen. Der auf derselben Welle sitzende Kreissector ab kommt dabei außer Berührung mit dem auf der Welle d_1 sitzenden Kreissector $a_1 b_1$, das Gewicht G_1 fällt nieder, sobald b_1 frei geworden und das Ventil bei V_1 wird dadurch geöffnet. Die Kreissectoren berühren sich jetzt mit den Seiten a und a_1, so daß der Sector ab und das dazu gehörige Gewicht auch bei dem Niedergange der Stange F an seiner Stelle gehalten wird, bis ein an der hinteren Seite der Stange angebrachter Knaggen den Hebel $d_1 e_1$ um d_1 dreht, wodurch das Gewicht G_1 gehoben und das Ventil bei V_1 geschlossen wird. Sobald dadurch der Kreissector ab bei a frei geworden, fällt das Gewicht G nieder, das Ventil bei V wird geöffnet und das Wasser kann nun unter den Kolben treten, so daß das Spiel von Neuem beginnt.

Fig. 87.



Was schließlich die äußere Steuerung bei denjenigen Wassersäulenmaschinen anbetrifft, deren auf- und niedergehende Bewegung in eine rotirende verwandelt wird, so verbindet man die innere Steuerung mit dem Rotationsmechanismus. Kommt die Kolbensteuerung zur Anwendung, so giebt man dem Steuerkolben eine so kleine Höhe, daß er bei der Stellung vor der Einmündungsöffnung dieselbe nicht ganz verschließe. Benutzt man dagegen einen Schieber zur Steuerung, so verbindet man die Communicationsröhre D und D_1 (s. Fig. 86) mit dem Austragerohre durch die Röhren L und L_1, und mit dem Einfallrohre durch die Leitungen R und R_1. Beide abgezweigten Rohre sind durch Ventile abgesperrt, die auch so lange geschlossen bleiben, bis der Schieber seinen mittleren Stand angenommen. Befand sich der Kolben in seinem Aufgange, so öffnen sich die Ventile in L und R_1, wobei durch L so viel Wasser aus dem Austragrohre in den Cylinder gesaugt wird, daß der Kolben seinen Weg vollenden kann, während das über dem Kolben stehende Wasser durch das Ventil

in R_1 dabei bis zur Eintrageröhre gedrückt wird. Beim Niedergange des Kolbens öffnen sich in entgegengesetzter Weise die Ventile in L_1 und R.

38. Zur Berechnung einer Wassersäulenmaschine sei d und F Durchmesser und Querschnitt des Treibkolbens, h_1 die senkrechte Entfernung des Wasserspiegels in der Eintragröhre und h_2 die senkrechte Entfernung der Ausgußmündung von dem mittleren Kolbenstande, das zur Anwendung kommende Gefälle h ist hiernach $h_1 - h_2$, der Kolbenweg sei für ein vollständiges Spiel $2s$, die mittlere Geschwindigkeit des Kolbens v und V die in einer Secunde zufließende Wassermasse in Kubikmetern. Für diese Annahmen ist

$$1.\quad \begin{cases} V = {}^1/_2\, F\, v = {}^1/_2\, \dfrac{\pi\, d^2}{4}\, v \text{ für einfachwirkende Maschinen,} \\ V = F\, v = \dfrac{\pi\, d^2}{4}\, v \text{ für doppeltwirkende Maschinen.} \end{cases}$$

Werden in der Minute u vollständige Spiele gemacht, so ist

$$2.\quad u = \frac{60\, v}{2\, s} = \frac{30\, v}{s}.$$

Bei einer Bewegung des Kolbens durch das Wasser ist der gegen die Fläche ausgeübte Druck:

$$F h_1 \gamma - R_1,$$

und bei dem Rückgange des Kolbens ist der zu überwindende Druck:

$$F h_2 \gamma + R_2.$$

unter R_1 und R_2 die Kolbenreibungen verstanden. Für diese setzen wir nach Nro. 32 der Uebungen des ersten Capitels Thl. II.:

$$R_1 = \mu . \pi\, d\, b\, h_1 \gamma = 4\, \mu . F h_1 \gamma\, \frac{b}{d}$$

$$R_2 = \mu . \pi\, d\, b\, h_2 \gamma = 4\, \mu . F h_2 \gamma\, \frac{b}{d},$$

unter b die Breite der reibenden Fläche verstanden.

Nach der Substitution dieser Werthe erhalten wir den gegen den Kolben ausgeübten Druck

$$= F h_1 \gamma \left(1 - 4\, \mu\, \frac{b}{d}\right),$$

den von dem Kolben zu überwindenden Druck

$$= F h_2 \gamma \left(1 + 4\, \mu\, \frac{b}{d}\right).$$

Es ist hiernach der gegen die Kolbenfläche wirksame Druck:

$$F\gamma\left(h_1 - h_2 - 4\,\mu \frac{b}{d}(h_1 + h_2)\right) = F\, h\, \gamma \left[1 - 4\, \mu\, \frac{b}{d}\left(\frac{2\, h_2}{h} + 1\right)\right].$$

Wird derselbe mit dem Kolbenhube s multiplicirt, so erhalten wir die

mittlere Arbeitgröße des Waſſers in der Maſchine während eines vollſtändigen oder eines halben Spiels, je nachdem eine einfachwirkende oder doppeltwirkende Maſchine vorausgeſetzt wird. Die mittlere Arbeitſtärke iſt dann

$$3.\quad \begin{cases} L^{=} = \frac{u\,s}{60}\, F\,h\,\gamma \left[1 - 4\mu\frac{b}{d}\left(\frac{2\,h_2}{h} + 1\right)\right] \\ \text{für einfachwirkende Maſchinen.} \\ L^{=} = \frac{u\,s}{30}\, F\,h\,\gamma \left[1 - 4\mu\frac{b}{d}\left(\frac{2\,h_2}{h} + 1\right)\right] \\ \text{für doppeltwirkende Maſchinen.} \end{cases}$$

Subſtituiren wir hierin noch die pr. Secunde zufließende Waſſermenge V, ſo erhalten wir für jede Art Maſchine:

$$4.\quad L^{=} = V\,h\,\gamma \left[1 - 4\mu\frac{b}{d}\left(\frac{2\,h_2}{h} + 1\right)\right].$$

Aus dem letzten Ausdrucke ergiebt ſich, daß der durch die Kolbenreibung hervorgerufene Verluſt an Arbeitſtärke mit der Zunahme von $\frac{h_2}{h}$ wächſt, d. h. die Kolbenreibung iſt um ſo größer, je tiefer die Maſchine unter dem Ausgangspunkte ſteht. Setzen wir beiſpielsweiſe $h_2 = {}^1/_8\,h$ und nehmen, wie es bei den meiſten Maſchinen der Fall iſt, $\frac{b}{d} = 0{,}2$ und $\mu = 0{,}25$, ſo iſt die mittlere Arbeitſtärke

$$L^{=} = 0{,}75\,V h\,\gamma,$$

d. h. der durch die Kolbenreibung verurſachte Verluſt beträgt 25 Procent der theoretiſch vorhandenen Arbeitſtärke.

Ein anderer Verluſt bei den Waſſerſäulenmaſchinen entſteht aus der Reibung des Waſſers in der Einfall- und Austragröhre. Nennen wir die Durchmeſſer d_1 und d_2, die Länge l_1 und l_2, die Geſchwindigkeiten des Waſſers in denſelben v_1 und v_2, ſo iſt

$$5.\quad V = \frac{\pi d^2}{4}\,v = \frac{\pi d_1^2}{4}\,v_1 = \frac{\pi d_2^2}{4}\,v_2,$$

woraus ſich v_1 und v_2 durch v ausdrücken laſſen. Der für die Reibung in Röhren nothwendige Widerſtandscoefficient iſt nach §. 32 gleich ζ_3, und die ſich dadurch ergebenden Verluſte an Arbeitſtärke ſind für die Eintragröhre:

$$\zeta_3\,\frac{l_1}{d_1}\,\frac{v_1^2}{2\,g}\,V\gamma = \zeta_3\,\frac{l_1\,d^4}{d_1^5}\,\frac{v^2}{2\,g}\,V\gamma$$

für die Austragröhre:

$$\zeta_3\,\frac{l_2\,d^4}{d_2^5}\,\frac{v^2}{2\,g}\,V\gamma.$$

Dieſe Verluſte werden um ſo geringer, je weiter die Röhren ſind und je langſamer ſich der Treibkolben auf und niederbewegt. Die mittlere Ge-

schwindigkeit des Kolbens nimmt man gewöhnlich = 0,3 Meter und die in den Röhren zwischen 1,6 bis 3 Meter. Für diese letzte Annahme ist nach der Tabelle in §. 33 $\xi_3 = 0{,}02$. Nehmen wir hiernach $v_1 = v_2 = 6v =$ 1,8 Meter, so ist $d_1 = d_2 = \frac{d}{6}\sqrt{6}$, und die durch die Wasserreibung verursachten Arbeitsverluste sind

$$V\gamma \frac{l_1 + l_2}{d} \cdot \frac{0{,}02 \cdot 1{,}8^2 \cdot \sqrt{6}}{2g} = 0{,}00809 \frac{l_1 + l_2}{d} V\gamma$$

Bringen wir diesen Arbeitsverlust von der oben entwickelten mittleren Arbeitstärke in Abzug, so ergiebt sich bei Berücksichtigung dieser Reibung

$$6.\quad L^{=} = V\gamma \left(0{,}75\, h - 0{,}00809 \frac{l_1 + l_2}{d}\right).$$

Während des Ganges einer Wassersäulenmaschine ändert sich die Geschwindigkeit des Wassers in bedeutendem Maße. Bei der Absperrung des Wassers durch die Steuerung wird die Geschwindigkeit in den Röhren fast ganz vernichtet, so daß bei der wieder anfangenden Bewegung die Geschwindigkeit von Neuem erzeugt, die Trägheit des Wassers also überwunden werden muß. Der hieraus resultirende Arbeitverlust ist für die Eintragröhre:

$$\frac{\pi d_1^2}{4} l_1 \gamma \frac{v_1^2}{2g} = \frac{\pi d^2}{4} \frac{d^2 l_1}{d_1^2} \gamma \frac{v^2}{2g},$$

für die Austragröhre

$$\frac{\pi d_2^2}{4} l_2 \gamma \frac{v_2^2}{2g} = \frac{\pi d^2}{4} \frac{d^2 l_2}{d_2^2} \gamma \frac{v^2}{2g}.$$

Setzen wir wieder, wie oben, $v_1 = v_2 = 6v = 1{,}8$ Meter; $d_1 = d_2 = \frac{d}{6}\sqrt{6}$, so ist der hierdurch entstehende Verlust an Arbeitstärke

$$\frac{\pi}{4} d^2 (l_1 + l_2) \gamma \frac{6 v^2}{2g}.$$

Führen wir die in einer Secunde zufließende Wassermasse V ein, so ist für einfachwirkende Maschinen

$$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{2V}{v} = \frac{60 V}{us},$$

für doppeltwirkende Maschinen

$$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{V}{v} = \frac{30 V}{us},$$

und der obige Verlust an Arbeitstärke wird

$$(l_1 + l_2) V\gamma \frac{12 v}{2g}$$

oder

$$(l_1 + l_2)\ V\gamma\ \frac{6v}{2g}.$$

Aus den erhaltenen Werthen ergiebt sich ebenfalls, daß diese Verluste sich mit der Abnahme der Geschwindigkeit v und mit der Zunahme der Weite der Röhren vermindern. Außerdem werden diese Verluste kleiner mit der Zunahme des Kolbenhubes s, den man gleich $2{,}5\,d$ bis $6\,d$ zu nehmen pflegt, und mit der Abnahme der Länge $l_1 + l_2$. Die übrigbleibende mittlere Arbeitstärke ist demnach für $v = 0{,}3$ Meter

$$7.\quad \begin{cases} L^{=} = V\gamma \left\{0{,}75\,h - (l_1 + l_2)\left(\frac{0{,}00809}{d} + 0{,}183\right)\right\}, \\ L^{=} = V\gamma \left\{0{,}75\,h - (l_1 + l_2)\left(\frac{0{,}00809}{d} + 0{,}092\right)\right\}. \end{cases}$$

Nehmen wir als Beispiel $V = 0{,}03$ Kubikmeter und das Gefälle $h = 110$ Meter $v_1 = v_2 = 6\,v = 1{,}8$ Meter, so ist für eine einfachwirkende Wassersäulenmaschine

$$^1/_2 \frac{\pi}{4}\, d^2 . 0{,}3 = V$$

$$d = \sqrt{\frac{0{,}8}{\pi}} = 0{,}505 \text{ Meter}.$$

Nehmen wir die Länge l_1 der Einfallröhre zu 126 Meter und die der Austragröhre $= 19$ Meter, so ist

$$(l_1 + l_2)\left(\frac{0{,}00809}{d} + 0{,}183\right) = 28{,}855.$$

Die mittlere Arbeitstärke ist daher

$$L^{=} = 0{,}03 . 1000\ (0{,}75 . 110 - 28{,}855)$$
$$= 1608^{\frac{km}{=}}$$

oder

$$L^{=} = 21{,}44 \text{ Pferdestärken}.$$

Der Nutzeffect η dieser Maschine ist

$$\eta = \frac{0{,}03 . 1000 . 53{,}6}{0{,}03 . 1000 . 110}$$
$$= 0{,}48.$$

Anmerkung. Bei den obigen Entwickelungen sind diejenigen Verluste außer Betracht gelassen worden, welche dadurch entstehen, daß sich das Wasser in Röhren von verschiedenen Querschnitten bewegen und in plötzlich abgezweigte Röhren übergeführt werden muß.

39. Wasserpumpen. Unter den verschiedenen Maschinen, die zur Förderung des Wassers benutzt werden, stehen die Pumpen obenan, da sie sich dauerhaft construiren lassen, bei geringen Reparaturen lange Zeit aushalten, leicht transportabel sind und weniger Unterhaltungskosten erfordern, als die

übrigen zur Wasserhebung benutzten Maschinen. Die Pumpen gehören zu den Arbeitmaschinen, erfordern daher zu ihrem Betriebe irgend eine Kraftmaschine; die Art der letzteren ist ganz beliebig, nur von localen Verhältnissen abhängig, so daß Pumpen durch Menschen und Thiere, durch Wasserräder, Wassersäulenmaschinen, Windmühlen und Dampfmaschinen betrieben werden.

Die wesentlichen Bestandtheile einer Pumpe sind folgende:

1. Der Pumpencylinder oder der Stiefel. Dieser besteht aus Holz, Guß- oder Schmiedeeisen, Kupfer oder Messing, und bildet eine Röhre, deren Querschnitt gewöhnlich ein Kreis ist.

2. An den Stiefel schließt sich, luft- und wasserdicht mit demselben verbunden, das Saugrohr, welches mit dem Stiefel aus demselben Material hergestellt ist.

3. Der Kolben ist ein in dem Stiefel sich gewöhnlich auf- und niederbewegender Körper, der aus Holz, Schmiedeeisen, Gußeisen oder Messing besteht, und dessen dichter Anschluß an die Wandung des Stiefels durch eine Liderung (Lederung) bewirkt wird, welche aus Leder oder Hanf besteht. Mit dem Kolben ist die Kolbenstange verbunden, an welche die disponibele Kraft zur Bewegung der Pumpe übertragen wird. Eine andere Art, die Rotationspumpen, unterscheiden sich von den angegebenen dadurch, daß der Kolben eine Bewegung im Kreise zu machen hat.

4. Ventile. Dies sind bewegliche Theile, welche der Flüssigkeit den Eintritt in eine Röhre gestatten oder verhindern. Das Oeffnen und Schließen der Ventile geschieht durch die bewegte Flüssigkeit selbst (durch Maschinenbewegung bei den Dampfmaschinen).

5. Steig- oder Leitungsröhren, welche aus ähnlichen Materialien wie der Stiefel und das Saugrohr hergestellt werden.

Nach der verschiedenen Wirkungsweise unterscheidet man die Pumpen in Saug-, Hebe- und Druckpumpen. Da jedoch die meisten Hebe- und Druckpumpen auch mit einem Saugrohr versehen sind, und andererseits die Saugpumpen auch das Wasser auf geringere oder größere Höhen zu heben haben, so ist es zweckmäßiger, diese Eintheilung aufzugeben und die Pumpen anstatt dessen nach der Beschaffenheit ihrer Kolben zu unterscheiden. In Bezug hierauf construirt man die Pumpen

a) mit Ventilkolben und

b) mit massivem Kolben.

Ventile und Kolben sind den Pumpen eigenthümliche Maschinentheile, welche deshalb, bevor wir die Pumpen näher untersuchen, einer kurzen Erörterung unterworfen werden sollen.

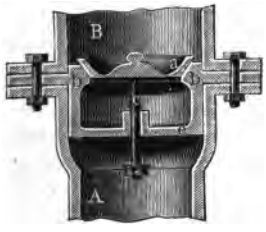
An jedem Ventile sind zwei Haupttheile zu unterscheiden; 1. der zu bewegende Theil, gewöhnlich für sich schon das Ventil genannt, durch welchen das Oeffnen oder der Verschluß hervorgebracht wird; 2. die das eigentliche Ventil unterstützende Unterlage, welche der Berührungsfläche des ersten Theiles entspricht und Sitz oder Ventilsitz heißt. Je nach der verschiedenen Form

des beweglichen Theiles unterscheidet man Klappen-, Kegel-, Muschel-, Scheiben-, Kugel- und andere Ventile. Von einem guten Ventile verlangt man, daß es bei einem dichten Schlusse hinreichende Stärke und Festigkeit besitze, um den darauf lastenden Druck der Flüssigkeit auszuhalten, ohne dadurch ein zu großes Gewicht zu erhalten und für die Bewegung zu viel Kraft zu beanspruchen. Andererseits müssen sich die Ventile weit genug öffnen und schnell wieder schließen, um für die Flüssigkeit einen leichten Durchgang zu gestatten und das Zurückgehen der gehobenen Flüssigkeit zu verhindern.

Die Dichtung wird bei metallenen Ventilen durch genaue Bearbeitung, bei den übrigen durch Lederbelegung bewirkt. Der Hub des Ventiles muß so groß sein, daß die dadurch entstehende Ausflußöffnung gleich dem Querschnitte des Saugrohres werde. Es ist hiernach nothwendig, den Hub eines Ventiles zu begrenzen, was bei den verschiedenen Ventilen auf verschiedene Weise geschieht. Ein leichtes und bequemes Nachsehen der Ventile ist wünschenswerth, weshalb sie jederzeit leicht zugänglich angebracht werden müssen. Gewöhnlich finden sich die Ventile an der Verbindungsstelle zweier Röhrenstücke oder in einer besonderen, durch eine Platte verschließbaren Ventilkammer.

Die Klappenventile sind einfach, billig und entsprechen in den meisten Fällen den an ein gutes Ventil gemachten Bedingungen, bei der Förderung von tropfbaren Flüssigkeiten. Die Klappen werden für Wasserpumpen aus Leder, für heiße Flüssigkeiten aus Gummi, Messing oder Rothguß gefertigt. Um den Leder-Klappen ein größeres Gewicht zu geben, befestigt man auf der oberen und unteren Seite derselben Metallstücke. Ein Kegelventil (Fig. 88) besteht aus dem massiven oder ausgehöhlten abgestumpften Kegel *a*, an den sich in der Achsenrichtung ein Stiel *c* anschließt, der an seinem unteren Ende mit einer Scheibe und Mutter versehen ist und in dem Stege *e* seine Führung hat, wodurch die Hubhöhe begrenzt ist. Der Ventilsitz *b* ist an der Berührungsstelle entsprechend konisch ausgehöhlt, wodurch ein dichter Schluß bewirkt wird. Dieser dichte Schluß wird durch unreines sandiges Wasser gestört, weshalb in solchen Fällen Kegelventile unbrauchbar sind. Die Seiten des Ventils sollen mit der Achse wenigstens einen Winkel von 45° bilden; besser ist es, den Winkel größer zu nehmen, damit ein Festklemmen des Ventils unmöglich werde.

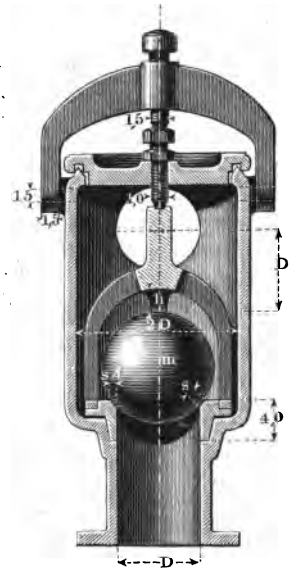
Fig. 88.



Die Kugelventile (Fig. 89) werden nur in Metall ausgeführt und bestehen ähnlich den Kegelventilen, aus einem nach einer Kugelfläche ausgehöhlten Sitze, in welchem volle Kugeln liegen, die mit dem Sitze gut zusammengeschliffen sein müssen. Bei genauer Ausführung sind die Kugelventile die besten, jedoch wendet man sie nur wegen der schwierigen Ausführung im Kleinen an (für Speisepumpen der Locomotiven). Der Hub des Ventils wird

durch das Gehäuse begrenzt. Der Durchmesser der Kugeln wird etwa gleich 65 bis 78mm, der Hub gleich 7 bis 10mm genommen, um das starke Schlagen zu verhindern.

Fig. 89.



Es sei d der Durchmesser der Ventilöffnung und der des unterhalb des Ventils sich anschließenden Rohres, d_1 der Durchmesser des oberen Rohres und a die Hubhöhe des Ventiles, so haben wir für die Bedingung, das die Ausflußöffnung des Ventiles mit dem Querschnitte des unteren Rohres übereinstimme

$$\frac{\pi}{4} d^2 = \pi d a.$$

Ferner soll der Raum zwischen der Wandung des oberen Rohres und dem Ventile, ebenfalls gleich dem Querschnitte des unteren Rohres sein, so daß wir erhalten

$$\frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} (d_1^2 - d^2).$$

Beim Klappenventile verstehen wir unter a die mittlere Hubhöhe der Klappe, so daß, wenn wir mit α den Erhebungswinkel der Klappe bezeichnen, für dasselbe $a = \frac{d}{2} \sin\alpha$ ist. Die Projection der Klappe, normal zur Röhrenachse, ist eine Ellipse, mit den Achsen d und $d \cos\alpha$, deren Fläche deshalb $\frac{\pi}{4} d^2 \cos\alpha$. Um diese Fläche verringert sich die Durchgangsöffnung, daher hat man für Klappenventile

$$\frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} (d_1^2 - d^2 \cos\alpha).$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich

1) für Hubventile

$$a = \frac{d}{4} \text{ und } d_1 = 1{,}4\, d,$$

2) für Klappenventile

$$\alpha = 30^0 \text{ und } d_1 = 1{,}365\, d.$$

Der Verlust an Arbeitstärke, den das Wasser erleidet, wenn es sich durch ein Ventil zu drängen hat, findet sich, wie in Nr. 31 dieser Uebungen, gleich

$$\zeta_4 \cdot {}^1/_2 m_1 v^2 = {}^1/_2 m_1 v^2 \left(\frac{F}{r F_1} - 1\right)^2,$$

worin m_1 die in einer Secunde zu bewegende Wassermasse, v deren Geschwindigkeit, F_1 die Oeffnung im Ventile, F den Querschnitt der Röhre bezeichnet. Für Kegelventile ist nach Weisbach:

$$\zeta_4 = \left(\frac{F}{r\,F_1} - 1\right)^2 = 11,$$

wenn $\frac{F_1}{F} = 0{,}381$. Bei Benutzung dieser Angabe erhalten wir für jedes beliebige Verhältniß von $\frac{F_1}{F}$ den als constant zu betrachtenden Werth

$$r = 0{,}608,$$

und allgemein den Widerstandscoefficienten:

$$\zeta_4 = \left(1{,}645\,\frac{F}{F_1} - 1\right)^2.$$

Für Klappenventile war den Versuchen gemäß der Ausdruck $\left(\frac{F}{r\,F_1} - 1\right)^2$ nicht constant, sondern änderte sich vielmehr mit der Größe des Oeffnungswinkels. Nehmen wir mit Weisbach $\frac{F_1}{F} = 0{,}535$, so ist z. B. bei einem Oeffnungswinkel von 15°

$$\zeta_4 = \left(\frac{F}{r\,F_1} - 1\right)^2 = 90$$

und

$$r = \frac{1}{(1 + \sqrt{90})\,0{,}535} = 0{,}178.$$

In der folgenden Tabelle finden sich bei den verschiedenen Oeffnungswinkeln die Werthe von r und ζ_4 für Klappenventile:

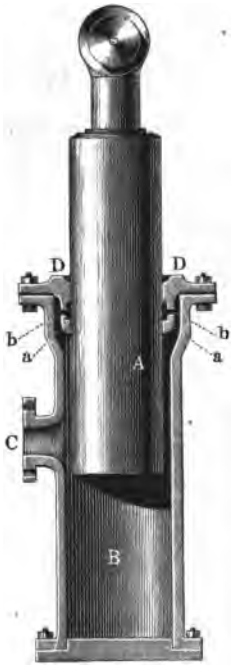
Oeffnungswinkel =	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	60°	70°
r =	0,178	0,210	0,250	0,289	0,342	0,394	0,458	0,524	0,670	0,812
ζ_4 =	90	62	42	30	20	14	9,5	6,6	3,2	1,7

Der in dem Pumpencylinder sich auf- und niederbewegende Theil heißt der Kolben, und besteht aus dem Kolbenkörper, dem eigentlichen Kolben und der Liderung. Ein guter Kolben muß einen dichten und nachhaltigen Schluß im Stiefel bewirken und sich leicht bewegen lassen. Der Kolbenkörper besteht aus Holz oder Metall, die Liderung aus Leder, Hanf, Filz, Guttapercha (bei

den Dampfkolben aus Metall). Die sogenannten Bramah'schen Kolben, die bei hydraulischen Pressen, Wassersäulenmaschinen und Speisepumpen für Dampfmaschinen in Anwendung sind, unterscheiden sich von den übrigen Kolben dadurch, daß sie einen Cylinder bilden, der mit dem Stiefel dieselbe Länge hat, nur daß die Liderung im Pumpencylinder befestigt ist. Wendet man hierbei eine Hanfliderung an, so ist diese an dem oberen Theile des Stiefels in einer sogenannten Stopfbüchse anzuordnen (Fig. 90). Die Stopfbüchse besteht aus der hohlen Schraubenspindel *d*, die an ihrem oberen Ende einen sechseckigen Querschnitt hat, um das Einschrauben in den Pumpencylinder leichter bewerkstelligen zu können. Die ausgedrehte Vertiefung in dem oberen Theile dient zur Aufnahme des Schmiermittels, in die Höhlung des unteren Theiles preßt sich die Hanfliderung *c* ein, die auf einem ungefähr 7mm hohen Messingringe ruht, der den Kolben *b* umschließt. Bei dem Aufschrauben der Stopfbüchse auf den Pumpenstiefel wird die Hanfliderung an den Kolben angedrückt und auf die Weise ein dichter Schluß bewirkt. Um die verhältnißmäßig große Kolbenreibung herabzuziehen, wendet man bei diesen Kolben anstatt der Hanfliderung eine hydrostatische Liderung an, bei welcher das Leder durch das Wasser gegen die Oberfläche des Kolbens gedrückt wird. In Fig. 91 ist *A* der Bramah-Kolben, *B* der Cylinder, *C* das Zuleitungsrohr, *DD* die aufgeschraubte Liderungsbüchse, *aa* der Liderungsring, *bb* die Bohrung für die hydrostatische Liderung. Die mit ihrer Liderung fest verbundenen Kolben sind entweder massiv oder durchbrochen. Die gewöhnlichste Art der massiven Kolben ist in Fig. 92 gegeben. Es ist dies ein sogenannter Scheibenkolben, der aus einer beliebigen Anzahl von in Talg getränkten Leder oder Filzscheiben *c* besteht, welche zwischen den beiden kleineren Endflächen *d* des metallenen Kolbens auf das Ende der Kolbenstange aufgeschraubt werden. Die obere Metallscheibe wird durch den Bund *e* festgehalten,

Fig. 90.

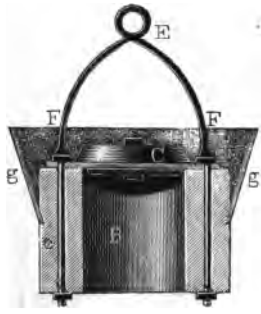
Fig. 91.



die untere dagegen durch die Schraube mit Mutter befestigt, wodurch zugleich eine innige Zusammenpressung der Dichtungsplatten bewirkt wird. Die durchbrochenen oder hohlen Kolben müssen mit einem Ventile versehen sein, weshalb sie auch Ventilkolben genannt werden. Die nebenstehende Figur 93 zeigt einen

Fig. 92.

Fig. 93.



der einfachsten Kolben. Der Körper *e* ist ein Cylinder aus Holz, der zugleich zur Befestigung des Bügels *FEF* dient, welcher die Verbindung mit der Kolbenstange vermittelt. Die Oeffnung *B* des Kolbens ist durch ein gewöhnliches Klappenventil *C* gesperrt, dessen Lederkappe durch den Ansatz des Bügels befestigt ist. Zur Dichtung des Kolbens dient der Lederstulp *g*, welcher rings um den Kolben genagelt und an seinen beiden Enden zusammengenäht ist. Für größere Saugwerke benutzt man einen mit einem doppelten Klappenventile versehenen Kolben aus Gußeisen. Sollen heiße Flüssigkeiten fortgeschafft werden, so werden die Kolben aus Metall mit Scheibenventilen gefertigt, bei welchen die Liderung aus Hanf, Werg oder Metall bestehen muß (Fig. 94).

Fig. 94.

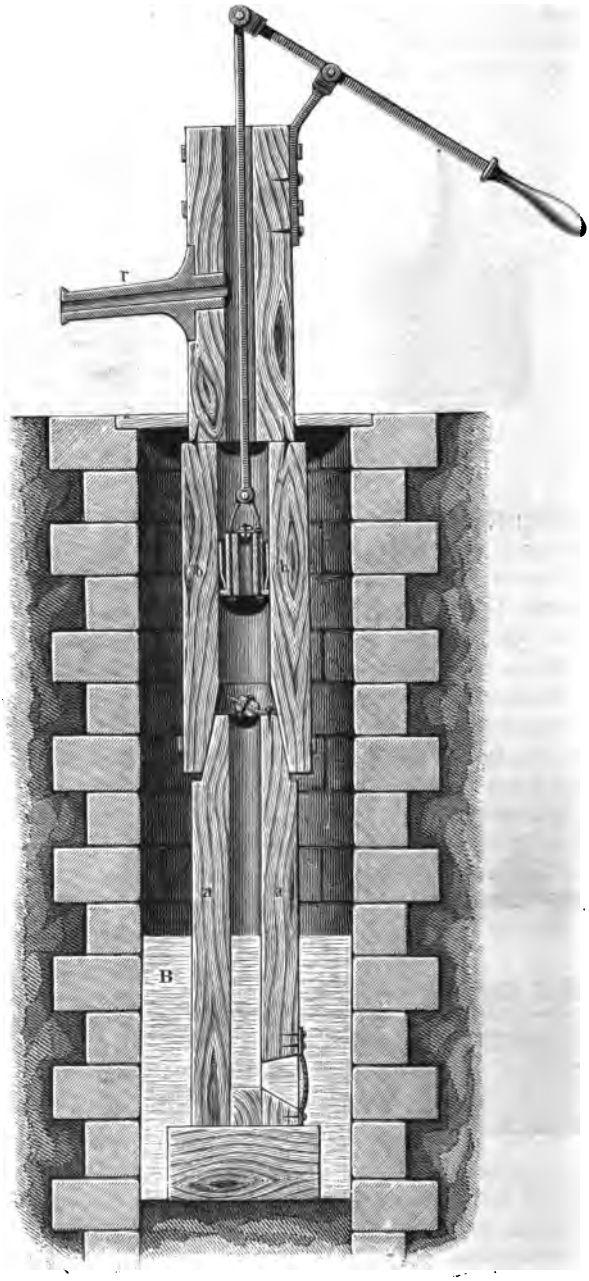
Die Größe der Kolbenreibung ist bei den hydraulischen Pressen sowie den Wassersäulenmaschinen schon angegeben worden, indem man den hydrostatischen Druck als Reibung erzeugenden Druck annahm. Es war, wie dort nachzusehen,

$$R = \mu . \pi b d h \gamma,$$

worin b die Breite der Liderung, d den Durchmesser des Pumpenstiefels, h die hydrostatische Druckhöhe, μ den Reibungscoefficienten und γ das Gewicht von 1 Kubikmeter Wasser bezeichnet.

40. Die Pumpen mit Ventilkolben bestehen in ihrer einfachsten Gestalt, wie in der Fig. 95 angegebenen, aus dem Saugrohr *aa* mit der durch ein Sieb verdeckten Eintrittsöffnung und dem Saugventil, aus dem Pumpenstiefel *bb*, in welchem sich der hohle mit einem Ventil versehene Kolben auf- und niederbewegt, und dem Ausgußrohre *r*. Bei

Fig. 95.



dem Steigen des Kolbens ist das Ventil in demselben geschlossen, da der Druck der Luft oder der einer bereits gehobenen Wassersäule darauf lastet. Zwischen Saugventil und Kolben wird ein luftverdünnter Raum geschaffen, in Folge dessen die äußere Luft auf die Oberfläche des im Wasserbassin *B* vorhandenen Wassers und auf die innere Seite des Saugventils einen Druck ausübt; das Saugventil öffnet sich daher, das in dem Saugrohre vorhandene Wasser steigt in die Höhe und tritt durch das Saugventil in den Stiefel. Beim Niedergange des Kolbens schließt sich das Saugventil, das Kolbenventil öffnet sich dagegen, wodurch das bis in den Stiefel gedrungene Wasser über den Kolben gelangt und beim nächsten Aufgange des Kolbens bis zum Ausflußrohre gebracht wird. Die Pumpe heißt specieller Hebepumpe, wenn sich wie in Figur 96 noch als Anschluß an den Stiefel ein durch ein Ventil *G* geschlossenes Steigerohr *L* befindet, wobei das Wasser allmälig auf eine größere Höhe gehoben oder, wie es in der Figur angedeutet, in ein oberhalb gelegenes Bassin gebracht wird, aus welchem man durch den Hahn *K* nach Bedürfniß Wasser ausfließen lassen kann.

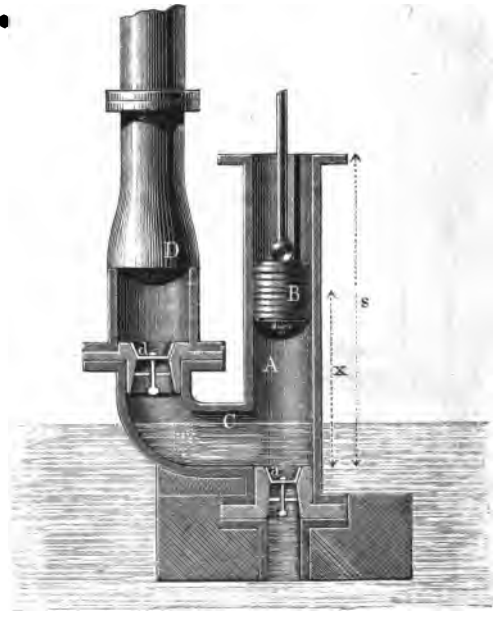
Fig. 96.

Die in Fig. 97 (a. f. S.) dargestellte Pumpe ist eine wirkliche Druckpumpe, da das Wasser auch im ruhenden Zustande der Pumpe in den Stiefel *A* bis zur Höhe des äußeren Wasserspiegels dringt. Ein Saugen des Wassers ist deshalb hier nicht nothwendig. Die Druckpumpe besteht hiernach aus dem Stiefel *A*, mit dem luftdicht anschließenden massiven Kolben *B*, dem Knie- oder Gurgelrohre *C*, welches den Stiefel mit dem Steigrohre *D* verbindet, und den beiden Ventilen *a* und *d* im Stiefel und im Steigrohr gelegen. Es ist sehr selten möglich, das Kolbenrohr unmittelbar in das Unterwasser zu stellen und auf die Weise das Saugen zu vermeiden, da zu leicht Unreinigkeiten aus dem Wasser in das Kolbenrohr und zwischen die Ventile gelangen. Aus dem Grunde versieht man für gewöhnlich die Druckpumpe mit einem längeren Saugrohr.

In Fig. 98 (a. S. 205) ist eine derartige Pumpe dargestellt. Dieselbe

wird durch Dampf in Bewegung gesetzt, und zwar liegt der Dampfcylinder *A* unmittelbar über dem Pumpencylinder *B*. Die beiden Kolbenstangen

Fig. 97.

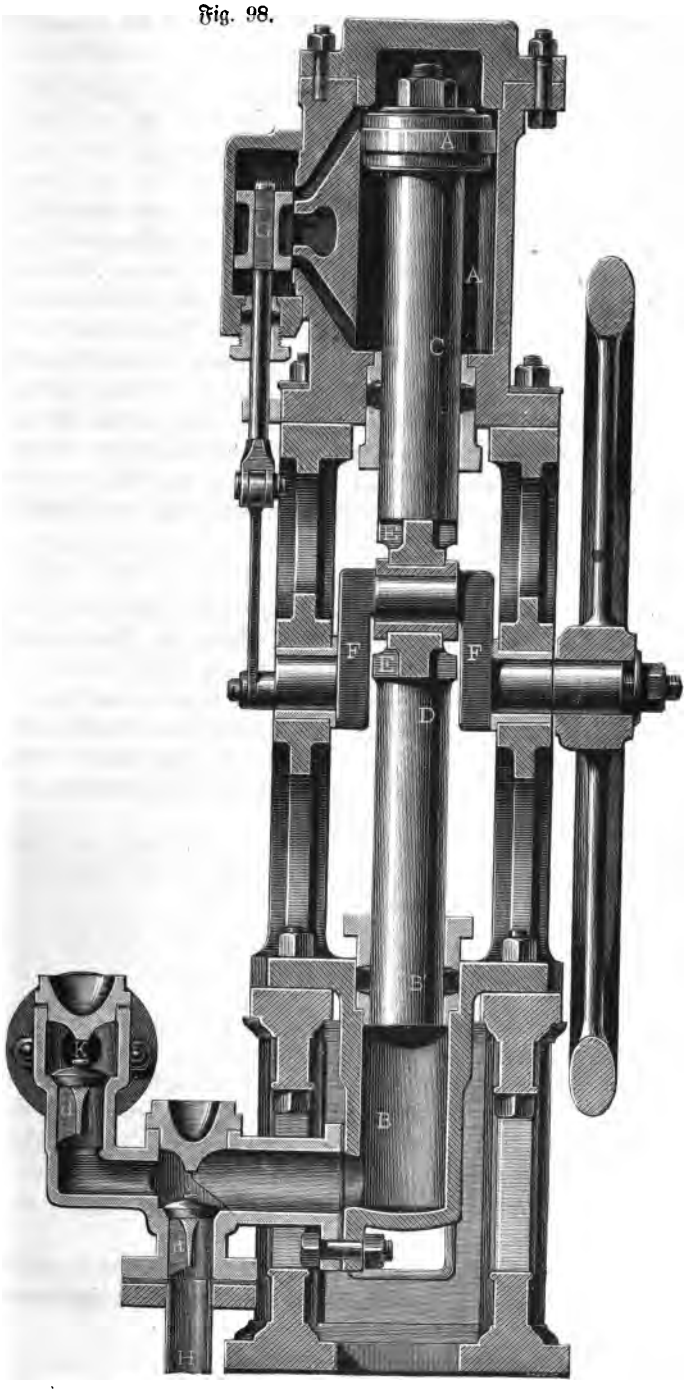


C und *D* sind mit einem beweglichen Rahmen *E* verbunden, der vermöge eines Krummzapfens *F* die nothwendige Bewegung an den Dampfschieber *G* überträgt. Zur Regulirung der Bewegung ist auf der Krummzapfenwelle ein Schwungrad angebracht. Der Kolben A_1 der kleinen Dampfmaschine ist so construirt, daß beim Saugen der Pumpe, wobei der Dampfkolben in die Höhe geht, der Dampf auf einen ringförmigen, also kleineren Querschnitt wirkt, als beim Herabgehen, wo der ganze Querschnitt den Dampfdruck auszuhalten hat. Der Pumpenkolben B_1 ist als Bramah- oder Plunger-Kolben construirt. *H* ist das Saug- und *K* das Steigrohr, *a* und *d* sind die beiden nothwendigen Ventile.

Die Abmessungen der Pumpe sind folgende:

Durchmesser des Pumpenkolbens . . .	0,059 Meter
„ „ Dampfkolbens	0,105 Meter
„ „ Saugerohrs	0,033 Meter
„ „ Steigrohrs	0,039 Meter
Querschnitt der ringförmigen Fläche des Dampfkolbens	0,005238 □ Meter
Länge des Kolbenhubes	0,144 Meter.

Fig. 98.



Die Zeichnung sowie die angegebenen Maße sind aus dem Skizzenbuche für Ingenieure von Wiebe, Heft I, entnommen.

41. Bei der Berechnung der Pumpen handelt es sich hauptsächlich um die richtige Lage des Saugventils. Wir wissen nach §. 7, daß der Druck der atmosphärischen Luft durch das Gewicht einer Wassersäule von 10,334 Meter gemessen wird. Wenn es daher möglich wäre, oberhalb des Saugventils einen vollkommen luftleeren Raum herzustellen, wenn weiter durch die Reibung des Wassers in dem Saugerohre nicht ein Theil des vorhandenen Druckes verloren ginge, und wenn endlich nicht ein Theil der vorhandenen Arbeitgröße durch die Trägheit des Wassers consumirt würde, so könnte die senkrechte Entfernung des Saugventils von der Oberfläche des unteren Wasserspiegels nahezu 10,334 Meter betragen. Zur annähernden Bestimmung dieser Höhe nehmen wir den Kolbenhub gleich s, die Höhe des sogenannten schädlichen Raumes, d. i. der Raum zwischen dem Saugventile und dem Kolben, beim niedrigsten Stande desselben gleich σ. Beim höchsten Stande des Kolbens hat sich die im schädlichen Raume vorhandene Luft von der Höhe σ auf die Höhe $s + \sigma$ ausgedehnt, der Druck derselben wird in diesem Zustande durch eine Wassersäule von der Höhe $10{,}334 \frac{\sigma}{s + \sigma}$ gemessen.

Nennen wir die größtmöglichste Höhe des gesaugten Wassers von dem Unterwasserspiegel H, so ist die Kraft, welche die Oeffnung des Saugeventils bewirkt, gleich dem Gewicht einer Wassersäule von der Höhe $10{,}334 - H$. Wird auf die weiteren Widerstände keine Rücksicht genommen, auch ferner vorausgesetzt, daß die Pumpe senkrecht über dem Wasserspiegel aufgestellt ist, die Saugröhre also nicht eine weitere Strecke horizontal geführt werden muß, so wird ein Oeffnen des Saugeventils, d. h. ein Eintreten des Wassers in dem Pumpenstiefel stattfinden, wenn

$$10{,}354 - H > 10{,}334 \frac{\sigma}{s + \sigma}.$$

Hieraus folgt

$$H > 10{,}334 \left(1 - \frac{\sigma}{s + \sigma}\right).$$

Die zulässige Saughöhe wächst hiernach mit der Zunahme des Kolbenhubes s und mit der Abnahme des schädlichen Raumes σ. Beträgt die Saughöhe mehr als fünf Meter oder ist die Länge der Saugeleitungen größer als 10 Meter, so ist, um ein Abreißen der Wassermasse in der letzteren zu verhindern, auf dem Saugerohr, nahe an der Pumpe, ein Saugwindkessel anzuordnen, dessen Größe gleich dem 5- bis 10fachen Pumpenstiefel-Inhalt, und bei sehr langen Leitungen gleich dem 10- bis 15fachen dieses Inhalts zu nehmen ist.

Es bezeichne V die in einer Secunde zu fördernde Wassermasse in Kubikmetern, d den Kolbendurchmesser, v die Kolbengeschwindigkeit, s die Länge eines

Kolbenhubes in Metern, u die Anzahl der Doppelhube in einer Minute, und α einen Erfahrungscoefficienten, so ist

a) für eine Pumpe, welche entweder beim Kolbenaufgange oder beim Kolbenniedergange Wasser fördert, das ist eine einfachwirkende Pumpe

$$\alpha V = {}^1/_2 \frac{\pi}{4} d^2 v = \frac{\pi}{4} d^2 \frac{u s}{60},$$

b) für eine Pumpe, welche beim Auf- und Niedergehen des Kolbens Wasser fördert, für eine doppeltwirkende Pumpe

$$\alpha V = \frac{\pi}{4} d^2 v = \frac{\pi}{4} d^2 \frac{u s}{30}.$$

Für gewöhnliche Ausführungen ist $\alpha = 1{,}25$. Was die Kolbengeschwindigkeit v anbetrifft, so ist dieselbe in den Grenzen von 0,2 bis 0,4 Meter zu nehmen und soll bei großen Pumpen höchstens bis auf 1 Meter steigen. Jedenfalls darf die Geschwindigkeit v des Kolbens nicht größer als die Geschwindigkeit des Wassers in dem Pumpenstiefel ausfallen, um ein Trennen des bewegten Wassers vom Kolben zu verhindern. Es ist aber unter d_1 der Durchmesser des Saugerohres, unter l dessen Länge und unter H die Saughöhe verstanden, die Geschwindigkeit v_1 des Wassers in den Saugröhren

$$v_1 = \sqrt{\frac{2g\,(10{,}334 - H)}{1 + \xi_1 + \xi_3 \frac{l}{d_1}}}$$

und

$$v = 2 \frac{\alpha V}{\frac{\pi}{4} d^2}.$$

Für den Uebertritt des Wassers aus dem Saugrohre in den Pumpenstiefel ist, unter v_2 die betreffende Wassergeschwindigkeit in dem letzteren verstanden,

$$\frac{\pi}{4} d^2 v_2 = \frac{\pi}{4} d_1^2 v_1,$$

daher

$$v_2 = \frac{d_1^2}{d^2} v_1.$$

Setzen wir der bequemen Schreibweise wegen $\frac{\pi}{4} d^2 = F$, $\frac{\pi}{4} d_1^2 = f$, so ist die Bedingung der continuirlichen Wasserbewegung

$$2 \frac{\alpha V}{F} < \frac{f}{F} \sqrt{\frac{2g\,(10{,}334 - H)}{1 + \xi_1 + \xi_3 \frac{l}{d_1}}}$$

d. h. der Querschnitt des Saugrohres muß der Bedingung genügen:

$$f > 2\alpha V \sqrt{\frac{1 + \zeta_1 + \zeta_3 \frac{l}{d_1}}{2g(10{,}334 - H)}}$$

Gewöhnlich beträgt die Wassergeschwindigkeit v_1 in den Saug- und Steigröhren 1 bis 1,2 Meter, bei deren Annahme sich der Durchmesser d_1 derselben direct berechnen läßt aus:

$$V = f v_1 = \frac{\pi}{4} d_1^2 v_1.$$

42. Behufs Berechnung der zur Bewegung einer Pumpe nothwendigen Arbeitsstärke müssen wir auf deren Construction Rücksicht nehmen, d. h. also Pumpen mit Ventilkolben und massiven Kolben unterscheiden.

a) Pumpen mit Ventilkolben.

Es sei für eine einfach wirkende Pumpe h die senkrechte Entfernung des Unterwasserspiegels vom Oberwasserspiegel resp. vom Ausgußrohr, x die senkrechte Entfernung der gerade stattfindenden Kolbenstellung vom Unterwasserspiegel, F der Inhalt der Kolbenfläche, s der Kolbenhub und p der Druck der Atmosphäre, so haben wir

den Druck gegen die obere Kolbenfläche $= Fp + F(h - x)\gamma$ und

den Druck gegen die untere Kolbenfläche $= Fp - Fx\gamma$.

Es ist demnach bei dem Aufziehen des Kolbens, in jeder beliebigen Stellung desselben, der durch die Arbeitskraft zu überwindende Druck gleich $Fh\gamma$. Es ist aber die Arbeitsgröße der Betriebskraft gleich der Summe der Arbeitsgrößen der auftretenden Kräfte und Widerstände, und diese sind für den Kolbenaufgang.

1. Die Arbeitsgröße der zu hebenden Wassermasse $= Fh\gamma . s$.

2. Die Arbeitsgröße der Kolbenreibung $= 4\mu \frac{b}{d} Fh\gamma . s$,

ähnlich wie bei den Wassersäulenmaschinen, wenn b die Kolbenhöhe und d den Kolbendurchmesser bezeichnet. Für $\mu = 0{,}25$ ist dieser Arbeitsverlust $= Fh\gamma s \frac{b}{d}$.

3. Die Arbeitsgröße der Wasserreibung in dem Pumpenstiefel und dem Saugrohre. Bezeichnet l die Länge des Pumpencylinders vermehrt um die Länge der Steigeröhre, v die Kolbengeschwindigkeit, v_1 die Wassergeschwindigkeit in der Saugröhre, deren Länge l_1, deren Durchmesser d_1 und deren Querschnitt f sein mag, so ist dieser Arbeitsverlust

$$\zeta_3 F\gamma s \frac{v^2}{2g} \frac{l}{d} + \zeta'_3 F\gamma s \frac{v_1^2}{2g} \frac{l_1}{d_1}$$
$$= \frac{v^2}{2g} F\gamma s \left\{ \zeta_3 \frac{l}{d} + \zeta'_3 \left(\frac{F}{f}\right)^2 \frac{l_1}{d_1} \right\}.$$

4. Das Wasser muß in beiden Röhren bei jedem Anzuge aus der Ruhe in die Bewegung mit der Geschwindigkeit v resp. v_1 versetzt werden. Die dazu

nothwendige Arbeit ist $= \frac{v^2}{2g} Fl\gamma + \frac{v_1^2}{2g} fl_1\gamma = \frac{v^2}{2g} F\gamma\left\{l + \left(\frac{F}{f}\right)^2 l_1\right\}$

$= \frac{v_2}{2g} F\gamma s\left\{\frac{l}{s} + \left(\frac{F}{f}\right)^2 \frac{l_1}{s}\right\}$.

5. Der Eintritt des Wassers in das Saugrohr und in den Stiefel durch das Saugventil erfordert einen Theil der disponiblen Arbeit. Bezeichnet man die Größe der Eintrittsöffnung in das Saugrohr mit f', so ist der erste Arbeitsverlust $= \frac{v_1^2}{2g} F\gamma s\left(\frac{f}{rf'} - 1\right)^2$ nach Nro. 31, und da annähernd $f' = f$ gesetzt werden darf, r also $= 0{,}596$ ist, so ergiebt sich für diesen Arbeitsverlust $0{,}46\ \frac{v^2}{2g} F\gamma s\left(\frac{F}{f}\right)^2$. Wird der Querschnitt des Saugventils gleich f gesetzt, so ist der zweite Verlust nach Nro. 39 gleich

$$\frac{v^2}{2g} F\gamma s\left(\frac{F}{rf} - 1\right)^2.$$

Bei Annahme eines Klappenventils mit einem Erhebungswinkel von 30^0 ist $r = 0{,}289$ zu setzen.

6. Das Heben des Kolbens mit Stange und Zubehör erfordert, wenn wir das Gewicht dieser Theile mit G bezeichnen, die Arbeit Gs.

Die Summe der unter 1 bis 6 angeführten Arbeiten ist die für den Kolbenaufgang nothwendige Arbeitgröße L_1:

$$L_1 = F\gamma s\left\{h\left(1 + \frac{b}{d}\right) + \alpha_1 \frac{v^2}{2g}\right\} + Gs,$$

unter α_1 die Summe der Werthe verstanden, welche sich bei $F\gamma s\ \frac{v^2}{2g}$ in den obigen Nummern als Factoren finden.

Die beim Niederdrücken des Kolbens nothwendige Arbeitgröße L_2 besteht hauptsächlich aus dem Arbeitsverlust, welcher bei dem Durchströmen des Wassers durch das Kolbenventil stattfindet, und außerdem wird die Arbeit Gs gewonnen durch das Niedersinken von Kolben und Zubehör. Bezeichnen wir die Ventilöffnung mit F_1, so ist dieser Arbeitsverlust

$$\frac{v^2}{2g}\left(\frac{F}{rF_1} - 1\right)^2 F\gamma s.$$

Von der Arbeit der Kolbenreibung kann abgesehen werden, da Wasser von unten nach oben zwischen Kolben und Stiefel durchfließt und dadurch die Liderung vom Cylindermantel abdrückt. Es ist daher

$$L_2 = F\gamma s\ \frac{v^2}{2g}\left(\frac{F}{rF_1} - 1\right)^2 - Gs$$

oder kürzer

$$= F\gamma s\ \frac{v^2}{2g}\ \alpha_2 - Gs.$$

Die Arbeitgröße während eines Kolbenspieles ist:

$$L = L_1 + L_2 = F\gamma s \left\{h\left(1 + \frac{b}{d}\right) + (\alpha_1 + \alpha_2)\frac{v_2}{2g}\right\}.$$

Bei u Kolbenspielen in der Minute ist daher die an die Pumpe zu übertragende Arbeitstärke

$$L^{=} = \frac{u}{60}(L_1 + L_2)$$

und der in Richtung der Kolbenstange wirksame mittlere Druck P ist durch die Gleichung bestimmt

$$P = \frac{L^{=}}{v}$$

Es ist jederzeit die Arbeit L_2 beim Niedergange des Kolbens kleiner als die Arbeit L_1 beim Aufgange, daher ist es vortheilhaft, ein Pumpenpaar an einem Balancier hängend durch die vorhandene Kraft in Bewegung zu setzen. Während die eine dieser Pumpen saugt, hat die andere das Wasser zu heben. Die Arbeit L für jeden Kolbenhub ist in diesem Falle

$$L = 2(L_1 + L_2),$$

die Arbeitstärke

$$L^{=} = \frac{u}{30}(L_1 + L_2).$$

b) Pumpen mit massivem Kolben.

Unter Benutzung der bei a) eingeführten Bezeichnungen ist die für den Aufgang des Kolbens nothwendige Arbeitgröße:

1. Die Arbeit der zu saugenden Wassermasse $= Fx\gamma s$, worin für x ein Mittelwerth einzuführen ist, den wir gleich der Länge der Saugröhre vermehrt um den halben Kolbenhub nehmen wollen, so daß diese Arbeit

$$= F\gamma s\left(l_1 + \frac{s}{2}\right) \text{ wird.}$$

2. Die Arbeitgröße der Kolbenreibung, bei derselben Voraussetzung, wie unter 1, ist $= F\gamma s \frac{b}{d}\left(l_1 + \frac{s}{2}\right)$.

3. Die Arbeitgröße der Wasserreibung in dem Saugrohr, da die entsprechende in dem Pumpenstiefel vernachlässigt werden kann,

$$= \zeta_3' \frac{v^2}{2g}\left(\frac{F}{f}\right)^2 \frac{l_1}{d_1} F\gamma s.$$

4. Die aus der Trägheit des Wassers im Saugrohre sich ergebende Arbeitgröße gleich $\frac{v^2}{2g}\left(\frac{F}{f}\right)^2 \frac{l_1}{s} F\gamma s$.

5. Der Verlust an Arbeitgröße, hervorgerufen durch den Eintritt des

Wassers in das Saugrohr gleich $0{,}46 \frac{v^2}{2g}\left(\frac{F}{f}\right)^2 F\gamma s$ vermehrt um die Widerstandsarbeit beim Eintritt in den Pumpenstiefel

$$= \frac{v^2}{2g}\left(\frac{F}{rf} - 1\right)^2 F\gamma s.$$

6. Die dem Heben des Kolbens mit Zubehör entsprechende Arbeit $= Gs$. Die Summe der hier aufgeführten Arbeiten liefert die für den Kolbenaufgang nothwendige Arbeitgröße L_1, die wir, ähnlich wie unter a., durch Einführung eines Coefficienten β_1, kurz wie folgt wiedergeben wollen:

$$L_1 = F\gamma s\left\{\frac{s}{2}\left(1 + \frac{b}{d}\right) + \beta_1 \frac{v^2}{2g}\right\} + Gs.$$

Für den Kolbenaufgang sei die Höhe der zu fördernden Wassermasse vom mittleren Kolbenstande bis zum Oberwasserspiegel gleich h, die Länge des Steigrohres sei l_2, dessen Querschnitt und Durchmesser aber gleich den entsprechenden Abmessungen des Saugrohres angenommen werden mag, dann ist die Arbeit zum Niederdrücken des Kolbens:

1) die Arbeit der in die Höhe zu drückenden Wassermasse

$$= Fh\gamma s,$$

2) die Arbeit der zu überwindenden Kolbenreibung

$$= Fh\gamma s\frac{b}{d},$$

3) die Arbeit der Wasserreibung im Steigrohr

$$= \xi''_3 \frac{v^2}{2g}\left(\frac{F}{f}\right)^2 \frac{l_2}{d_1} F\gamma s,$$

4) die Arbeit für die Trägheit des Wassers

$$= \frac{v^2}{2g}\left(\frac{F}{f}\right)^2 \frac{l_2}{s} F\gamma s,$$

5) die Arbeit für das Durchdrängen des Wassers durch das Ventil im Steigrohr

$$= \frac{v^2}{2g}\left(\frac{f}{rf_1} - 1\right)^2 F\gamma s,$$

wenn f_1 den Ventilquerschnitt bezeichnet,

6) die dem Niedergange des Kolbens zu Gute kommende Arbeit des niedersinkenden Kolbens

$$= -Gs.$$

Die Arbeitgröße für den Kolbenniedergang ist hiernach, bei Anwendung derselben kurzen Bezeichnung:

$$L_2 = F\gamma s\left\{h\left(1 + \frac{b}{d}\right) + \beta_2 \frac{v^2}{2g}\right\} - Gs.$$

Die Summe der beiden Arbeitgrößen L_1 und L_2 liefert die für jeden Kolbenhub nothwendige Arbeitgröße:

$$L = L_1 + L_2 = F\gamma s \left\{\left(1 + \frac{b}{d}\right)\left(h + \frac{s}{2}\right) + (\beta_1 + \beta_2)\frac{v^2}{2g}\right\},$$

und es ist deshalb die Arbeitstärke bei u Kolbenhüben in der Minute:

$$L^{=} = \frac{u}{60}(L_1 + L_2),$$

und der in Richtung der Kolbenstange wirksame mittlere Druck:

$$P = \frac{L^{=}}{v}.$$

Bei diesen Pumpen ist gewöhnlich $L_1 < L_2$, daher es wieder vortheilhaft ist, zwei derartige Pumpen an denselben Balancier zu hängen. Für ein derartiges Pumpenpaar ist die Arbeit für jeden Kolbenhub gleich $2(L_1 + L_2)$ und die Arbeitstärke

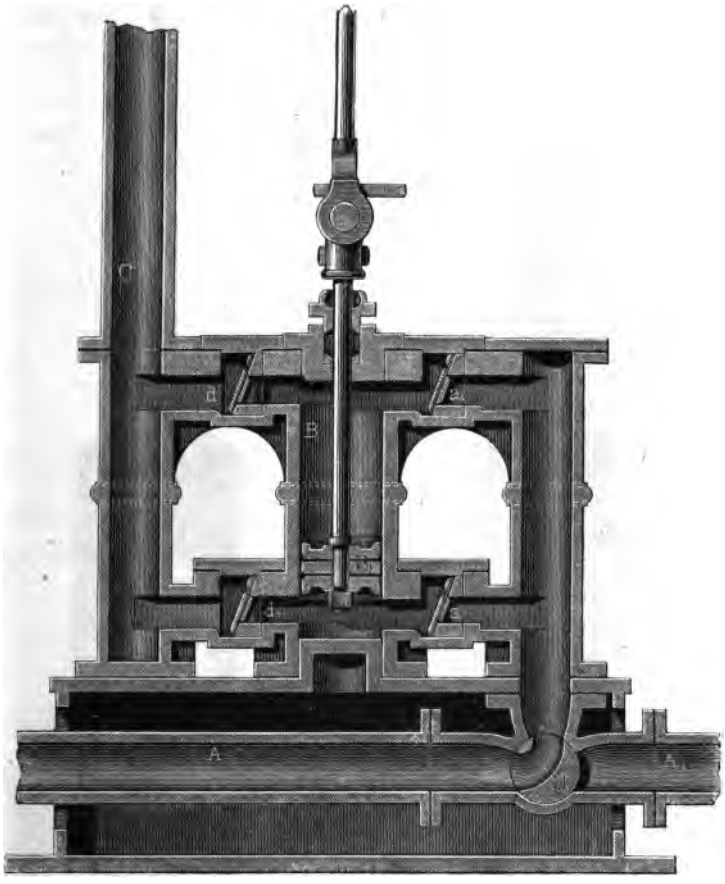
$$L^{=} = \frac{u}{30}(L_1 + L_2).$$

43. Bei den bis jetzt angeführten Pumpen läßt sich keine stetige Wasserförderung erzielen, da die Pumpe während des Saugens kein Wasser liefert. Läßt man dagegen zwei Pumpen durch einen Balancier treiben, ordnet man also ein Pumpenpaar an, die das Wasser in eine und dieselbe Steigröhre schaffen, so ist die Wasserhebung stetig, da die beiden Kolben wechselseitig saugen und drücken. Anstatt eines Pumpenpaares construirt man auch die Pumpen doppeltwirkend, die sowohl beim Auf- als auch beim Niedergange Wasser in die gemeinschaftliche Steigröhre fördern. Die für ein Pumpenpaar entwickelten Formeln finden auf eine doppeltwirkende Pumpe unmittelbar ihre Anwendung. In der Fig. 99 ist die Construction einer doppeltwirkenden Pumpe angegeben, wie dieselbe von Borsig in Berlin ausgeführt wird. Die Zeichnung ist aus dem Skizzenbuche für Ingenieure von Wiebe, Heft 3, entlehnt. Für diese Pumpe sind zwei Saugröhren A und A' vorhanden, von denen jede durch den Hahn H mit der Pumpe in Verbindung gebracht werden kann, so daß sich die Pumpe dadurch z. B. theilweise zur Förderung von kaltem oder warmem Wasser benutzen läßt. B ist der Stiefel, B' der Kolben und C die gemeinschaftliche Steigröhre. Bei dem Aufgange des Kolbens öffnen sich die beiden Ventile a und d, das durch a aus dem Saugrohre einströmende Wasser sammelt sich unterhalb des Kolbens und das über dem Kolben bereits vorhandene Wasser wird durch d in die Steigröhre gedrückt. Bei dem Niedergange des Kolbens schließen sich a und d, die Ventile a_1 und d_1 öffnen sich dagegen, wobei a_1 wieder mit dem Saugrohre, d_1 mit dem Steigrohre in Verbindung kommt. Die Abmessungen dieser Pumpe sind folgende:

Durchmesser des Pumpenkolbens . . .	0,137	Meter,
„ „ Saug- und Steigrohrs .	0,0785	„
Hubhöhe	0,209	„

Kann man kein doppeltes Druckwerk oder keine doppeltwirkende Pumpe anlegen, so bringt man mit dem Steigrohre einen Windkeſſel zur

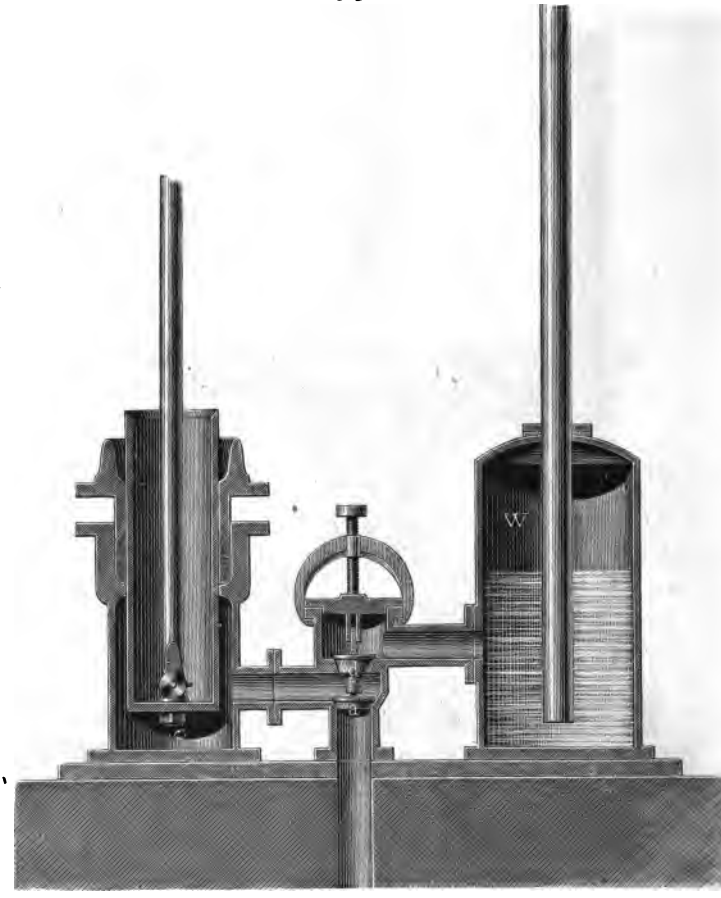
Fig. 99.



Ausgleichung des Waſſers in Verbindung. Die Fig. 100 (a. f. S.) zeigt dieſe Anordnung. *W* iſt der Windkeſſel, die beiden Ventile *a* und *d* liegen übereinander, ſo daß der hohle untere Theil des Druckventils *d* den Steg für das Saugventil *a* abgiebt, während der Deckel der Röhre in einem verlängerten hohlen Anſatze den Steg für das obere Ventil bildet. Das Uebrige der ganzen Pumpe iſt aus der Figur deutlich. Die Wirkung eines ſolchen Windkeſſels beſteht in Folgendem: Die in dem Raume *W* vorhandene Luft wird durch das Einpreſſen des Waſſers zuſammengedrückt und wird deshalb während des Saugens der Pumpe vermöge ihrer Elaſticität einen ſolchen Druck auf das im Windkeſſel vorhandene Waſſer ausüben, daß dadurch ein continuirliches Ausſtrö-

men des Waſſers aus dem Steigrohre ſtattfindet. Mit der Anordnung eines Windkeſſels iſt auch noch der Vortheil verbunden, daß die zum Betriebe der

Fig. 100.



Pumpe nothwendige Arbeitgröße geringer wird. Da in dieſem Falle die zu fördernde Waſſermaſſe immer einigermaßen in Bewegung bleibt, ſo handelt es ſich bei Ueberwindung der Trägheit der fortzuſchaffenden Waſſermaſſe nur um eine Umänderung der Geſchwindigkeit, nicht aber, wie bei den Anordnungen ohne Windkeſſel, die Waſſermaſſe aus der Ruhe in Bewegung zu verſetzen. Um eine möglichſt vollſtändige Wirkung von dem Windkeſſel zu erlangen, muß derſelbe ſo groß, als es die Umſtände geſtatten, conſtruirt werden. Für gewöhnliche Ausführungen iſt die Größe des Windkeſſels gleich dem vier- bis ſechsfachen Inhalte des Pumpenſtiefels zu nehmen. Ferner iſt es nothwendig, an dem Windkeſſel eine durch einen Hahn verſchließbare, in die atmoſphä-

rische Luft mündende Röhre anzubringen, um nach Erfordern die Luft in dem Windkessel zu erneuern, da durch das fortgeführte Wasser immer ein Theil der Luft mit fortgerissen wird.

Soll durch den Windkessel ein möglichst gleichmäßiger Wasserausfluß hervorgerufen, soll das Bewegungsgesetz für das in den Druckröhren befindliche Wasser mehr oder weniger unabhängig von dem Bewegungsgesetze des Kolbens gemacht werden, so muß der Windkessel bedeutend größere Abmessungen erhalten. Das Luftvolumen in dem Windkessel sei bei der kleinsten Wassergeschwindigkeit v'_1 in dem Druckrohre gleich W_1 und die Spannung der Luft gleich p_1, bei der entsprechenden größten Wassergeschwindigkeit v''_1 sei die Größe desselben Luftvolumens von der Spannung p_2 gleich W_2, dann haben wir, mit Berücksichtigung, daß die Spannungen den Quadraten der erlangten Wassergeschwindigkeit proportional sind:

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{v_1''^2}{v_1'^2}, \text{ und hieraus folgt:}$$

$$\frac{W_1 - W_2}{W_1} = \frac{v_1''^2 - v_1'^2}{v_1''^2}.$$

Wird die mittlere Geschwindigkeit im Druckrohre mit v_1 bezeichnet, die Differenz der größten und kleinsten Geschwindigkeit gleich $\frac{1}{a}$ der normalen genommen, so ist

$$v_1'' = v_1 + \frac{1}{2a} v_1,\ v_1' = v_1 - \frac{1}{2a} v_1,$$

$$v_1''^2 - v_1'^2 = (v'' - v_1')(v_1'' + v_1') = \frac{1}{a} v_1 . 2 v_1,$$

und deshalb

$$\frac{W_1 - W_2}{W_1} = \frac{\frac{2}{a} v_1^2}{v_1^2 \left(1 + \frac{1}{2a}\right)^2} = \frac{2}{a\left(1 + \frac{1}{2a}\right)^2}.$$

Die Größe a der Ungleichförmigkeit zu 20 bis 50 angenommen, liefert für den letzteren Ausdruck die Grenzen $\frac{2}{21}$ bis $\frac{2}{51}$, und es ist das in dem Windkessel eingeschlossene größte Luftvolumen:

$$W_1 = \frac{21}{2}(W_1 - W_2) \text{ bis } \frac{51}{2}(W_1 - W_2).$$

Hiernach bedeutet $W_1 - W_2$ zugleich das von der Pumpe in den Windkessel geschaffte Wasserquantum, und wenn wir die bei jedem Kolbenhube geforderte Wassermasse gleich Fs mit Q bezeichnen, so ist $W_1 - W_2 = \mu Q$ zu setzen, unter μ einen Coefficienten verstanden, der von der Art der Betriebskraft für die Pumpe abhängig ist. Der Pumpenkolben bewegt sich nämlich am

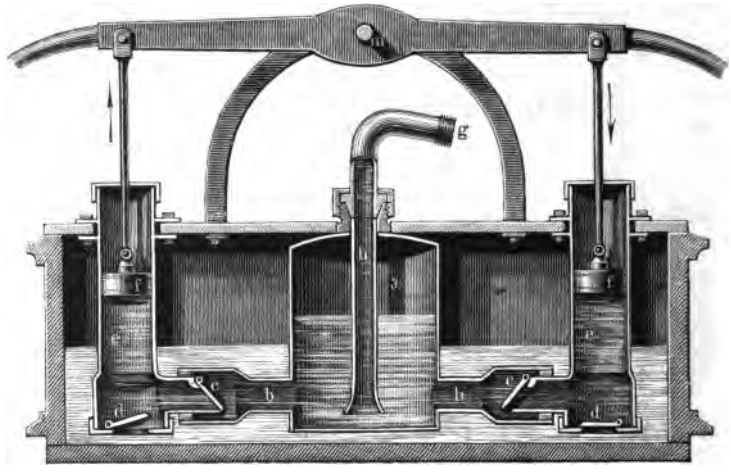
Anfange des Niederganges beſchleunigt und am Ende deſſelben verzögert, der Abfluß des Waſſers erfolgt dagegen gleichförmig, ſo daß ſich in der erſten Hälfte des Kolbenhubes ein Anſammeln des Waſſers im Windkeſſel, in der zweiten Hälfte dagegen ein Abfließen des Waſſers im größeren Maße zeigen wird. Ferner ſchafft die Pumpe während des Kolbenaufganges gar kein Waſſer, und es muß alſo während dieſer Zeit der Ausfluß des Waſſers allein durch den Luftdruck im Windkeſſel bewirkt werden. Es iſt dieſer Betrachtung gemäß, wenn wir zum Auf- und Niedergange des Kolbens dieſelbe Zeit annehmen, $\mu = \frac{1}{2}$, iſt dagegen die Zeit des Kolbenaufganges nur halb ſo groß als die des Niederganges, ſo iſt $\mu = \frac{1}{3}$. Bei Benutzung dieſer Werthe erhalten wir die Größe des Windkeſſels

für $\mu = 1/2$: $W_1 = 5\,1/4\ Q$ bis $12\,3/4\ Q$,

für $\mu = 1/3$: $W_1 = 3\,1/2\ Q$ bis $8\,1/2\ Q$.

Eine beſondere und höchſt wichtige Anwendung von dem vereinigten Saug- und Druckwerk macht man bei den Feuerſpritzen (Fig. 101). Dieſe

Fig. 101.



beſtehen aus der Verbindung eines doppelten Druckwerkes mit einem Windkeſſel und gemeinſchaftlichem Steigrohre. Die beiden Kolben *f* gehen abwechſelnd auf und nieder, und dabei wird durch die Ventile *d* das Waſſer aus dem die Pumpen umgebenden Spritzenkaſten geſaugt, und bei der entgegengeſetzten Bewegung des Kolbens durch das entſprechende Druckventil *c* in den Windkeſſel *a* gepreßt, von dem aus das Waſſer in das Steigrohr *h* gelangt. Die Bewegung der Kolben wird bei der hier gegebenen Anordnung durch Menſchen

hervorgebracht, indem diese den Hebel m vermittelst Querbäumen, die sich an den Enden des Hebels befinden, niederdrücken.

Sind s Arbeiter zur Bewegung der Spritze vorhanden, übt jeder derselben einen Druck von q Kilogramm aus, und sind die Entfernungen des Querbaumes und der Kolben von dem Drehpunkte des Hebels a_1 und a_2, so ist

$$s\,q \cdot a_1 = P \,.\, a_2,$$

unter P den mittleren Druck auf den Kolben verstanden, den wir oben für ein Pumpenpaar entwickelt. Es war

$$P = \frac{L}{v} = \frac{u}{30\,v}\,(L_1 + L_2),$$

daher die zur Bewegung der Spritze nothwendige Anzahl Arbeiter:

$$s = \frac{u}{30}\,\frac{a_2}{a_1}\,\frac{L_1 + L_2}{q\,v}.$$

44. Für eine Pumpe mit durchbrochenem Kolben sei $d = 0{,}314$ Meter, $s = 0{,}942$ Meter, $d_1 = 0{,}235$ Meter, $l = 3{,}766$ Meter, $l_1 = 7{,}533$ Meter, $b = 0{,}052$ Meter, die Kolben-Ventilöffnung $F_1 = 0{,}026$ □ Meter und der Kolbenaufgang erfordere 6, der Kolbenniedergang 4 Secunden. Wie groß ist die an die Pumpe zu übertragende Arbeitstärke?

Es ist $F = 0{,}077437$ □ Meter, $f = 0{,}043374$ □ Meter, $h = 3{,}766 + 7{,}533 = 11{,}3$ Meter, $F\gamma s = 72{,}95$, Kolbengeschwindigkeit v beim Aufgange $= 0{,}157$ Meter, beim Niedergange $v' = 0{,}236$ Meter, daher

$$\frac{v^2}{2\,g} = 0{,}001256 \text{ und } \frac{v'^2}{2\,g} = 0{,}002839.$$

Mit Rücksicht auf Aufgabe 42 a. erhält man hiernach die verschiedenen Arbeitgrößen für jeden Kolbenaufgang:

1) $72{,}95 \,.\, 11{,}3$;

2) $72{,}95 \,.\, 11{,}3 \,.\, 0{,}17$;

3) $72{,}95\,\frac{v^2}{2\,g} \cdot 3{,}521$ für $\zeta_3 = 0{,}038$ und $\zeta'_3 = 0{,}030$;

4) $72{,}95 \cdot \frac{v^2}{2\,g} \cdot 29{,}487$;

5) $72{,}95 \cdot \frac{v^2}{2\,g} \cdot 28{,}273$,

daher

$$L_1 = 72{,}95\left\{11{,}3 \,.\, 1{,}17 + 61{,}281\,\frac{v^2}{2\,g}\right\} + Gs.$$

Die Arbeit für den Kolbenniedergang ist, wenn wir den Contractionscoefficienten r für das Kolbenventil $= {}^2/_3$ setzen:

$$L_2 = 72{,}95\,\frac{v'^2}{2\,g}\,12{,}024 - Gs.$$

Die Arbeit für jeden Kolbenhub ergiebt sich deshalb für diese Pumpe

$$L = 72{,}95 \left\{ 11{,}3 \,.\, 1{,}17 + \frac{v^2}{2g} \cdot 61{,}281 + \frac{v'^2}{2g} \cdot 12{,}024 \right\}$$
$$= 72{,}95 \,.\, 13{,}332$$

und die Arbeitstärke

$$L^{=} = \frac{6}{60} \cdot 72{,}95 \,.\, 13{,}332 = 97{,}25 \overline{\overline{\text{km}}} = 1{,}3 \text{ Pferdestärken.}$$

Nimmt man das wirklich geförderte Wasserquantum für jedes Kolbenspiel $= 0{,}85\, F\gamma s$, so ist die von der Pumpe in einer Secunde geförderte Wassermasse $V = 0{,}0062$ Kubikmeter, und die geleistete Arbeitstärke

$$L_1^{=} = \frac{6}{60} \cdot 0{,}85 \,.\, 72{,}95 \,.\, 11{,}3 = 70{,}06 \overline{\overline{\text{km}}}$$

daher der Nutzeffect der Pumpe

$$\eta = \frac{70{,}06}{97{,}25} = 0{,}72.$$

45. Für eine Pumpe mit massivem Kolben sei

$$s = 0{,}750 \text{ Meter};$$
$$V = 0{,}005 \text{ Kubikmeter};$$
$$v = 0{,}2 \text{ Meter},$$

dann ergiebt sich aus:

$$\alpha V = {}^1/_2 F v = {}^1/_2 \frac{\pi}{4} d^2 v = \frac{\pi}{4} d^2 \frac{u \,.\, s}{60} \text{ mit } \alpha = 1{,}25.$$

$$F = 0{,}0625 \,\square \text{Meter};$$
$$d = 0{,}282 \text{ Meter};$$
$$u = 8;$$
$$F\gamma s = 46{,}88 \text{ Kilogramm}.$$

Es sei ferner die Geschwindigkeit v_1 in der Saug- und Druckhöhe gleich 0,95 Meter, dann ist $f = 0{,}0132 \,\square$ Meter; $d_1 = 0{,}130$ Meter; die Länge l_1 der Saugröhre $= 7{,}5$ Meter, die Länge l_2 der Steigröhre $= 11{,}3$ Meter und $b = 0{,}052$ Meter.

Die für den Kolbenaufgang nothwendige Arbeit bestimmt sich nach Aufgabe 42 b. wie folgt:

1) $46{,}88 \,.\, 7{,}875$;
2) $46{,}88 \,.\, 7{,}875 \,.\, 0{,}185$;
3) $46{,}88 \dfrac{v^2}{2g} \cdot 31{,}04$ für $\zeta'_3 = 0{,}024$;
4) $46{,}88 \cdot \dfrac{v^2}{2g} \cdot 224{,}19$;
5) $46{,}88 \dfrac{v^2}{2g} \cdot 246{,}960$;

$$L_1 = 46{,}88 \left\{7{,}875 \,.\, 1{,}185 + \frac{v^2}{2g} \,.\, 502{,}19\right\} + G\,s.$$

In ähnlicher Weise ist die für den Niedergang nothwendige Arbeitgröße wie folgt zusammengesetzt für $h = 11{,}675$:

1) $46{,}88 \,.\, 11{,}675$;

2) $46{,}88 \,.\, 11{,}675 \,.\, 0{,}185$;

3) $46{,}88 \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot 46{,}769$ für $\zeta_3'' = 0{,}024$;

4) $46{,}88 \frac{v^2}{2g} \cdot 337{,}77$;

5) $46{,}88 \frac{v^2}{2g}\, 0{,}25$ für $f_1 = f$ und $r = 0{,}6$.

$$L_1 = 46{,}88 \left\{11{,}675 \,.\, 1{,}185 + \frac{v^2}{2g} \cdot 384{,}796\right\},$$

$$L = 46{,}88 \left\{1{,}185 \,.\, 19{,}55 + \frac{v^2}{2g} \cdot 887\right\} = 46{,}88 \,.\, 25 \overline{\overline{\text{km}}}$$

$$L^{=} = \frac{8}{60} \cdot 46{,}88 \,.\, 25 = 156{,}3 \overline{\overline{\text{km}}} = 2{,}1 \text{ Pferdestärken.}$$

Die wirklich geleistete Arbeitstärke ist:

$$L_1{}^{=} = 0{,}005 \,.\, 18{,}8 \,.\, 1000 = 94 \overline{\overline{\text{km}}}$$

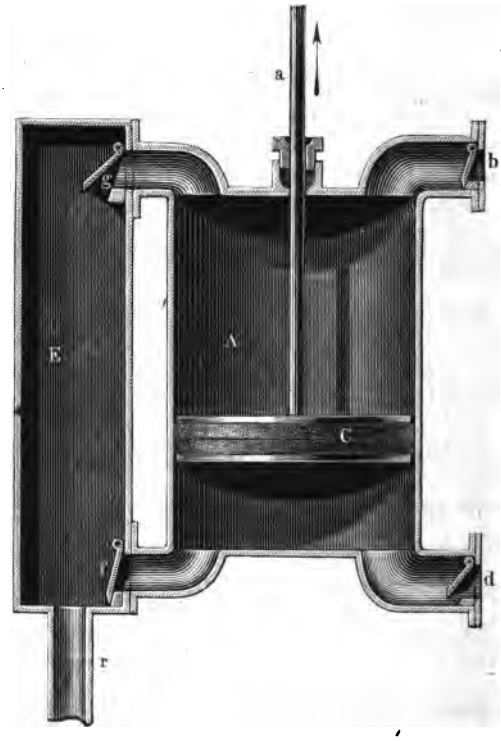
daher der Nutzeffect

$$\eta = \frac{94}{156{,}3} = 0{,}60.$$

46. Diejenigen Maschinen, durch welche Gase (gewöhnlich atmosphärische Luft) in einem geschlossenen Raume gesammelt und mit mechanischer Kraft, gewöhnlich durch Druck, in einen Ofen geschafft werden, heißen Gebläse. Die in den Ofen strömende Luft heißt der Wind. Die Schmelzräume des Ofens sind bei Anwendung eines Gebläses mit einer oder mehreren Oeffnungen, den Formen versehen, durch welche die verdichtete Luft von den Gebläsen mittelst der Düse eingeführt wird. Je nachdem die aufgefangene Luft in den Gebläsen auf derselben Temperatur erhalten oder auf eine höhere Temperatur gebracht wird, unterscheidet man Gebläse mit kalter und erhitzter Luft. In großen Hüttenwerken sowie bei den meisten Eisenhüttenprocessen finden sich sogenannte Cylindergebläse in Anwendung. Diese bestehen (Fig. 102 a. f. S.) aus einem eisernen hohlen, genau ausgebohrten und ausgeschliffenen Cylinder A, der an beiden Grundflächen geschlossen ist, und in welchem der massive Kolben C vermittelst der Kolbenstange a auf- und niederbewegt wird. Das in der Figur dargestellte Gebläse ist ein Doppelbläser, da sowohl beim Auf- als auch beim Niedergange des Kolbens Wind in den Raum E getrieben wird, von wo aus der Wind durch das Rohr r in den Feuerraum gelangt.

Die beiden Ventile *b* und *d* dienen zum Einlaſſen der Luft, ſie öffnen ſich nach Innen, die nach Außen ſich öffnenden Ventile *f* und *g* bringen den Cylin-

Fig. 102.



der abwechſelnd mit dem Raume *E* in Verbindung. Beim Aufgange des Kolbens öffnen ſich die beiden Ventile *d* und *g*, beim Niedergange ſind dagegen die Ventile *b* und *f* offen.

Um ein möglichſt gleichförmiges Ausſtrömen des Windes zu bewirken, werden zwei oder mehrere Cylinder in der Art mit einander verbunden, daß die Kolben bei ihrer Bewegung nicht gleichzeitig, ſondern in angemeſſenen Zwiſchenräumen wechſeln und der Wind aus allen gemeinſchaftlich in die Windleitung *r* oder beſſer in einen Regulator getrieben wird. Dies iſt ein aus Eiſenblech luftdicht zuſammengenieteter Ballon, deſſen Inhalt 40- bis 60mal ſo groß iſt, als der Inhalt der Cylinder, ſo daß die Unregelmäßigkeit in der Kolbenbewegung auf dieſes große Luftquantum keinen Einfluß mehr haben kann.

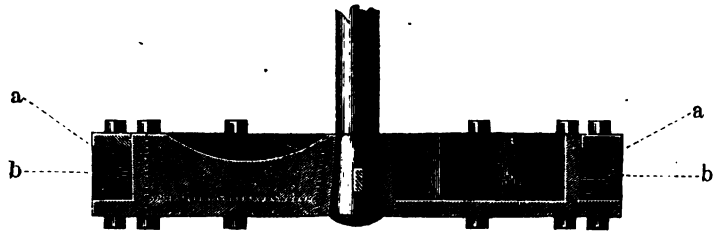
Zur Liderung der Kolben bei Cylindergebläſen wendet man zweckmäßig Leder an, das um beide Grundflächen des Kolbens umgeſtülpt und mittelſt Schraubenbolzen an einem vorſpringenden Rande des Kolbens befeſtigt wird.

Der Zwiſchenraum *bb* zwiſchen beiden Lederſtulpen *aa* (Fig. 103) wird

mit einem elastischen Wulst von Baumwolle ausgefüllt, welcher die beiden Lederränder gegen die Cylinderwand drückt.

Die Ventile in den Cylindergebläsen construirt man als Klappenventile, und giebt den Saugventilen einen Querschnitt von 0,1 bis $^1/_9$ des Cylinder-

Fig. 103.

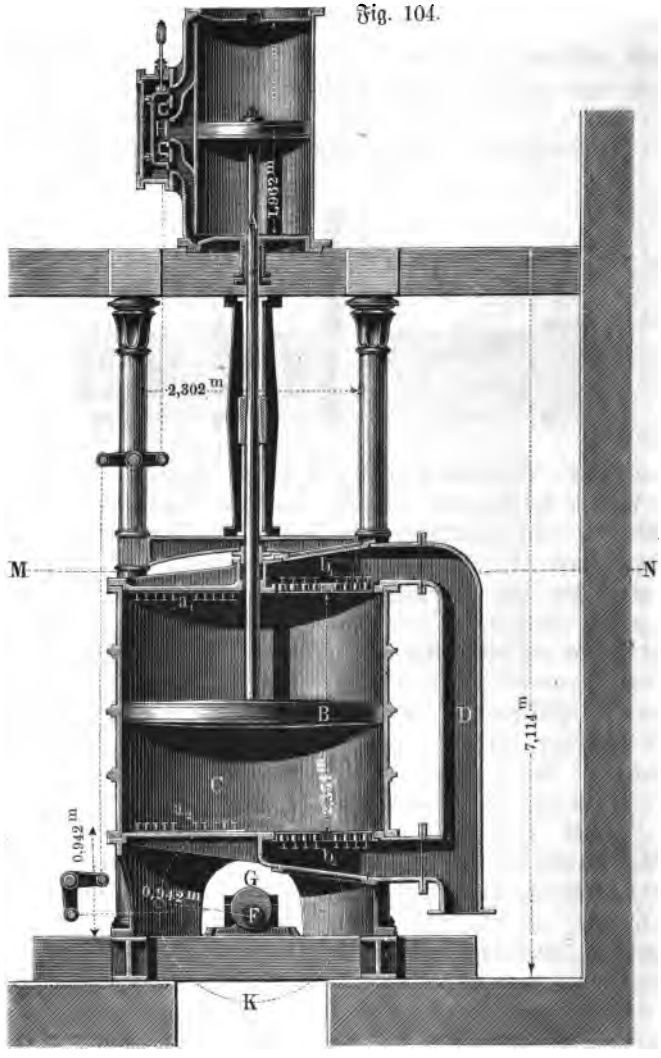


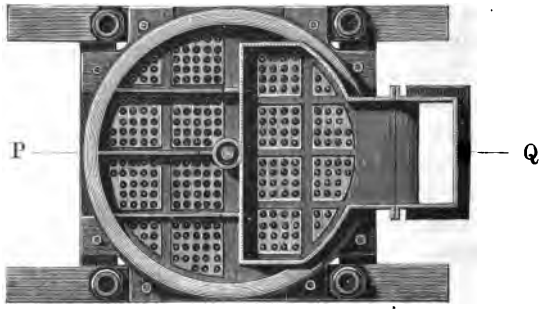
querschnitts. Die Länge der Klappen soll sich zur Breite wie 3 : 2 verhalten und die Auflage der Klappen soll rings um die Oeffnung 13 bis 20 Millimeter betragen. Der Querschnitt der Druckventile ist wenigstens $^1/_{22}$ vom Cylinderquerschnitt.

Das in Fig. 104 dargestellte Cylindergebläse ist auf verschiedenen Hohofenanlagen in Schlesien und Westphalen in Anwendung, und unterscheidet sich besonders dadurch von der in Fig 102 angegebenen Construction, daß eine große Anzahl von Saugventilen a_1 und a_2, und Druckventilen, b_1 und b_2, im Deckel und Boden des Cylinders C angeordnet sind. Diese Ventile bestehen aus kreisförmigen Leder- oder Guttaperchascheiben, welche Oeffnungen von 3 Zoll Durchmesser bedecken. Für das Einströmen der gesaugten Luft finden sich 152 solcher Oeffnungen, für das Ausströmen der Luft in die Windleitung D sind nur 106 Oeffnungen vorhanden. Der Betrieb des Gebläses geschieht durch die unmittelbar darüber befindliche Dampfmaschine, deren Kolbenstange A verlängert die Kolbenstange des Gebläsekolbens B bildet. Die Kolbenstange trägt einen Querarm, der zu beiden Seiten zwischen Gleitstangen geführt wird und vermittelst Lenkerstangen an zwei Schwungräder greift, die auf der unterhalb gelegenen Welle F sitzen. Der punktirte Kreis K stellt den Weg der Warze eines Schwungrades vor, an welche die Lenkerstange vom Querarme E angreift. Auf derselben befindet sich auch das Excentrik G, durch welches der Schieber H der Dampfmaschine seine Bewegung erhält. Das Cylindergebläse gebraucht zu seinem Betriebe eine Arbeitstärke von 100 Pferdestärken und hat die folgenden Abmessungen:

Durchmesser des Dampfcylinders	1,020	Meter,
„ „ Gebläsecylinders	2,511	„
Hubhöhe der beiden Kolben	1,883	„
Volumen, welches der Dampfkolben bei einem einfachen Hube durchläuft	1,5458	Kbkmeter,
Volumen, welches der Gebläsekolben bei einem einfachen Hube durchläuft	9,275	„

Fig. 104.





Gesammtquerschnitt der 152 Saugöffnungen	0,735	□ Meter
„ „ 106 Drucköffnungen	0,512	„
Durchmesser der Windleitung	0,314	Meter.

Die auf voriger Seite gegebene Zeichnung findet sich in dem Skizzenbuche für Ingenieure von Wiebe, Heft 5.

47. Gehen wir nun zur Berechnung der Windmenge und der von einem Gebläse verbrauchten Arbeitgröße über, so ist zuerst zu berücksichtigen, daß die Wirkung des in einen Ofen geleiteten Windstroms von der in jeder Secunde dem Brennstoffe zugeführten Luftmenge abhängt, und daß außerdem die Geschwindigkeit der zuströmenden Luft von Wichtigkeit ist, welche wieder von der unmittelbar an der Düsenmündung beobachteten Manometerhöhe abhängt. Es müssen demnach für jeden besonderen Fall die Luftmenge und die Manometerhöhe als Erfahrungsresultate bekannt sein. Die Windmenge V in Kubikmetern läßt sich aber aus der Anzahl der Düsen, aus dem Durchmesser derselben und der Manometerhöhe berechnen. Hiernach nehmen wir die Zahl und den Querschnitt der Düsen sowie die Manometerhöhe als gegeben an. Bezeichnen wir den Querschnitt einer Düse mit f, die Geschwindigkeit des ausströmenden Windes mit v und den Contractionscoefficienten mit r, so ist das ausströmende Luftquantum, die Windmenge,

$$1. \quad V = r f . v.$$

Zur Bestimmung von v sind die beiden zusammengehörigen Formeln 49 a. zu benutzen

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{v}{\varphi}\right)^2 = \frac{c_1}{A}(T_1 - T)$$

und

$$\frac{T_1}{T} = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}.$$

Aus diesen beiden Formeln eliminiren wir T, so entsteht unter Benutzung von Formel 14 und Berücksichtigung von §. 14

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{v}{\varphi}\right)^2 = \frac{c_1 T_1}{A}\left[1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]$$

$$= \frac{c_1 T_1 R}{c_1 - c}\left[1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]$$

$$= \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} R T_1 \left[1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right],$$

worin

$$\varkappa = 1{,}41,$$

$$\frac{\varkappa - 1}{\varkappa} = 0{,}2908$$

und

$$\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} = 3{,}439$$

zu setzen ist.

Es iſt allgemein $(1-\delta)^m = 1 - m\,\delta + m_2\,\delta^2 + m_1\,\delta^3 + \cdots$ und wenn δ einen kleinen Bruch vorſtellt, ſo iſt dieſe Potenz annähernd durch $1 - m\,\delta + m_2\,\delta^2$ wiedergegeben. Indem wir dieſes Geſetz auf die für v entwickelte Formel in Anwendung bringen, da ſich $\frac{q}{p}$ ſehr wenig von 1 unterſcheidet, alſo gleich $1-\delta$ geſetzt werden kann, unter δ einen kleinen Bruch verſtanden, ſo erhalten wir:

$$1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = 1 - \left\{1 - \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\delta + \frac{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\cdot\left(\frac{\varkappa-1}{\varkappa}-1\right)}{2}\delta^2\right\}$$

$$= 1 - \left\{1 - \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\delta - \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{\delta^2}{2\varkappa}\right\} = \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\,\delta\left(1+\frac{\delta}{2\varkappa}\right),$$

daher

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{v^2}{\varphi} = R\,T_1\,\delta\,\left(1 + \frac{\delta}{2\varkappa}\right).\right.$$

worin alſo

$$\delta = \frac{p-q}{p} = \frac{h}{b+h}$$

geſetzt werden muß, unter h die Manometerhöhe an der Düſenmündung und b den Barometerſtand außerhalb derſelben verſtanden. Es iſt hiernach:

2. $$v = \varphi\,\sqrt{2g\,R\,T_1\,\delta\,(1 + 0{,}3546\,\delta)}$$

Die durch das Gebläſe in einer Secunde zu liefernde Windmenge G in Kilogrammen iſt nach Formel (51):

$$G = r f v\,\frac{q}{RT} = \mu f\,\frac{q}{RT}\,\sqrt{2gRT_1\delta\,(1 + 0{,}3546\,\delta)}.$$

Es iſt aber

$$T = T_1\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}$$

$$= T_1\left[1 - \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\,\delta\left(1+\frac{\delta}{2\varkappa}\right)\right] = T_1\,[1 - 0{,}2908\,\delta\,(1+0{,}3546\,\delta)],$$

daher

3. $$G = \mu f q\,\frac{\sqrt{\frac{2g}{RT_1}\,\delta\,(1 + 0{,}3546\,\delta)}}{1 - 0{,}2908\,\delta\,(1 + 0{,}3546\,\delta)}.$$

Wird die Manometerhöhe h_1 am Anfange der Windleitung unmittelbar am Cylinder abgeleſen, ſo iſt die Reibung in der Windleitung, ſo wie der Widerſtand beim Eintritt des Windes in dieſelbe zu berückſichtigen und es iſt dann nach §. 34:

2a. $$v = \varphi\,\sqrt{\frac{2gRT_1\delta_1\,(1+0{,}3546\,\delta_1)}{1 + \left(\zeta_1 + \zeta_3\,\frac{l}{d}\right)\left(\frac{rf}{f_1}\right)^2}}.$$

worin f_1 den Querschnitt der Windleitung und δ_1 den Quotienten $\frac{h_1}{b + h_1}$ bezeichnet.

Die von einem Gebläse zu verrichtende Arbeitstärke L_1 muß so groß sein, um das pro Secunde zu fördernde Luftquantum von der gewöhnlichen Pressung q oder dem Barometerstande b auf eine Spannung, welche dem Manometerstande h_1 entspricht, zu bringen. Es ist aber diese Arbeit nach Aufgabe (56) des ersten Capitels, unter Annahme constanter Temperatur:

$$L_1 = Vq \ln \frac{p}{q} = Vq \ln \frac{b + h_1}{b},$$

oder, wenn wir $\ln \frac{p}{q}$ annähernd durch $2 \frac{p - q}{p + q}$ ersetzen,

4. $$L_1 = Vq \cdot \frac{2 h_1}{2 b + h_1}.$$

Nehmen wir dagegen an, daß die Luftmasse weder eine Wärmezuführung noch eine Wärmeableitung erfahre, so ist die von der Kraftmaschine zu verrichtende Arbeit nach §. 30 c.

$$L_1 = \frac{c_1}{A} (T_1 - T)$$

und

$$\frac{T_1}{T} = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}.$$

Hieraus folgt durch Elimination von T_1, unter Berücksichtigung von Formel (14) und §. 14:

$$L_1 = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} R T \left\{\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} - 1\right\}.$$

Wir setzen dem Gesetze von Mariotte zufolge $R T = Vq$ und entwickeln die Potenz von $\frac{p}{q}$, dann ist:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} = \left(1 + \frac{p - q}{q}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} = \left(1 + \frac{h_1}{b}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \text{ oder annähernd}$$

$$= 1 + \frac{\varkappa - \varkappa}{\varkappa} \frac{h_1}{b} - \frac{\varkappa - 1}{2 \varkappa^2} \left(\frac{h_1}{b}\right)^2 + \frac{(\varkappa - 1)(\varkappa + 1)}{6 \varkappa^3} \left(\frac{h_1}{b}\right)^2,$$

daher

4a. $$L_1 = Vq \frac{h_1}{b} \left\{1 - \frac{1}{2 \varkappa} \frac{h_1}{b} + \frac{\varkappa + 1}{6 \varkappa^2} \left(\frac{h_1}{b}\right)^2\right\}.$$

Erfahrungsmäßig haben gut construirte Cylindergebläse einen Nutzeffect von 0,60, so daß sich für die von der Welle der Kraftmaschine an das Cylindergebläse übertragene Arbeitstärke L ergiebt:

$$0{,}60\ L = L_1,$$

d. h.

5. $$L = 1{,}7\ L_1.$$

Die der Luft durch das Zusammenpressen innewohnende lebendige Kraft, welche sich bei dem Ausströmen geltend machen kann, ist andererseits:

6. $$L_2 = \frac{1}{2}\,\frac{G}{g}\,v^2,$$

der Nutzeffect η der ganzen Anlage ist demnach:

7. $$\eta = \frac{L_2}{L}.$$

Zur Bestimmung des Cylinderquerschnittes F ist zu bemerken, daß das Volumen der ausgeblasenen Luft immer kleiner ist als das der eingesogenen und zwar kann man bei gut construirten Cylindergebläsen die ausgeblasene Luftmenge gleich $^3/_4$ von der eingesaugten setzen. Bei der Kolbengeschwindigkeit von c^m ist deshalb: $^3/_4 . Fc = V = \frac{1}{273}\ V_0\ T$, unter V_0 das auf 0 Grad reducirte unter dem Drucke der Atmosphäre stehende Luftvolum verstanden, und deshalb:

8. $$F = \frac{3}{4}\,\frac{V_0}{c}\,\frac{T}{273}.$$

Die mittlere Kolbengeschwindigkeit c nimmt man gewöhnlich gleich 1 bis $1{,}25^m$, bei guter Construction der Windabsperrungen kann c in den Grenzen von 1,25 bis $2{,}1^m$ gewählt werden. Der Hub des Kolbens ist für Windcylinder bis zu $1{,}5^m$ Durchmesser gleich dem 1 bis 1,2fachen des Cylinderdurchmessers. Ist aber der Durchmesser größer als $1{,}5^m$, so kann man mit dem Kolbenhub bis auf 0,8 des Cylinderdurchmessers herabgehen. Der Querschnitt f_1 der Windleitung ist für kalte Luft gleich $^1/_{20}$ von der Summe der Querschnitte sämmtlicher doppelt wirkenden Cylinder. Die für einen Hochofen in jeder Minute nothwendige Luftmenge bestimmt sich nach Peters durch die Formel:

$$\frac{Cp}{32000}\ \text{Kubikmeter},$$

worin C den in 24 Stunden nothwendigen Coaksverbrauch in Kilogrammen und p den Procentgehalt an Kohlenstoff in den Coaks bezeichnet. Wird z. B. in jeder Minute 1 Kilogramm Coaks verbraucht und nehmen wir den Procentgehalt an Kohlenstoff im Durchschnitt zu 85, so ist die für jede Minute zuzuführende Luftmenge $= \frac{1.\,60.\,24.\,85}{32000} = 3{,}87$ Kubikmeter.

Die Spannkraft der Luft in der Windleitung, in der Nähe der Düsen ist hauptsächlich von der Beschaffenheit des Brennmaterials abhängig. Erfahrungsgemäß soll der Ueberdruck dieser Spannung über den äußeren Luftdruck betragen:

Für Kohlen aus weichem Holz	20	bis	30	Millimeter	
„ „ „ harzigem „	30	„	40	„	
„ „ „ hartem „	40	„	60	„	
„ leichte Coaks	80	„	130	„	
„ dichte Coaks	130	„	190	„	

48. Welche Arbeitstärke ist an ein Cylindergebläse zu übertragen, das einen Hochofen in jeder Secunde durch drei Düsen mit 0,93 Kubikmeter Luft zu versorgen hat? Der Druck des ausblasenden Windes, dessen mittlere Temperatur zu 10° C. angenommen ist, sei 66^{mm} Quecksilbersäule, die Länge der Windleitung sei 94^{mm} und der Durchmesser derselben 0,21^{m}. Wie groß ist die Arbeitstärke des ausblasenden Windes, wenn derselbe bis auf 200° C. erwärmt wird?

Wie groß ist die Arbeitstärke des ausblasenden Windes, wenn die Düsenmündung um die Hälfte gegen die erste Annahme vermindert wird?

a. Es ist:

$$V = \mu f \sqrt{2 g R T_1 \delta (1 + 0{,}3546\,\delta)}$$

und da

$$V = \frac{0{,}93}{3} = 0{,}31;$$

$$T_1 = 283;$$

$$\delta = \frac{66}{826};$$

$$\mu = 0{,}95,$$

so erhält man:

$$f = 0{,}002824 \text{ □Meter};$$

$$v = \frac{V}{\mu f} = 115{,}56^{m}.$$

Zur Berechnung der Manometerhöhe h_1 am Anfange der Windleitung ist nun

$$115{,}56 = \sqrt{\frac{2 g R T_1 \delta_1 (1 + 0{,}3546\,\delta_1)}{1 + \left(\xi_1 + \xi_3 \frac{l}{d}\right)\left(\frac{r f}{f_1}\right)^2}}.$$

Für

$$\xi_1 = 0{,}83;$$

$$\xi_3 = 0{,}024;$$

$$d = \sqrt{\frac{0{,}002824.4}{\pi}} = 0{,}05996^{m};$$

$$f_1 = 0{,}03464 \text{ □}^{m};$$

$$l = 94^{m};$$

$$r = 0{,}95 \text{ ist:}$$

$$\delta_1 = 0{,}1 = \frac{h_1}{b + h_1} = \frac{h_1}{760 + h_1}.$$

daher

$$h_1 = 84{,}4^{mm}.$$

Weiter ist nun $\varkappa = 1{,}41$ gesetzt, für eine Düse:

$$L_1^{=} = 0{,}31.10334\,\frac{84{,}4}{760}\left\{1 - \frac{1}{2{,}82}\cdot\frac{84{,}4}{760} + \frac{2{,}41}{6\,.\,1{,}41^2}\left(\frac{84{,}4}{760}\right)^2\right\} = 342{,}6^{\underline{\underline{km}}}$$

$$L^{=} = 1{,}7\,.\,3\,.342{,}6 = 1747{,}26^{\underline{\underline{km}}} = 23{,}3 \text{ Pferdestärken als Betriebsstärke}$$

der zugehörigen Kraftmaschine.

Die der ausströmenden Luft innewohnende Arbeitstärke:

$$L_2^{=} = \frac{1}{2}\frac{G}{g}\cdot v^2 = \frac{1}{2}\,\frac{V}{g}\cdot\frac{q}{RT_1[1 - 0{,}2908\,\delta(1 + 0{,}3546\,\delta)]}\cdot v^2$$
$$= 809{,}01^{\underline{\underline{km}}}$$

und

$$\eta = 0{,}46.$$

b. $$v = \sqrt{2gRT_1\,\delta\,(1 + 0{,}3546\,\delta)} = 149{,}40^{m}$$

$$L_2^{=} = 809{,}01^{\underline{\underline{km}}}.$$

c. Bezeichnen wir den neuen Düsenquerschnitt mit f', die neue Geschwindigkeit mit v', so ist $V = fv = f'v'$, daher

$$v' = \frac{f}{f'}\,v = \frac{0{,}002824}{0{,}001412}\cdot v = 231{,}12^{m}$$

$$\delta = 0{,}3 = \frac{h}{b + h},$$

daher

$$h = 325^{mm}$$

$$L_2^{=} = 3497{,}6^{\underline{\underline{km}}}.$$

49. Unter dem Namen Saugstrahlpumpen fassen wir alle diejenigen Vorrichtungen zusammen, welche auf dem in §. 35 behandelten Probleme, durch Ausströmen von Flüssigkeiten einen luftverdünnten Raum und dadurch ein Ansaugen einer zweiten Flüssigkeit zu bewirken, beruhen.

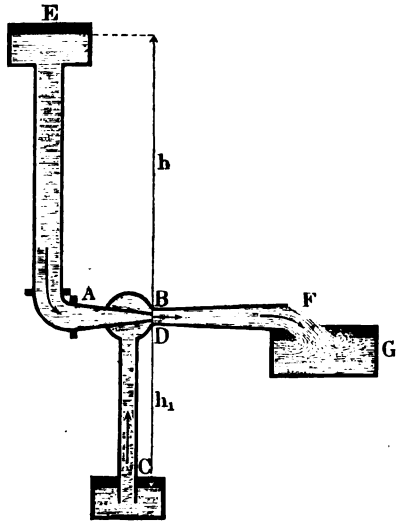
In Fig. 105 (a. f. S.) ist eine Skizze der von Thomson construirten Saugstrahlpumpe gegeben, aus der die Wirkungsweise des Apparates hervorgeht. Durch die Einfallröhre EA wird das in dem conischen Mundstück zum Ausfluß gelangende Wasser zugeführt, welches mit dem aus dem Reservoir C angesaugten Wasser vereinigt, durch die horizontale Röhre B abfließt. Benutzen wir die in §. 35 eingeführten Bezeichnungen, so ist $\gamma = \gamma_1 = 1000$ Kilogramm zu setzen, da die zu- und ausströmende Flüssigkeit, als Wasser, dasselbe specifische Gewicht behält. Es ist q gleich dem Druck der atmosphärischen Luft gleich $1000\,H$, unter H die betreffende Wasserhöhe in Metern verstanden, p gleich dem Druck der Wassersäule von der Höhe $EA = h$, vermehrt um den Druck der äußeren Luft.

Für die Ausflußgeschwindigkeit v aus der conischen Mündung haben wir

1. $$\frac{1}{2g}\left(\frac{v}{\varphi}\right)^2 = \frac{p - p_x}{1000} = x,$$

unter x die Höhe derjenigen Wassersäule verstanden, welche das Einströmen des Wassers in das Gehäuse D ermöglicht. Ist ferner die Höhe, auf welche die

Fig. 105.



Flüssigkeit aus dem Reservoir C gesaugt werden soll, gleich h_1, f_2 der Querschnitt der Saugröhre, v_2 die Geschwindigkeit des angesaugten Wassers beim Eintritt in das Gehäuse D, v_0 dagegen die Geschwindigkeit, mit der sich das Wasser von dem Gehäuse aus nach der Röhre B hin bewegt, dann ist, abgesehen von der Reibung des Wassers an den Rohrwandungen:

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{v_2}{\varphi}\right)^2 = \frac{q-(1000\,h_1+p_x)}{1000} = \frac{p-p_x-(p-q)-1000\,h_1}{1000},$$

d. h.

$$2.\qquad \frac{1}{2g}\left(\frac{v_2}{\varphi}\right)^2 = x-h-h_1.$$

Bezeichnen wir mit V die in einer Secunde durch das conische Mundstück zuströmende Wassermenge, mit V_1 das in derselben Zeit angesaugte Wasserquantum in Kubikmetern, so ist: $V = f\,v$, $V_1 = f_2\,v_2$, $V + V_1 = f_1\,v_1$. Ferner ist die der Wassermasse V beim Strömen durch die Röhre B innewohnende lebendige Kraft:

$$1000\,\frac{1}{2}\,\frac{V}{g}\,v_1^2 = 1000\,V\left(\frac{v^2}{2g}-\frac{(v-v_1)^2}{2g}-\frac{q-p_x}{1000}\right)$$
$$= 1000\,V\left(\frac{v\,v_1}{g}-\frac{v_1^2}{2g}-\frac{q-p_x}{1000}\right)$$

und die dem angesaugten Wasser innewohnende lebendige Kraft, beim Strömen durch die Röhre B:

$$1000 \cdot {}^1/_2 \frac{V_1}{g} v_1^2 = 1000\ V_1 \left(\frac{v_0^2}{2g} - \frac{(v_0 - v_1)^2}{2g} - \frac{q - p_x}{1000}\right)$$
$$= 1000\ V_1 \left(\frac{v_0 v_1}{g} - \frac{v_1^2}{2g} - \frac{q - p_x}{1000}\right).$$

Die in dem Gemisch beider Flüssigkeiten, beim gemeinschaftlichen Ausfluß in das Gefäß G enthaltene lebendige Kraft ist deshalb:

$$1000 \cdot {}^1/_2 \frac{V + V_1}{g} v_1^2$$
$$= 1000\ V\left(\frac{v v_1}{g} - \frac{v_1^2}{2g} - \frac{q - p_x}{1000}\right) + 1000\ V_1\left(\frac{v_0 v_1}{g} - \frac{v_1^2}{2g} - \frac{q - p_x}{1000}\right).$$

Die Geschwindigkeit v_0 des angesaugten Wassers setzen wir gleich Null, da das Wasser in dem weiten Gehäuse D seine Geschwindigkeit fast gänzlich verliert, dann erhalten wir:

$$\frac{q - p_x}{1000}(V + V_1) = 2\ V \frac{v v_1}{2g} - 2\ (V + V_1) \frac{v_1^2}{2g}$$
$$= \frac{p - p_x - (p - q)}{1000}(V + V_1)$$

oder

$$(x - h) = 2\left(\frac{V}{V + V_1} \frac{v v_1}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}\right).$$

Aus $V + V_1 = f v + f_2 v_2 = f_1 v_1$ folgt $v_1 = \frac{f}{f_1} v + \frac{f_2}{f_1} v_2$, wofür wir der Abkürzung wegen $m v + n v_2$ schreiben, und da ferner $\frac{V}{V+V_1} = m \frac{v}{v_1}$ ist, so geht die letzte Gleichung über in

3. $$2g \frac{x - h}{2} = m v^2 (1 - m) - n^2 v_2^2 - 2mn\, v v_2.$$

Durch Elimination der Geschwindigkeiten v und v_2 aus den drei aufgestellten Gleichungen erhalten wir:

$$\frac{x - h}{2} = m(1 - m)\varphi^2 x - n^2 \varphi^2 (x - h - h_1) - 2mn\varphi^2 \cdot \sqrt{x(x - h - h_1)}$$

4. $$4mn\varphi^2 \sqrt{x(x - h - h_1)}$$
$$= 2n^2\varphi^2(h + h_1) + h - x(2n^2\varphi^2 + 1 - 2m(1 - m)\varphi^2)$$

oder bei kürzerer Bezeichnung:

$$\sqrt{x(x - h - h_1)} = \beta - \alpha x.$$

Hieraus ergiebt sich:

5. $$x = \frac{\alpha\beta - {}^1/_2(h + h_1) \pm \sqrt{[\alpha\beta - {}^1/_2(h + h_1)]^2 - \beta^2(\alpha^2 - 1)}}{\alpha^2 - 1}.$$

Nachdem x gefunden, bestimmen sich aus 1 und 2 die Geschwindigkeiten

v und v_2 und es läßt sich dann das Verhältniß $\frac{V_1}{V}$ der angesaugten zur saugenden Wassermasse ermitteln, sowie auch der Nutzeffect η des Apparates:

6. $$\frac{V_1}{V} = \frac{f_2 v_2}{f v} = \frac{f_2 : f_1}{f : f_1}\frac{v_2}{v} = \frac{n}{m}\sqrt{\frac{x - h - h_1}{x}}.$$

7. $$\eta = \frac{V_1 h_1}{V h} = \frac{n}{m}\frac{h_1}{h}\sqrt{\frac{x - h - h_1}{x}}.$$

Bei einer derartigen Pumpe sei $m = 0{,}25$, $n = 0{,}15$, $h = 10^m$, $h_1 = 4^m$, dann ist für $\varphi = 1$: $\alpha = 4{,}467$, $\beta = 70{,}87$, $\alpha\beta - \frac{1}{2}(h + h_1) = 309{,}58$ $x = 15{,}0^m$ oder $= 17{,}6^m$. Um zu entscheiden, welcher der beiden Werthe zu benutzen, substituiren wir dieselbe in Gleichung (4), wobei sich ergiebt, daß die rechte Seite derselben für 17,6 negativ ausfällt, was unmöglich, da die Wurzel auf der linken Seite aus $v\,v_2$ hervorgegangen. Diese beiden Werthe sind aber positiv in Rechnung zu bringen, daher muß auch der Wurzelwerth jederzeit positiv sein und demnach ist nur $x = 15^m$ ein brauchbarer Werth. Nun erhält man

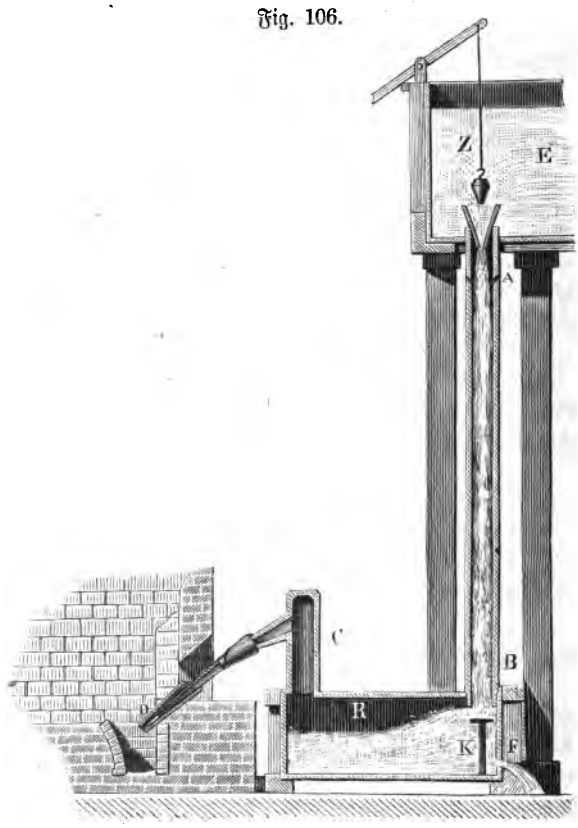
$$v = 0{,}96\sqrt{2g.15} = 16{,}47^m;$$
$$v_2 = 0{,}96\sqrt{2g.1} = 4{,}25^m;$$
$$\frac{V_1}{V} = 0{,}15\,.\,4\sqrt{\frac{1}{15}} = 0{,}155;$$
$$\eta = 0{,}15\,.\,4\,.\,0{,}4\sqrt{\frac{1}{15}} = 0{,}062.$$

50. Das Wassertrommelgebläse kommt manchmal in Gebirgsgegenden, wo hohe Wassergefälle zu Gebote stehen, zur Anwendung. Dasselbe besteht (Fig. 106 a. f. S.) aus einem Wasserbehälter, von welchem das Wasser durch eine wenigstens 9 Meter lange Röhre in einen Kasten R herunterstürzt, der oben geschlossen ist, an der Seite bei F aber eine Ausflußöffnung hat. In der Einfallröhre befinden sich an dem oberen Theile kleine Oeffnungen A, A, durch welche das herabstürzende Wasser atmosphärische Luft einsaugt, die mit Gewalt in den Windkasten R heruntergerissen wird und durch die Düse D zum Ausströmen gelangt, während das Wasser bei F ausfließt.

Es sei p der Druck des aus dem conischen Mundstück ausströmenden Wassers, p_x der im Inneren der Sauglöcher A herrschende Druck, q der Druck der Atmosphäre, f Querschnitt der conischen Mündung, f_2 Summe der Größe sämmtlicher Sauglöcher, v die Geschwindigkeit des zuströmenden Wassers, v_2 die Geschwindigkeit der gesaugten Luft, V das zugeführte Wasserquantum, V_1 das angesaugte Luftquantum, h die Entfernung des Oberwasserspiegels von der Saugstelle A, h_1 die Entfernung von A bis zum Eintritt des Wassers in den Kasten bei B, f_1 Querschnitt der Einfallröhre und v_1 die für Luft und Wasser gemeinschaftliche Geschwindigkeit in derselben. Für diese Annahmen ist, unter

γ das specifische Gewicht des Wassers, unter γ_1 das der Luft verstanden, ohne Berücksichtigung der hydraulischen Widerstände:

Fig. 106.



1. $$\frac{v^2}{2g} = \frac{p - p_x}{\gamma} = x,$$

wenn x die betreffende Wassersäulenhöhe bezeichnet:

2. $$\frac{v_2^2}{2g} = \frac{q - p_x}{\gamma_1} = \frac{p - p_x - (p - q)}{\gamma_1} = \frac{1000\,(x - h)}{\gamma_1} = \frac{x - h}{0{,}001\,\gamma_1}.$$

$$V = fv; \quad V_1 = f_2 v_2; \quad V + V_1 = f_1 v_1.$$

Das Gemisch von Wasser und Luft sinkt in der Einfallröhre von der Höhe h_1 herab und verrichtet dadurch Arbeit, jedoch wird ein Theil derselben durch die entstehenden Wasser- und Luftwirbel vernichtet, weshalb man bei der durch das Herabsinken des Wassers gewonnenen Arbeit nur einen Theil der Druckhöhe h_1 in Rechnung bringen darf. Bezeichnen wir diese Druckhöhe mit αh_1, so ist das Gewicht der in der Einfallröhre enthaltenen Flüssigkeit:

$$f_1 h_1 \frac{V\gamma + V_1\gamma_1}{V + V_1} = f_1 \alpha h_1 \gamma + f_1 (1-\alpha) h_1 \gamma_1$$

oder annähernd:

$$f_1 h_1 \frac{V\gamma}{V+V_1} = f_1 \gamma \alpha h_1,$$

daher

$$\alpha = \frac{V}{V+V_1}.$$

Mit Bezug hierauf haben wir:

die lebendige Kraft des zuströmenden Wassers in der Einfallröhre

$$^1/_2 \frac{V\gamma}{g} v_1^2 = \left(\frac{v^2}{2g} + \alpha h_1 - \frac{(v-v_1)^2}{2g} - \frac{q-p_x}{\gamma}\right) V\gamma,$$

die lebendige Kraft der angesaugten Luft in derselben Röhre

$$^1/_2 \frac{V_1\gamma_1}{g} v_1^2 = \left(\frac{v_2^2}{2g} - \frac{(v_2-v_1)^2}{2g} - \frac{q_x - p_x}{\gamma_1}\right) V_1\gamma_1,$$

unter q_x den Druck der angesammelten Luft in dem Kasten R verstanden. Die lebendige Kraft des zum Ausfluß gelangenden Gemisches von Luft und Wasser ist daher:

$$\frac{v_1^2}{2g}(V\gamma + V_1\gamma_1) = V\gamma\left(\frac{v v_1}{g} - \frac{v_1^2}{2g} - (x - h - \alpha h_1)\right) + V_1\gamma_1\left(\frac{v_2 v_1}{g} - \frac{v_1^2}{2g} - \frac{x + h_2 - h}{0{,}001\,\gamma_1}\right),$$

wenn h_2 die Tiefe des Wasserspiegels in dem Kasten unter der Mündung der Einfallröhre bezeichnet, oder:

$$3.\quad V(h + \alpha h_1 - x) + V_1(h - h_2 - x) = V\left(2\frac{v_1^2}{2g} - \frac{v v_1}{g}\right) + 0{,}001\, V_1\gamma_1\left(2\frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2 v_1}{g}\right).$$

Es sei für ein Wassertrommelgebläse die in der Secunde zufließende Wassermasse $V = 0{,}06$ Kubikmeter, $h = 0{,}8^m$ das Gefälle $h + h_1 = 8^m$ und es werde ein Windquantum V_1 von 0,12 Kubikmeter pro Secunde verlangt, dabei ist $f = 0{,}014$ □Meter, $f_1 = 0{,}034$ □Meter und $\gamma_1 = 1{,}29318$, dann erhalten wir:

$$v = \frac{0{,}06}{0{,}014} = 4{,}3^m;$$

$$x = 0{,}9425^m;$$

$$v_2 = \sqrt{2g \,.\, 0{,}1425 \,.\, \frac{1000}{1{,}2932}} = 46{,}5^m;$$

$$f_2 = \frac{0{,}12}{46{,}5} = 0{,}0026\,□^m;$$

$$v_1 = \frac{0{,}18}{0{,}034} = 5{,}3^{\mathrm{m}};\ h_1 = 7{,}2^{\mathrm{m}}.$$

Aus

$$h - h_2 - x = \frac{V}{V_1}\left(\frac{v_1\,(v_1 - v)}{g} - (h + \alpha h_1 - x)\right) + 0{,}001\,\gamma_1\,\frac{v_1\,(v_1 - v_2)}{g}$$

findet sich:

$$h_2 = 0{,}75^{\mathrm{m}};\quad \eta = \frac{V_1 h_2}{V\,(h + h_1)} = 0{,}19.$$

51. Die Erzeugung und Beförderung des Luftzuges durch einen Dampfstrom findet hauptsächlich bei den Locomotiven Anwendung. Nachdem der Dampf in den Cylindern gewirkt, wird er in den Schornstein geführt und strömt hier durch eine enge Oeffnung, das Blaserohr, aus, wodurch die Luft in dem Schornsteine fortgerissen und der für die Feuerung nothwendige Zug hervorgerufen wird. Zur Regulirung des Zuges, was vom Führerstande aus geschehen muß, kann man den Querschnitt des Schornsteins durch eine gewöhnliche Drosselklappe veränderlich machen, oder seitwärts in den Schornstein vermittelst eines Schiebers kalte Luft in denselben einströmen lassen, wodurch die durch den Rost geführte Luftmenge verringert wird, oder man kann endlich den äußersten Querschnitt des Blaserohrs durch Schieber oder Klappen veränderlich machen, so daß der Dampf mit größerer oder geringerer Geschwindigkeit austritt. In der nebenstehenden Fig. 107 sind $F\,F$ die Cylinder, d und d_1 die Dampfzuleitungsrohre, q das Blaserohr, welches das Ende von den beiden gebogenen Dampfabführungsröhren bildet und bei der Reinigung der Rauchröhren abgenommen werden kann. Bei den neueren Locomotiven liegen die Cylinder außerhalb der Maschine und es sind dann die Abführungsröhren so angeordnet, daß die Rauchröhren zur leichteren Reinigung frei bleiben. Die Schornsteinhöhe ist gewöhnlich 3,9 bis 4^{m}, wobei das eigentliche Schornsteinrohr eine Länge von 1,7 bis $2{,}2^{\mathrm{m}}$ erhält. Der Schornstein besteht aus Eisenblech von 4,4 bis 6^{mm} Stärke und hat gewöhnlich einen Durchmesser von 0,288 bis $0{,}366^{\mathrm{m}}$.

Fig. 107.

Die Geschwindigkeit des Luftzuges bei den Locomotiven hängt wesentlich von der Geschwindigkeit ab, mit welcher der Dampf aus dem Blaserohre strömt, welche ihrerseits wieder umgekehrt proportional dem Querschnitte des Blaserohrs ist. Die Spannung des ausblasenden Dampfes muß hierbei größer als die der atmosphärischen Luft sein, wodurch ein Gegendruck gegen die Kolbenfläche ausgeübt wird, der mit der Quer-

schnittsabnahme des Blaserohrs wächst und von der Betriebskraft überwunden werden muß.

Es sei f Querschnitt des Blaserohrs, v die Geschwindigkeit des ausströmenden Dampfes, γ dessen specifisches Gewicht, f_2 Summe der Querschnitte sämmtlicher Rauchröhren, v_2 die Geschwindigkeit der Rauchproducte beim Eintritt in die Rauchkammer, γ_2 das specifische Gewicht der Rauchproducte, f_1 Querschnitt des Schornsteins, v_1 die gemeinschaftliche Geschwindigkeit von Rauch und Dampf in der Schornsteinröhre, γ_1 das specifische Gewicht der Mischung von Dampf und Rauch, V das in der Secunde ausströmende Dampfquantum, V_1 die in derselben Zeit angesaugte Rauchmenge, p der mittlere Druck des abströmenden Dampfes, q der Druck der atmosphärischen Luft, p_x der Druck unmittelbar vor der Blaserohrmündung, p_1 der Druck, unter welchem die Rauchproducte in die Rauchkammer treten.

$$1)\ \frac{1}{2g}\left(\frac{v}{\varphi}\right)^2 = \frac{p - p_x}{\gamma}.$$

$$2)\ \frac{1}{2g}\left(\frac{v_2}{\varphi_2}\right)^2 = \frac{p_1 - p_x}{\gamma_2}.$$

Für das angenommene specifische Gewicht γ_1 in der Rauchkammer ist das Gewicht des ausströmenden Dampfes pro Secunde $= V\gamma_1$ und das der angesaugten Luft $= V_1\gamma_1$.

Aus der lebendigen Kraft der saugenden Flüssigkeitsmenge

$$\tfrac{1}{2}\frac{V\gamma_1}{g}v_1^2 = V\gamma_1\left\{\frac{p_x - q}{\gamma_1} + \frac{v^2}{2g} - \frac{(v - v_1)^2}{2g}\right\},$$

und der angesaugten Flüssigkeit

$$\tfrac{1}{2}\frac{V_1\gamma_1}{g}v_1^2 = V_1\gamma_1\left\{\frac{p_x - q}{\gamma_1} - \frac{v_1^2}{2g}\right\},$$

ergiebt sich die lebendige Kraft des Gemisches in dem Schornsteine

$$\frac{v_1^2}{2g}(V + V_1) = V\left(\frac{p_x - q}{\gamma_1} + \frac{2vv_1}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}\right) + V_1\left(\frac{p_x - q}{\gamma_1} - \frac{v_1^2}{2g}\right),$$

und hieraus findet man

$$\frac{q - p_x}{\gamma_1} = 2\left\{\frac{V}{V + V_1}\frac{vv_1}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}\right\}.$$

Es ist ferner

$$V = fv, \quad V_1 = f_2v_2$$

und

$$V + V_1 = f_1v_1 = fv + f_2v_2,$$

daher

$$v_1 = \frac{f}{f_1}v + \frac{f_2}{f_1}v_2 = mv + nv_2$$

und

$$\frac{V}{V + V_1} = \frac{f}{f_1}\frac{v}{v_1} = m\frac{v}{v_1},$$

worin die Verhältnisse der Querschnitte der Abkürzung wegen mit m und n bezeichnet worden sind. Bei Benutzung dieser Ausdrücke erhält man

$$3)\quad \frac{q - p_x}{\gamma_1} = 2\left\{ m \frac{v_2}{2g}(1 - m) - n^2 \frac{v_2^2}{2g} - 2mn \frac{v\, v_2}{2g} \right\}.$$

Setzen wir den Ueberdruck des Dampfes über den Druck in der Rauchkammer $p - p_x = x$, ersetzen ferner $q - p_x$ durch $p - p_x - (p - q) = x - \pi$, unter π den Ueberdruck des Dampfes über den Druck der äußeren Atmosphäre verstanden, und berücksichtigen, daß der Druck p_1, unter welchem die Rauchproducte in die Rauchkammer treten, sich nicht wesentlich von dem äußeren Atmosphärendruck q unterscheidet, so nehmen die Gleichungen 1) bis 3) folgende Form an:

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{v}{\varphi}\right)^2 = \frac{x}{\gamma};\quad \frac{1}{2g}\left(\frac{v_2}{\varphi_2}\right)^2 = \frac{x - \pi}{\gamma_2};$$

$$\frac{x - \pi}{\gamma_1} = 2\left\{ m \frac{v^2}{2g}(1 - m) - n^2 \frac{v_2^2}{2g} - 2mn \frac{v\, v_2}{2g} \right\}.$$

Durch Elimination von v und v_2 erhält man folgende Gleichung, aus welcher sich x berechnen läßt:

$$\frac{x - \pi}{\gamma_1} = 2\left\{ m(1-m)\varphi^2 \frac{x}{\gamma} - n^2 \varphi_2^2 \frac{x - \pi}{\gamma_2} - 2mn\varphi\varphi_2 \cdot \sqrt{\frac{x(x-\pi)}{\gamma\gamma_2}} \right\}$$

$$x\left\{ \frac{1}{\gamma_1} - \frac{2m(1-m)}{\gamma}\varphi^2 + \frac{2n^2}{\gamma_2}\varphi^2 + 4mn\varphi\varphi_2 \sqrt{\frac{x - \pi}{x\gamma\gamma_2}} \right\}$$

$$= \pi\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{2n^2}{\gamma_2}\varphi^2 \right).$$

Da der Werth $x - \pi$, welcher den Ueberdruck der äußeren Atmosphäre über den Druck in der Rauchkammer während des Luftsaugens vorstellt, jederzeit sehr klein gegen x ist, so kann man die Wurzel in dem obigen Ausdrucke vernachlässigen und hat dann

$$4)\quad \begin{cases} x = \dfrac{(\gamma_2 + 2n^2\varphi_2^2\gamma_1)\pi\gamma}{\gamma\gamma_2 - 2m(1-m)\varphi^2\gamma_1\gamma_2 + 2n^2\varphi_2^2\gamma\gamma_1} \\ \text{und} \\ x - \pi = \dfrac{2m(1-m)\varphi^2\gamma_1\gamma_2 \cdot \pi}{\gamma\gamma_2 - 2m(1-m)\varphi^2\gamma_1\gamma_2 + 2n^2\varphi_2^2\gamma\gamma_1}. \end{cases}$$

Nachdem x gefunden, ist v und v_2 bekannt, und kann nun zur Berechnung der angesaugten Luftmenge, sowie der verbrauchten Dampfmenge übergegangen werden. Das Gewicht der in einer Secunde in die Rauchkammer tretenden Luftmenge sei L, das Gewicht des in derselben Zeit verbrauchten Dampfes sei D, dann ist für die angenommene Dichtigkeit γ_1 im Innern der Rauchkammer

$$L = V_1 \gamma_1 = f_2 v_2 \gamma_1 = \frac{f_2}{f_1} \frac{f_1}{f} f v_2 \gamma_1 = n \frac{1}{m} f v_2 \gamma_1,$$

$$L = \frac{n}{m} f \gamma_1 . \varphi_2 \sqrt{2 g \frac{x - \pi}{\gamma_2}},$$

$$D = V \gamma_1 = f v \gamma_1 = f \gamma_1 . \varphi \sqrt{2 g \frac{x}{\gamma}},$$

daher

$$\frac{L}{D} = \frac{n}{m} \frac{\varphi_2}{\varphi} . \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_2} \frac{x - \pi}{x}},$$

und bei Benutzung der Gleichung 4)

$$\frac{L}{D} = \sqrt{\frac{1}{m} . \frac{2 n^2 (1 - m)}{\frac{\gamma_2}{\gamma_1} . \left(\frac{1}{\varphi_2}\right)^2 + 2 n^2}}.$$

Bezeichnen wir die absolute Temperatur der äußeren Luft mit T_0, die der Luft in der Rauchkammer mit T_2, und nehmen, wie schon oben geschehen, den Druck q der äußeren Atmosphäre gleich dem Drucke p_1 der Rauchproducte beim Eintritt in die Rauchkammer, so ist nach dem Gesetze von Gay-Lussac:

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{T_2}{T_0},$$

und deshalb, wenn wir diesen Werth in der letzten Gleichung substituiren, sowie der Abkürzung wegen $\frac{T_2}{T_0} \left(\frac{1}{\varphi_2}\right)^2 = \mu$ setzen,

$$5) \quad \frac{L}{D} = \sqrt{\frac{2 n^2 (1 - m)}{m (\mu + 2 n^2)}}.$$

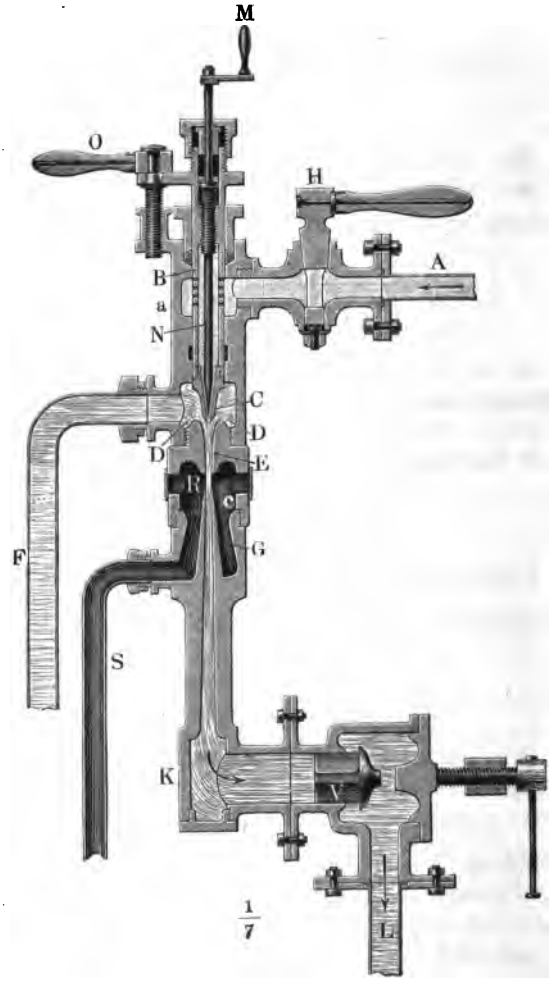
Hierin ist μ als Erfahrungscoefficient zu behandeln und in den Grenzen 3 bis 5 zu nehmen, da γ_2 nicht genau das specifische Gewicht γ_0 der äußeren Luft ist, sondern vielmehr einen Mittelwerth zwischen γ_0 und γ_1 vorstellt.

Die Gleichung 5) zeigt, daß die zur Unterhaltung des Brennprocesses anzusaugende Luftmenge L, bei sonst gleichen Umständen der verbrauchten Dampfmenge einfach proportional ist, daß also bei stärkerem Dampfverbrauch die Maschine von selbst den Mehrbedarf an Luft herbeizieht, und daß umgekehrt bei geringerem Dampfverbrauch die Maschine durch die Blasrohrvorrichtung auch die Anfachung des Feuers vermindert. Speciellere Untersuchungen über diesen bei den Locomotiven wichtigen Maschinentheil finden sich in der Schrift des Professor Zeuner „Das Locomotiv-Blasrohr".

52. Die Dampfstrahlpumpe oder der Injecteur von Giffard, in Fig. 108 (a. f. S.) im Durchschnitt dargestellt, kommt als selbstthätige Speisevorrichtung bei den Dampfkesseln zur Anwendung. Das Rohr A steht mit dem Dampfraume

in Verbindung; bei geöffnetem Hahne *H* ſtrömt der Dampf durch eine große Anzahl von kleinen Löchern in das Rohr *B C*, und gelangt durch das coniſche

Fig. 108.



Mundſtück *C* zum Ausfluß. In das Gehäuſe *DD* mündet ſeitwärts das Saugrohr *F*, das mit dem Waſſerreſervoir in Verbindung ſteht. Durch die in dem Gehäuſe *DD* beim Ausſtrömen des Dampfes hervorgerufene Luftverdünnung tritt Waſſer aus dem Saugrohre in das Gehäuſe *DD*, condenſirt den weiter ausſtrömenden Dampf und wird dann in das nach oben ſtehende und

conisch endigende Druckrohr G getrieben, von wo aus es durch die Rohre K und L in den Wasserraum des Dampfkessels gelangt. Die beiden Kurbeln M und O dienen zur Regulirung der Oeffnungen für den Dampfaustritt aus C und den Wassereintritt in E. Das verspritzte Wasser sammelt sich in der Kammer R und fließt durch die Röhre S ab. Die Kammer R ist mit Schaulöchern versehen, um den ausströmenden Wasserstrahl zu beobachten und darnach die nothwendigen Regulirungen mittelst der Kurbeln M und O vorzunehmen.

Es sei p der Druck, t die entsprechende Temperatur und γ das specifische Gewicht des gesättigten Dampfes im Dampfkessel, wobei angenommen wird, daß der Dampf 10 Proc. Wasser enthalte, wodurch die Beziehung zwischen p und dem specifischen Volumen v nach §. 31 gegeben ist durch die Gleichung: $p v^{1,125} = \text{constant}$. Ist nun γ_x das specifische Gewicht des Dampfes, p_x der Druck in der Ausflußmündung C, v die Ausflußgeschwindigkeit des Dampfes an dieser Stelle, so ist n. F. 53 a.:

$$1)\quad v = \varphi \sqrt{18g \cdot \frac{p}{\gamma}\left\{1 - \left(\frac{p_x}{p}\right)^{1/9}\right\}}$$

und

$$\gamma_x = \gamma \left(\frac{p_x}{p}\right)^{8/9}$$

sowie das Gewicht Q_1 der in der Secunde ausfließenden Dampfmenge, wenn f den Querschnittsinhalt der conischen Mündung C bezeichnet,

$$Q_1 = f v \gamma_x.$$

Ist ferner f_2 der Querschnitt der Saugrohrmündung F in dem Gehäuse D, γ_2 das specifische Gewicht des angesaugten Wassers, h_2 die Saughöhe, v_2 die Wassergeschwindigkeit beim Ausfluß in D, und steht das Wasserbassin mit der äußeren Luft in Berührung, für welche der Druck $q = 10334$ Kilogramm ist, so haben wir unter Q_2 das angesaugte Wassergewicht pro Secunde verstanden:

$$2)\quad v_2 = \varphi_2 \sqrt{2g \frac{q - p_x - \gamma_2 h_2}{\gamma_2}},$$

und

$$Q_2 = f_2 v_2 \gamma_2.$$

Der Querschnitt der conischen Mündung im Druckrohre G sei gleich der Mündung im Verbindungsstücke E gleich f_0, die dort stattfindende Geschwindigkeit des Gemisches von Wasser und nicht condensirtem Dampf sei gleich v_0, das specifische Gewicht des Gemisches sei γ_0, der hier herrschende Druck gleich q, da die Kammer R mit der äußeren Luft in Verbindung steht. In dem Druckrohre selbst, vom Querschnitte f_1, bewege sich das Wasser von dem specifischen Gewichte γ_1, mit der Geschwindigkeit v_1, dabei ist hier der Druck wieder gleich dem Anfangsdruck p, dann ist

$$3)\quad v_0 = \varphi_0 \sqrt{2g \frac{p - q}{\gamma_1}}$$

und

$$Q_1 + Q_2 = f_0 v_0 \gamma_0.$$

Aus der letzten Gleichung folgt

$$Q_2 \left(1 + \frac{Q_1}{Q_2}\right) = f_0 v_0 \gamma_0 = f_2 v_2 \gamma_2 \left(1 + \frac{Q_1}{Q_2}\right),$$

daher

$$4)\ v_2 = \frac{f_0}{f_2} \frac{\gamma_0}{\gamma_2} \frac{1}{1 + \frac{Q_1}{Q_2}} v_0.$$

Die Gleichheit der lebendigen Kräfte für den Querschnitt f_0 giebt noch folgende Beziehung

$$\frac{v_0^2}{2g}(Q_1 + Q_2) = Q_1\left(\frac{v^2}{2g} - \frac{(v - v_0)^2}{2g} - \frac{q - p_x}{\gamma_0}\right) + Q_2\left(\frac{v_2^2}{2g} - \frac{(v_2 - v_0)^2}{2g} - \frac{q - p_x}{\gamma_0}\right)$$

$$= Q_1\left(\frac{2 v v_0}{2g} - \frac{v_0^2}{2g} - \frac{q - p_x}{\gamma_0}\right) + Q_2\left(\frac{2 v_2 v_0}{2g} - \frac{v_0^2}{2g} - \frac{q - p_x}{\gamma_0}\right).$$

Hieraus folgt:

$$\frac{Q_1}{Q_2}\left(\frac{v_0^2 - v v_0}{g} + \frac{q - p_x}{\gamma_0}\right) = \frac{v_2 v_0 - v_0^2}{g} - \frac{q - p_x}{\gamma_0}.$$

$$5)\ \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{v_0 - v_2 + \frac{g(q - p_x)}{\gamma_0 v_0}}{v - v_0 - \frac{g(q - p_x)}{\gamma_0 v_0}},$$

oder annähernd

$$= \frac{v_0 - v_2}{v - v_0}.$$

Die Anwendung vorstehender Formeln zur Berechnung des Injecteurs wird aus dem folgenden speciellen Beispiel hervorgehen.

Der Kesseldampf habe eine Spannung von 4 Atmosphären, dann ist nach der Tabelle in §. 18: $p = 41336$ Kilogrm.; $t = 144^0$; $\gamma = 2{,}2303$ Kilogrm. Ferner liefert F. 24 in §. 18 die Gesammtwärme W des Dampfes $= 606{,}5 + 0{,}305\,t = 650{,}4$. Nehmen wir für das Speisewasser eine Temperatur $t_2 = 15^0$, so ist die Temperatur t_1 des Gemisches im Druckrohre

$$t_1 = \frac{Q_1 W + Q_2 t_2}{Q_1 + Q_2} = \frac{\frac{Q_1}{Q_2} W + t_2}{\frac{Q_1}{Q_2} + 1}.$$

Das Verhältniß $\frac{Q_1}{Q_2}$ liegt bei einer Dampfspannung von 2 bis 10 Atmo-

sphären in den Grenzen von 0,03 bis 0,05, wir wählen dafür vorläufig 0,04 und erhalten dann

$$t_1 = \frac{0{,}04 \,.\, 650{,}4 + 15}{0{,}04 + 1} = 39{,}4^0.$$

Das specifische Gewicht γ_2 des angesaugten Wassers ist $= 1000$ Kilogramm, das specifische Gewicht γ_1 der Mischung im Druckrohr kann ebenfalls constant gleich 981 Kilogramm angenommen werden, das specifische Gewicht γ_0 dagegen im Querschnitt f_0 ist von der Temperatur t_1 abhängig, und kann den vorliegenden Versuchen gemäß, nach Grashof, durch die Formel

$$\gamma_0 = 1100 - 5\,t_1$$

berechnet werden.

Für den vorliegenden Fall ist dann

$$\gamma_0 = 903 \text{ Kilogramm.}$$

Aus Formel (3) ergiebt sich nun mit

$$q = 10334 \text{ Kilogramm}$$

und

$$\varphi_0 = 0{,}95$$

$$v_0 = 0{,}95\sqrt{2g\frac{31002}{981}} = 23{,}655 \text{ Meter.}$$

Mit $\frac{f_0}{f_2} = 0{,}05$ findet sich aus F. (4):

$$v_2 = 0{,}05\,\frac{903}{1000}\,\frac{1}{1{,}04}\,23{,}655 = 1{,}027 \text{ Meter.}$$

Nehmen wir die Saughöhe $h_2 = 2$ Meter, so liefert Formel (2) für $\varphi_2 = 0{,}95$

$$p_x = q - h_2\gamma_2 - \left(\frac{v_2}{\varphi_2}\right)^2\frac{\gamma_2}{2g} = 10334 - 2000 - \left(\frac{1{,}027}{0{,}95}\right)^2\frac{1000}{2g}$$

$$= 8274{,}44 \text{ Kilogramm,}$$

und nun n. F. (1):

$$v = 0{,}95\sqrt{18g\,\frac{41336}{2{,}2303}\left\{1 - \left(\frac{8274{,}44}{41336}\right)^{1/6}\right\}} = 695{,}28 \text{ Meter.}$$

Die Formel (5), die man jetzt benutzen kann, dient zur Beurtheilung der erhaltenen Resultate. Es ist nach derselben

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{v_0 - v_2}{v - v_0} = \frac{23{,}655 - 1{,}027}{695{,}28 - 23{,}655} = \frac{22{,}628}{671{,}625} = 0{,}0337$$

oder

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{v_0 - v_2 + \dfrac{g(q - p_x')}{\gamma_0 v_0}}{v - v_0 - \dfrac{g(q - p_x)}{\gamma_0 v_0}} = 0{,}0352.$$

Mit diesem Werthe für $\frac{Q_1}{Q_2}$ wird die obige Rechnung wiederholt:

$$t_1 = \frac{0{,}0352 \,.\, 650{,}4 + 15}{1{,}0352} = 36{,}6^0;$$

$$\gamma_0 = 917 \text{ Kilogramm};$$

$$v_2 = 1{,}05 \text{ Meter};$$

$$p_x = 8272 \text{ Kilogramm};$$

$$v = 695{,}4 \text{ Meter}.$$

Die weitere Rechnung mit diesen Werthen liefert

$$\gamma_x = \gamma \left(\frac{p_x}{p}\right)^{\frac{9}{10}} = 0{,}5337 \text{ Kilogramm},$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{f v \gamma_x}{f_2 v_2 \gamma_2} = \frac{f}{f_0} \cdot \frac{f_0}{f_2} \cdot \frac{v}{v_2} \cdot \frac{\gamma_x}{\gamma_2},$$

daher

$$\frac{f}{f_0} = \frac{Q_1}{Q_2} \cdot \frac{v_2}{v} \cdot \frac{\gamma_2}{\gamma_x} \cdot \frac{f_2}{f_0} = 0{,}0352 \frac{1{,}05}{695{,}4} \cdot \frac{1000}{0{,}5337} \cdot 20 = 2.$$

Das in einer Stunde geförderte Wassergewicht ist aber

$$Q = 3600\, Q_2 = 3600 f_2 v_2 \gamma_2 = 3600 f_0 \frac{f_2}{f_0} \cdot v_2 \gamma_2$$

$$= 75\,600\,000 \,.\, f_0 \text{ Kilogramm oder Liter (Kubikdecimeter)}.$$

Es sei der Durchmesser d_0 dieser kleinsten Oeffnung f_0 gleich 7 Millimeter, dann ist

$$f_0 = 38{,}48 \,\square \text{ Millimeter},$$

daher

$$Q = 75\,600\,000 \,.\, 0{,}00003848 = 2909 \text{ Kilogramm},$$

$$Q_2 = \frac{2923}{3600} = 0{,}81 \text{ Kilogramm};$$

$$Q_1 = 0{,}0352 \,.\, 0{,}81 = 0{,}0285 \text{ Kilogramm};$$

$$f = 2 f_0 = 2 \,.\, 38{,}48 = 76{,}96 \,\square \text{ Millimeter},$$

daher

$$d = 9{,}9 \text{ Millimeter};$$

$$f_2 = 20 f_0 = 20 \,.\, 38{,}48 = 769{,}6 \,\square \text{ Millimeter},$$

daher

$$d_2 = 31{,}3 \text{ Millimeter}.$$

53. **Schornsteine.** Die Erzeugung des Zuges in den Feuerungen, d. h. die Zuführung von atmosphärischer Luft und die Abführung der Ver-

brennungsproducte geschieht gewöhnlich durch Schornsteine. Die in dem Schornsteine enthaltene Luft hat vermöge ihrer hohen Temperatur ein geringeres specifisches Gewicht als die äußere atmosphärische Luft, und übt auch einen geringeren Druck als diese aus, wodurch ein Aufsteigen der Luft im Schornsteine, und ein Einströmen äußerer Luft in den Feuerraum hervorgerufen wird. Unter dem Rost hat die Luft die Spannung p_0, unmittelbar über demselben die Spannung p_1, dann wird die Luft in Folge des Ueberdrucks $p_0 - p_1$ durch die Rostspalten und durch die unregelmäßigen Zwischenräume des auf dem Rost befindlichen Brennmaterials durchgetrieben und überwindet dabei die sich entgegenstellenden Widerstände. Am Fuße des Schornsteins herrscht eine Spannung p_2 kleiner als p_1, so daß der Ueberdruck $p_1 - p_2$ die Ursache der Luftströmung durch die Züge ist, wobei wieder verschiedene Widerstände zu überwinden sind. Die an der Mündung des Schornsteins vorhandene Pressung q ist kleiner als p_2, und zwar entsprechend dem in dem Schornsteine angesammelten Luftgewicht, so daß der Ueberdruck $p_2 - q$ die Erhebung der Luft in den Schornstein und die Ueberwindung der sich hier darbietenden Widerstände bewirkt. Durch den Rost tritt kalte atmosphärische Luft von der absoluten Temperatur T_0; unmittelbar über dem Rost hat die Luft, gemischt mit den Verbrennungsproducten, die größte absolute Temperatur, welche von hier aus durch die Züge, wo deren mittlerer Werth T_1 sein mag, bis zum Fuße des Schornsteins allmälig auf T_2 sinkt, indem die Wärme an den zu erwärmenden Körper (Kessel) abgegeben wird. Während des Aufsteigens in dem Schornstein wird ebenfalls Wärme an die Wandungen abgegeben, so daß auch auf diesem Wege noch eine Temperaturerniedrigung eintritt, die absolute Temperatur T_2 demnach den Mittelwerth T annimmt. Dem Gesetze von Mariotte und Gay-Lussac $\frac{p}{\gamma} = RT$ zufolge sind nun auch für die hier angedeuteten Stationen der ganzen Heizanlage die specifischen Gewichte γ_0, γ_1, γ_2, γ bekannt. Bezeichnen wir die betreffenden Geschwindigkeiten der Luft an diesen Stellen mit v_0, v_1, v_2, v und nehmen an, daß stündlich Q Kilogramm Brennmaterial auf dem Roste verbrannt werden, welches pro Kilogramm V Kilogramm Luft zur Verbrennung erfordert (Aufg. 33, Capitel 2), so ist die in einer Secunde durch die Rostspalten strömende Luftmenge vermehrt um die auf dem Roste entstandenen Verbrennungsproducte, d. h. die in einer Secunde vom Rost abfließende Gasmenge G in Kilogrammen

$$1)\quad G = \frac{(V+1)\,Q}{3600}.$$

Verstehen wir unter F_0 die Größe der Rostfläche, unter αF_0 die Summe sämmtlicher Rostspalten, so ist

$$\alpha F_0 v_0 \gamma_0 = G,$$

und

$$\gamma_0 = \frac{p_0}{RT_0}$$

gesetzt,

$$2)\quad \alpha F_0 p_0 v_0 = G R T_0,$$

die geleistete Arbeit der Luft beim Einströmen in die Rostöffnungen, in Folge des Ueberdruckes $p_0 - p_1$. Zur Berechnung der Widerstandsarbeit, welche die Luft beim Durchgange durch die Brennstoffmasse zu überwinden hat, sei δ die Dicke derselben. Dann ist die Gesammtoberfläche des Brennmaterials, an welcher der Luftstrom sich reibend vorbeibewegt, dem Inhalt $\delta . F_0$ des auf dem Roste vorhandenen Brennstoffes proportional. Denkt man nun die Luft durch eine Oeffnung δF_0 mit der Geschwindigkeit v_0 strömend, so ist die Masse der Luft dem Ausdruck $\delta F_0 v_0$ proportional, und da die lebendige Kraft den Factor v^2 enthält, so ist die Arbeit, welche zur Ueberwindung dieses Widerstandes verbraucht wird, dem Werthe $\delta F v_0^3$ proportional. Bezeichnen wir noch den diesem Vorgange entsprechenden Widerstandscoefficienten mit ξ_0, so ist die zur Durchstreichung der Luft durch den Brennstoff nothwendige Arbeitgröße

$$3)\quad \xi_0 \delta F_0 v_0^3 = \xi_0 \frac{G^3 \delta}{F_0^2} \frac{R^3 T_0^3}{p_0^3},$$

worin ξ auch den von der Geschwindigkeit v_0 aus Formel (2) herrührenden Factor α mit enthält. Beim Durchstreichen der Züge reibt sich die Luft an den Wandungen derselben, und es ist bei der hier angenommenen mittleren Temperatur T_1, wenn wir mit F_1 den mittleren Querschnitt der Züge bezeichnen,

$$G = F_1 v_1 \gamma_1 = F_1 v_1 \frac{p_1}{R T_1}.$$

Die Reibungsfläche ist gleich $u_1 l_1$, unter u_1 den mittleren Umfang und unter l_1 die Länge der Züge verstanden; die Luftmasse, welche reibt, ist daher dem Ausdruck $u_1 l_1 v_1 \gamma_1$, und die durch diese Reibung verbrauchte Arbeit daher dem Werthe $u_1 l_1 \gamma_1 v_1^3$ proportional. Wird noch der entsprechende Widerstandscoefficient mit ξ_1 bezeichnet, so ist dieser Arbeitsverlust

$$4)\quad \xi_1 u_1 l_1 \gamma_1 v_1^3 = \xi_1 \frac{u_1 l_1}{F_1^3} G^3 \left(\frac{R T_1}{p_1}\right)^2.$$

Ist die Schornsteinhöhe H, der mittlere Umfang U, der mittlere Querschnitt F, so ist die Arbeit der Reibung an den Wänden des Schornsteins, bei der mittleren Temperatur T und der mittleren Spannung q:

$$5)\quad \xi_2 U H \gamma v^3 = \xi_2 \frac{U H}{F^3} G^3 \left(\frac{R T}{q}\right)^2.$$

Die Luft ist auf die Höhe H zu erheben, wozu die Arbeit

$$6)\quad G H$$

verbraucht wird.

Beim Uebergange der Verbrennungsproducte aus den Zügen in den Schornstein finden verschiedene Querschnittveränderungen statt, wodurch ein Verlust an lebendiger Kraft entsteht. Ist r der Contractionscoefficient, und F_1'

der Querschnitt einer solchen Verengung in den Zügen, so ist der bei dem Uebergange entstehende Arbeitsverlust nach Aufgabe 31:

$$7)\ \frac{1}{2g}\,G\,v_1^2\left(\frac{F_1}{r\,F_1'}-1\right)^2=\frac{1}{2\,g\,.\,F_1^2}\,G^3\left(\frac{R\,T_1}{p_1}\right)^2\left(\frac{F_1'}{r\,F_1'}-1\right)^2.$$

Die unter den Rost eintretende Luft von der Temperatur T_0 verläßt den Schornstein mit der Temperatur T, nimmt also an Volumen zu und überwindet dabei, wie wir annehmen wollen, den constanten Druck p_0, dann ist die von der Luft geleistete Arbeit:

$$8)\ G\left(\frac{R\,T}{p_0}-\frac{R\,T_0}{p_0}\right)p_0=GR\,(T-T_0).$$

Diese erwärmte Luft ändert aber zugleich ihre Spannung von p_0 auf q, wobei wir annehmen wollen, daß diese Spannungsänderung bei der constanten Temperatur vor sich gehe. Die dabei geleistete Arbeit ist aber n. F. (46 a):

$$GRT\ln\frac{p_0}{q}.$$

Da die Luft hierbei sich um H Meter erheben muß, so ist n. F. (12), mit Rücksicht auf die Dichtigkeitsänderung, zu setzen:

$$\ln\frac{p_0}{q}=\frac{H}{R\,T_0},$$

und es ist deshalb die von der Luft geleistete Arbeit

$$9)\ G\,H\,\frac{T}{T_0}.$$

Bei dem Ausströmen der Luft aus der Schornsteinmündung vom Querschnitt f muß die Luft den äußeren Druck q überwinden und außerdem noch die behufs Ausfließen nothwendige lebendige Kraft besitzen.

Es ist $G=f\,v\,\gamma=f\,v\,\frac{q}{R\,T}$, und der äußere Druck gegen den Querschnitt f gleich $f\,q$, daher ist die der Luft beim Abfluß noch innewohnende Arbeit:

$$f\,q\,v+\frac{1}{2g}\,G\,v^2=f\,q\,\frac{G}{f}\,\frac{R\,T}{q}+\frac{1}{2g}\,G\,\frac{G^2}{f^2}\left(\frac{R\,T}{q}\right)^2$$
$$=GRT+\frac{1}{2g}\,\frac{G^3}{f^2}\left(\frac{R\,T}{p_0}\right)^2\left(\frac{p_0}{q}\right)^2.$$

Da nun $\ln\frac{p_0}{q}$ wegen der geringen Pressungsdifferenz jederzeit gleich $2\frac{p_0-q}{p_0+q}$ gesetzt werden darf, so ist

$$2\,\frac{p_0-q}{p_0+q}=2\,\frac{\frac{p_0}{q}-1}{\frac{p_0}{q}+1}=\frac{H}{R\,T_0}$$

oder

$$\frac{p_0}{q} - 1 = \frac{H}{2RT_0}\frac{p_0}{q_0} + \frac{H}{2RT_0}$$

$$\frac{p_0}{q}\left(1 - \frac{H}{2RT_0}\right) = 1 + \frac{H}{2RT_0}$$

und

$$\frac{p_0}{q} = \frac{1 + \frac{H}{2RT_0}}{1 - \frac{H}{2RT_0}} = 1 + \frac{H}{RT_0}$$

annähernd.

Die Luft besitzt deshalb beim Abfließen aus der Schornsteinmündung noch die Arbeitgröße:

$$10)\quad GRT + \frac{1}{2g}\left(\frac{RT}{fp_0}\right)^2\left(1 + \frac{H}{RT_0}\right)^2 G^3.$$

Fassen wir die unter (2) bis (10) erhaltenen Resultate zusammen, so entsteht für den Beharrungszustand, d. i. für das Zu- und Abströmen von G Kilogramm Luft in der Secunde:

$$11)\quad GRT_0 - \zeta_0\frac{R^3T_0^3}{F_0^2p_0^3}\delta G^3 - \zeta_1\frac{u_1l_1}{F_1^3}\left(\frac{RT_1}{p_1}\right)^2 G^3 - \zeta_2\frac{UH}{F^3}\left(\frac{RT}{q}\right)^2 G^3$$
$$- GH - \frac{1}{2gF_1^2}\left(\frac{RT_1}{p_1}\right)^2\left(\frac{F_1}{rF_1'} - 1\right)^2 G^3 + GR(T - T_0)$$
$$+ GH\frac{T}{T_0} - RTG - \frac{1}{2g}\left(\frac{RT}{fp_0}\right)^2\left(1 + \frac{H}{RT_0}\right)^2 G^3 = 0.$$

Nachdem diese Gleichung durch G dividirt und in dem letzten Gliede der Summand $\frac{H}{RT_0}$, der jederzeit ein kleiner echter Bruch ist, vernachlässigt, sowie die Glieder 1, 7 und 9 weggelassen worden, da sie sich zu Null ergänzen, erhält man:

$$12)\quad 2gH\frac{T - T_0}{T_0} = G^2\left(\frac{RT}{fp_0}\right)^2\left\{1 + 2g\zeta_0\left(\frac{f}{F_0}\right)^2\frac{\delta R}{p_0}\frac{T_0^3}{T^2}\right.$$
$$+ 2g\zeta_1\frac{u_1l_1}{F_1}\left(\frac{f}{F_1}\right)^2\left(\frac{T_1}{T}\right)^2\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^2$$
$$+ 2g\zeta_2\frac{UH}{F}\left(\frac{f}{F}\right)^2\left(\frac{p_0}{q}\right)^2$$
$$\left. + \left(\frac{f}{F_1}\right)^2\left(\frac{T_1}{T}\right)^2\left(\frac{F_1}{vF_1'} - 1\right)^2\right\}$$

oder indem wir die eckige Klammer zur Abkürzung gleich $1 + K$ setzen,

$$13)\quad 2gH\frac{T-T_0}{T_0}=G^2\left(\frac{RT}{fp_0}\right)^2(1+K).$$

Der numerische Werth K zeigt den Einfluß sämmtlicher Hindernisse bei der Bewegung der Luft von dem Roste bis zur Schornsteinmündung, und es ist deshalb die Anlage so anzuordnen, daß dieser Coefficient so klein als möglich werde. Gehen wir die einzelnen Summanden in Formel (12) durch, so ergiebt sich ein Minimum für K, wenn:

a) δ und $\frac{f}{F_0}$ klein sind, d. h. das Brennmaterial ist dünn aufzuschütten und der Feuerung eine große Rostfläche zu geben.

b) $l_1, \frac{u_1}{F_1'}, \frac{f}{f_1}$ klein sind, d. h. die Züge sind möglichst kurz, der mittlere Umfang klein gegen den Querschnitt derselben, und dieser wieder möglichst groß gegen den Schornsteinmündungsquerschnitt zu nehmen.

c) $\frac{UH}{F}\left(\frac{f}{F}\right)^2$ klein ist, d. h. ein verhältnißmäßig niedriger aber weiter Schornstein ist vortheilhaft, zugleich muß der mittlere Querschnitt desselben größer sein, als der Mündungsquerschnitt.

d) $\frac{F_1}{rF_1'}$ klein ist, d. h. wenn die Verengungen in den Zügen möglichst vermieden werden, oder wenn die durch Klappen verschlossenen Oeffnungen ganz geöffnet sind.

e) Die mittlere Temperatur T im Schornstein ist von geringerem Einfluß auf K, da dieselbe mit der Temperatur T_1 in den Zügen zugleich wächst. Dagegen ist es unvortheilhaft, wenn T durch Abkühlung an den Wänden des Schornsteins bedeutend heruntergezogen wird, während T_1 seinen mittleren Werth behält.

Was nun die Coefficienten ξ_0, ξ_1, ξ_2 und r anbetrifft, so kann man nach Redtenbacher $\xi_0 = 5618$, $\xi_1 = \xi_2 = 0{,}00125$ und $r = 0{,}66$ nehmen, so daß nun der Werth K annähernd bestimmt ist, und aus Gleichung (13) die Schornsteinhöhe H, der Mündungsquerschnitt f oder die pro Secunde abzuführende Gasmenge G in Kilogrammen berechnet werden kann.

54. Wie groß ist der Mündungsquerschnitt f eines Schornsteins, welcher 19 Meter hoch ist, wenn stündlich 25 Kilogramm Steinkohlen auf dem Roste verbrannt werden? Die äußere Temperatur sei 10^0, und die mittlere Temperatur im Schornstein 200^0.

Es sei ferner:

$$\frac{f}{F_0}=\frac{1}{6},\ \frac{f}{F_1}=2,\ \frac{F_1}{rF_1'}=2,\ \frac{UH}{F}=100,\ \frac{u_1l_1}{F_1}=142,\ \delta=0{,}1,$$

$$\frac{p_0}{q}=\frac{p_0}{p_1}=1,\ \frac{f}{F}=1,$$

dann ist:

$$2g\zeta_0\left(\frac{f}{F_0}\right)^2\frac{\delta R}{p_0}\frac{T_0^3}{T^2}=2g\cdot 5618\cdot\frac{1}{36}\cdot\frac{0{,}1\,.\,29{,}272}{10334}\cdot\frac{283^3}{473^2}=8{,}956\,g$$

$$2g\zeta_1\frac{u_1 l_1}{F_1}\cdot\left(\frac{f}{F_1}\right)^2\left(\frac{T_1}{T}\right)^2\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^2=2g\,.\,0{,}00125\,.\,142\,.\,4\left(\frac{873}{473}\right)^2=4{,}837\,g,$$

wenn man die Temperatur im Feuerraume $=1000^0$ setzt und die Temperatur in den Zügen gleich $\frac{1000+200}{2}=600^0$ annimmt, T_1 ist also $=873^0$.

$$2g\zeta_2\frac{UH}{F}\left(\frac{f}{F}\right)^2\left(\frac{p_0}{q}\right)^2=2g\,.\,0{,}00125\,.\,100=0{,}25\,g,$$

$$\left(\frac{f}{F_1}\right)^2\left(\frac{T_1}{T}\right)^2\left(\frac{F_1}{r F_1'}-1\right)^2=4\cdot\left(\frac{873}{473}\right)^2=13{,}63,$$

daher

$$K=13{,}63+137{,}76=151{,}4.$$

Nach Formel (13) der vorigen Nummer ist aber

$$2gH\frac{T-T_0}{T_0}=G^2\left(\frac{RT}{f p_0}\right)^2(1+K),$$

und nach Formel (1)

$$G=\frac{(V+1)Q}{3600}.$$

Die zur Verbrennung von 1 Kilogramm Steinkohlen nothwendige Luftmenge beträgt nach Aufgabe 33 des 2. Capitels 10,84 Kilogramm, welche jedoch, der besseren Unterhaltung des Feuers wegen, zweimal so groß in Rechnung zu bringen ist. Für V in Formel (1) der vorigen Nummer ist daher 21,68 und für Q der Aufgabe gemäß 25 einzuführen, und deshalb ist

$$G=\frac{22{,}68\,.\,25}{3600}=0{,}1575 \text{ Kilogramm.}$$

Zur Berechnung von f haben wir nun

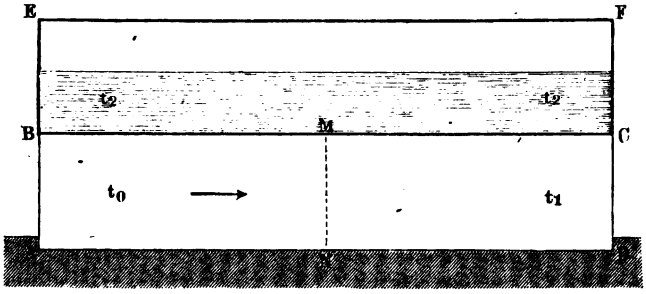
$$2g\,.\,19\frac{473-283}{283}=\left(\frac{0{,}1575\,.\,29{,}272\,.\,473}{10334}\right)^2 153\left(\frac{1}{f}\right)^2$$

$$f=\frac{0{,}1575\,.\,29{,}272\cdot 473}{10334}\sqrt{\frac{153\,.\,283}{190\,.\,2g\,.\,19}}=0{,}165\,\square\text{Meter.}$$

55. Die Fig. 109 stellt den Durchschnitt durch einen Kesselapparat vor, der Raum $ABCD$ enthält die Verbrennungsproducte, welche sich in der Richtung von A nach D bewegen, und deren Temperatur dabei von t_0^0 auf t_1^0 sinkt. Der Raum $BEFC$ enthält die zu erwärmende Flüssigkeit, deren Temperatur constant auf t_2^0 erhalten werden soll, indem während des Beharrungszustandes in jeder Stunde Q_2 Kilogramm Flüssigkeit zu- und abge-

leitet werden, während Q_1 Kilogramme Verbrennungsproducte in jeder Stunde durch einen Querschnitt des Heizcanals $ABCD$ ziehen. Wir bezeichnen mit K die Wärmemenge, welche in jeder Stunde durch einen Quadratmeter der Wand BC geht, wenn die Temperaturdifferenz zwischen den Verbrennungs-

Fig. 109.



producten und der im Kessel enthaltenen Flüssigkeit 1 Grad beträgt. Bei B ist aber diese Temperaturdifferenz gleich $t_0 - t_2$, was wir kurz mit p bezeichnen, und bei C ist diese Differenz gleich $t_1 - t_2 = q$, während in den Wandtheilen zwischen B und C diese Differenzen der Reihe nach $p_2, p_3 \ldots p_{4-1}$ heißen sollen. Für die beliebig gewählte Stelle MN des Heizcanals sei p_{r+1} diese betreffende Differenz, dann gehen in jeder Stunde durch einen Quadratmeter Wandfläche Kp_{r+1} Wärmemengen. Wird die ganze Wandfläche von B bis C mit F bezeichnet, so ist für die Stelle M ein Element derselben gleich $\frac{F}{n}$ in Rechnung zu bringen, daher ist die bei M durch die Wand in jeder Stunde gehende Wärmemenge gleich

$$Kp_{r+1}\frac{F}{n}.$$

Durch den Querschnitt MN gehen in jeder Stunde Q_1 Kilogramm Verbrennungsproducte, für welche kurz vor MN die Temperaturdifferenz p_r gewesen sein mag, dann ist, die Spannung der Luft als constant angenommen, bei der Gewichtscapacität c_1 derselben, von jedem Kilogramm Luft die Wärmemenge $c_1 (p_r - p_{r-1})$ abgegeben worden, daher ist die den Q_1 Kilogrammen Luft in einer Stunde entzogene Wärmenge

$$Q_1 c_1 (p_r - p_{r+1}).$$

Dieser Wärmeverlust ist von der zu erwärmenden Flüssigkeit aufgenommen worden, daher haben wir als Ausgangsgleichung:

$$Kp_{r+1}\frac{F}{n} = Q_1 c_1 (p_r - p_{r+1})$$

oder

$$1)\quad p_r = p_{r+1}\left(1 + \frac{K}{Q_1 c_1}\cdot\frac{F}{n}\right) = p_{r+1}\left(1 + \frac{KF : Q_1 c_1}{n}\right)$$
$$= p_{r+1}\left(1 + \frac{a}{n}\right).$$

Derartige Gleichungen können wir von $p_1 = p = t_0 - t_2$ bis $p_n = q = t_1 - t_2$ aufstellen, und erhalten dann

$$p = p_2\left(1 + \frac{a}{n}\right),\ p_2 = p_3\left(1 + \frac{a}{n}\right),\ p_3 = p_4\left(1 + \frac{a}{n}\right)\ldots$$
$$p_{n-1} = q\left(1 + \frac{a}{n}\right).$$

Die Multiplication dieser Gleichungen liefert aber

$$p = q\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n,$$

und da n eine über jede angebbare Zahl hinauswachsende Zahl vorstellt, so ist die Potenz $= e^a$ zu setzen, unter e die Basis der natürlichen Logarithmen verstanden. Wir erhalten deshalb, wenn wir die gegebenen Werthe wieder einführen,

$$t_0 - t_2 = (t_1 - t_2)\, e^{\frac{KF}{Q_1 c_1}}$$

oder

$$2)\quad ln\,\frac{t_0 - t_2}{t_1 - t_2} = \frac{K}{Q_1 c_1} F.$$

Die von den Verbrennungsproducten abgegebene Wärmemenge W ist einmal gleich $Q_1 c_1 (t_0 - t_1)$ und andererseits ist, da stündlich Q_2 Kilogramm Flüssigkeit von der Temperatur t_3 auf die Temperatur t_2 erwärmt werden sollen, diese Wärmemenge gleich $Q_2 c_2 (t_2 - t_3)$, unter c_2 die Gewichtscapacität der Flüssigkeit verstanden. Als weitere Gleichung haben wir daher

$$3)\quad W = Q_1 c_1 (t_0 - t_1) = Q_2 c_2 (t_2 - t_3).$$

Benutzen wir diesen Werth von W, um in Formel (2) $Q_1 c_1$ zu ersetzen, so ist die Wandfläche F, d. i. die Heizfläche des Kesselapparates:

$$4)\quad F = \frac{W}{K}\,\frac{ln\,\frac{t_0 - t_2}{t_1 - t_2}}{t_0 - t_1}.$$

Nach Redtenbacher sind für K folgende Zahlenwerthe zu benutzen:

Uebergang der Wärme	K
1) Aus Luft durch eine Wand aus gebrannter Erde von 1 Centimeter Dicke (Ofenheizung)	5
2) Aus Luft durch eine Wand von Gußeisen von 1 bis 1,5 Cm. Dicke in Luft	14
3) Aus Luft durch eine Wand von Eisenblech in Luft	7
4) Aus Luft durch eine Wand von Eisenblech in Wasser, oder aus Wasser in Luft (Dampfkesselheizung)	23
5) Aus Dampf durch eine Wand von Gußeisen in Luft (Dampfheizung)	12

Mit Hülfe der Formel (2) ist man in den Stand gesetzt, die für die einzelnen Querschnitte eines Heizcanals stattfindenden Temperaturen t_1 zu berechnen, sobald die Temperatur t_2 der zu erwärmenden Flüssigkeit bekannt ist. Das stündlich abzuführende Gewicht Q_1 der Verbrennungsproducte ist nach Aufgabe 53 gleich $3600\,G$. Nachdem diese Temperaturen t gefunden und durch die absoluten Temperaturen T ersetzt worden haben wir, wenn man von der verschiedenen Spannkraft der Luft in den einzelnen Querschnitten der Heizanlage absieht,

$$G = F_0 v_0 \frac{p_0}{R T_0} = F_1 v_1 \frac{p_0}{R T_1} = F_2 v_2 \frac{p_0}{R T_2} \cdots$$

und hieraus

$$v_1 = \frac{F_0}{F_1} \frac{T_1}{T_0} v_0$$

$$v_2 = \frac{F_0}{F_2} \cdot \frac{T_2}{T_0} v_0 \text{ u. s. w.,}$$

so daß nun auch die Geschwindigkeiten v_1, v_2, v_3 . . . für die einzelnen Querschnitte F_1, F_2, F_3 . . . als bekannt angenommen werden können.

56. **Sicherheitsventile.** Wenn die Spannung des Dampfes, bei allmäliger Ansammlung desselben in einem Dampfkessel eine gewisse Grenze überschreitet, so wird dem Wärter durch Abblasen des Dampfes aus dem Sicherheitsventile dieser Zustand angezeigt, dagegen gewährt dasselbe gegen die Wirkung von plötzlichen Entwicklungen größerer Dampfmassen keinen Schutz. Die Sicherheitsventile werden gewöhnlich als Scheibenventile construirt (Fig. 110), die mit drei Armen versehen sind, welche sich in der Achse des Ventils schneiden und deren Enden die innere cylindrische Fläche des Ventilsitzes berühren. Die untere Seite des Ventils ist ein wenig concav, der obere Theil des Ventilsitzes ist erweitert, die Leitflügel sind hier aber dünner gedreht und die untere Ventilfläche ist auf dem Ventilsitze aufgeschliffen, um eine vollkommen dampfdichte Schließung zu ermöglichen. Es ist auf diese Weise das Festklem-

Fig. 110.

men des Ventils vermieden, und beim Aufheben desselben wird dem Dampfe die größtmöglichste Ausflußöffnung dargeboten. Es ist von Wichtigkeit, die Berührungsfläche zwischen Ventil und Sitz recht schmal zu construiren, da schmale Berührungsflächen eine leichtere Dichtung möglich machen, der Dampfdruck hier keine große Adhäsion zu überwinden hat und die Anhäufung von Unreinigkeiten geringer und leichter zu entfernen ist, als bei breiten Berührungsflächen. Der obere Zapfen des Ventils ist mit demselben abgedreht, läuft in eine Spitze aus, auf welcher die Belastung des Ventils angebracht ist. Ventil und Ventilsitz bestehen aus Bronze. Je nach der Art der Belastung unterscheidet man:

Ventile mit Hebelbelastung,
Ventile mit directer Belastung,
Ventile mit Federbelastung.

In Fig. 111 ist ein Ventil mit Hebelbelastung dargestellt. Der sich im Zapfen *F* drehende Hebel *FE* ruht bei *D* auf dem Zapfen des Ventils, und erhält durch die Gabel seine Führung; das an dem Ende angehängte Gewicht

Fig. 111.

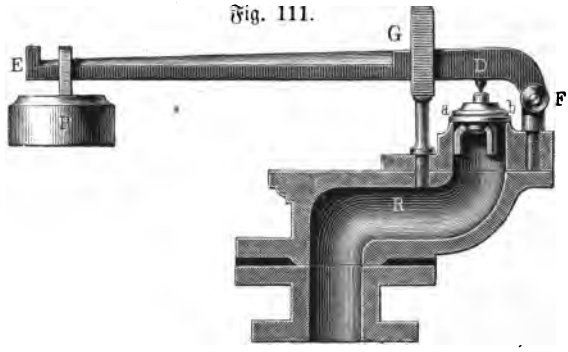
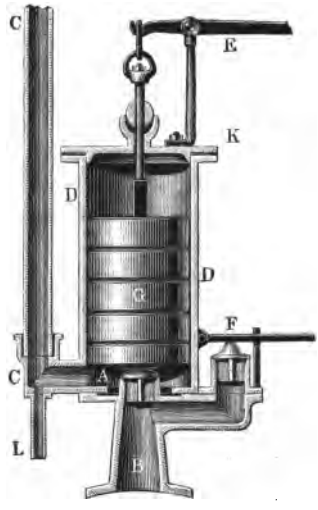


Fig. 112.



P entspricht mit dem Arme *EF* dem größtzulässigen Dampfdrucke am Arme *FD* Diese Anordnung der Belastung hat den Uebelstand, daß der Maschinist nach Belieben das Gewicht *G* vergrößern kann, wodurch also Gefahr vor Berstung des Kessels hervorgerufen wird. Es ist daher in Preußen Vorschrift, daß wenigstens eins der Sicherheitsventile auf dem Kessel dem Maschinisten unzugänglich sein muß. Dies wird am leichtesten durch die Sicherheitsventile mit directer Belastung erreicht. Fig. 112 zeigt eine derartige Einrichtung. Der untere Theil *B*, welcher mit dem Dampfkessel communicirt, ist aus Gußeisen, hieran schließt sich der cylindrische Ven-

tikasten D, der durch einen Deckel K geschlossen ist, so daß es dem Wärter unmöglich ist, zu dem Ventile zu gelangen. In das Ventil ist eine vierkantige Eisenstange geschraubt, die unten eine vorspringende Scheibe hat, auf welcher die gußeisernen Scheiben G als Belastungsgewichte ruhen. Die Stange steht mit einem ungleicharmigen Hebel E in Verbindung, der zum Lüften und Probiren des Ventils benutzt wird. Das Rohr C ist das Dampfableitungsrohr, und durch den unteren Theil desselben fließt das condensirte Wasser ab. Es ist hier noch ein zweites Ventil F angebracht, das, wie das vorher beschriebene, mit Hebelbelastung versehen, dem Wärter also zugänglich ist. Bei den Locomotiven können diese Belastungen wegen der großen Schwankungen der Maschine nicht benutzt werden, hier wendet man daher stählerne Federn als Belastung an.

57. Sollen Sicherheitsventile jede Zunahme des Dampfdruckes im Kessel über jene Größe, für welche die Blechstärke derselben bestimmt ist, verhindern, so müssen sie wenigstens eine solche Größe erhalten, daß bei ihrer Oeffnung in jedem Augenblicke so viel Dampf von dem im Kessel befindlichen Dampf entweichen kann, als der Kessel nur immer zu erzeugen vermag. Es muß hiernach bei steter Production des Dampfes ein einziges Sicherheitsventil ausreichen, selbst wenn gar kein Dampfverbrauch stattfindet. Die Sicherheitsventile sollen erst dann gehoben werden, wenn der Dampfdruck das zulässige Maß überschreitet, dagegen sollen sie sich von selbst schließen, wenn die Dampfspannung in Folge des Dampfabflußes durch das Ventil wieder auf das gehörige Maß reducirt worden ist. Hiernach muß die Belastung der Sicherheitsventile mit Einschluß ihres Gewichtes dem zulässigen Maximum des Dampfdruckes entsprechen und ist deshalb für jeden speciellen Fall zu berechnen.

Zur Bestimmung der Größe des Sicherheitsventiles sei f der Querschnitt der Ventilöffnung in □Metern, u der Umfang des Ventiles und s der Hub desselben in Metern bei der größten Spannung p_1, die im Kessel eintreten darf. Soll die Hebung des Ventiles bei der Spannung p beginnen, und bezeichnen wir den Druck der äußeren Luft mit q Kilogrammen pro □Meter, mit P aber die Ventilbelastung, so ist für den Augenblick der Erhebung

$$1)\quad P + fq = fp.$$

Die in jeder Secunde in dem Dampfkessel erzeugte Dampfmenge G Kilogramm muß in derselben Zeit durch die Ventilöffnung f vermöge des Dampfüberdrucks $p_1 - p$ fortgeführt werden, und zugleich muß beim schwebenden Zustande des Ventiles diese Dampfmenge G durch die Oeffnung us in Folge des Dampfüberdruckes $p - q$ abgeleitet werden. Bezeichnen wir die betreffenden Ausflußgeschwindigkeiten mit v_1 und v, die specifischen Gewichte mit γ_1, γ und γ_0, den Dampfspannungen p_1, p und q entsprechend, so haben wir:

$$G = fv_1\gamma = usv.\gamma_0,$$

und mit Benutzung von Formel 52 bis 55:

$$2)\quad G = f\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{9}{10}} \sqrt{18\,g.p_1\gamma_1\left\{1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{10}}\right\}}$$

$$3)\quad G = u\,s\left(\frac{q}{p}\right)^{2/\gamma}\sqrt{18\,g\,.\,p\,\gamma\left\{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{1/\gamma}\right\}},$$

wenn wir gesättigten, mit 10 Proc. Wassergehalt versehenen Wasserdampf voraussetzen.

Die Gleichungen (2), (3), (1) dienen der Reihe nach zur Berechnung der Ventilöffnung f, der Hubhöhe s des Ventils und der Belastung P desselben, da die übrigen, in den Formeln vorkommenden Werthe aus der Tabelle für Wasserdampf, §. 18, bekannt sind. Setzt man die Maximalspannung p_1 um 0,1 größer als die Spannung, bei der die Oeffnung des Ventils beginnt, so ist $\frac{p}{p_1} = \frac{10}{11}$ und wir haben dann

$$2\text{ a})\quad G = 1{,}25\,f\sqrt{p_1\,\gamma_1},$$

daher

$$\frac{f}{G} = \frac{0{,}8}{\sqrt{p_1\,\gamma_1}},$$

und wenn wir statt der Dampfspannung in Kilogrammen die betreffenden Atmosphären a einführen, so ist

$$4)\quad \frac{f}{G} = \frac{0{,}0078696}{\sqrt{a_1\,\gamma_1}}.$$

Für

a =	2	3	4	5	6

ist

a_1 =	2,1	3,1	4,1	5,1	6,1
γ_1 =	1,2177	1,7556	2,2826	2,8016	3,3142
$\frac{f}{G}$ =	0,00492	0,00337	0,00257	0,00213	0,00175

Viertes Capitel.

Von der Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen.

Das Wasser, dessen Bewegung zu technischen Zwecken benutzt wird, hat **36** entweder ein *natürliches* oder *künstliches* Bett. Im ersten Falle bildet das Wasser Ströme, Flüsse, Bäche, im letztern Canäle, Gräben und Gerinne. Das Bett besteht aus dem Grundbette oder der Sohle und aus den beiden Ufern. Eine zur Bewegungsrichtung des Wassers normal gelegte Ebene liefert in dem Durchschnitte mit dem Bette den *Querschnitt* desselben. Der Umfang des Querschnitts heißt, soweit er vom Wasser gebildet wird, *benetzter Umfang*. Eine Verticalebene durch die Richtung des fließenden Wassers liefert den *Längendurchschnitt*. Die Ursache der Bewegung des Wassers in einem Bette ist in der gegen den Horizont geneigten Lage der Sohle zu suchen, indem sich die einzelnen Wassertheilchen, auf einer schiefen Ebene gelegen, vermöge ihres Gewichtes nach tiefer gelegenen Punkten zu bewegen suchen.

Unter *Gefälle* versteht man die senkrechte Entfernung zweier Punkte der Sohle oder des Wasserspiegels in zwei verschiedenen Querschnitten, wobei jedesmal die Entfernung der beiden Querschnitte, in Richtung des fließenden Wassers gemessen, angegeben werden muß. Hat hiernach ein Fluß auf eine Länge von 7500 Meter ein Gefälle von 18 Meter, so heißt das: der Wasserspiegel senkt sich in dieser Entfernung um 18 Meter. Der Wasserspiegel bildet mit dem Horizont einen Winkel, den man den Abhang des Flusses nennt. Zwischen dem Gefälle $DH = h$ (Fig. 113), der Länge $AD = l$ und dem Abhange $DAH = \delta$ der Flußstrecke besteht daher die Gleichung:

Fig. 113.

$$\sin \delta = \frac{h}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

Die Geschwindigkeit des in einem Bette fließenden Wassers ist in den **37** einzelnen Punkten eines Querschnitts verschieden, sie ist an derjenigen Stelle am größten, welche von der Sohle und den Ufern am weitesten entfernt ist, und nimmt nach dem Boden und den Ufern hin allmälig ab. Es läßt sich die Bewegung des Wassers in Flußbetten mit der in Röhrenleitungen vergleichen, indem die Wasserelemente, die in unmittelbarer Berührung mit dem Flußbette

sind, vermöge der Reibung und Klebrigkeit des Wassers an der Bewegung gar nicht Theil nehmen. Dieser Wasserschicht folgt eine andere, die eine geringe Geschwindigkeit besitzt, woran sich wieder eine Schicht mit größerer Geschwindigkeit schließt u. s. w.; der innerste, von der Sohle und den Ufern am weitesten abstehende Wasserfaden, der sogenannte Stromstrich, hat die größte Geschwindigkeit. Von diesen verschiedenen Geschwindigkeiten des Wassers in einem Querschnitt interessirt uns nur die mittlere Geschwindigkeit v, die sich aus dem Inhalte F des Querschnitts und der in einer Secunde durchgeflossenen Wassermasse V, n. F. 35 bestimmt:

$$v = \frac{V}{F}.$$

Für regelmäßige Querschnitte der Flußbette kann man annehmen, daß die mittlere Geschwindigkeit 0,84 von der größten im Stromstrich gemessenen beträgt. Im Folgenden wollen wir unter Geschwindigkeit immer die mittlere verstehen. Um die Bewegungsverhältnisse bei fließendem Wasser zu finden, gehen wir von der in § 33 hingestellten, die Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen betreffenden Formel aus und machen darin die für den vorliegenden Fall nothwendigen Substitutionen. Es war:

$$x - x_1 + \frac{p-q}{\gamma} - \frac{1}{2g}v^2\left[1 - \left(\frac{rF}{F_1}\right)^2 + \xi_1\left(\frac{rF}{F_2}\right)^2 + \xi_2 + \xi_3\frac{l}{d}\left(\frac{rF}{F_2}\right)^2\right] = 0,$$

worin zuerst $p - q$, ξ_1 und ξ_2 gleich Null zu setzen ist, da überall der atmosphärische Druck für die Flächeneinheit in Rechnung zu bringen und bei dem Uebergange des Wassers aus einem Querschnitte in einen benachbarten kein besonderer Eintritts- und Austritts-Widerstandscoefficient anzunehmen ist. Was den Reibungswiderstand anbetrifft, so ist den Versuchen nach derselbe der Länge l der Flußstrecke und dem mittleren benetzten Umfange u auf derselben proportional, dem Flächeninhalte des vom Wasser durchströmten mittleren Querschnitts F_0 aber umgekehrt proportional. In dem Ausdrucke:

$\xi_3 \frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}\left(\frac{rF}{F_2}\right)^2$ ist hiernach $\frac{l}{d} = \frac{lu}{F_0}$ und für $v^2\left(\frac{rF}{F_2}\right)^2$, v_0^2 zu setzen, unter v_0 die mittlere Geschwindigkeit für die Flußstrecke von der Länge l verstanden. Nach dieser Umformung erhalten wir für unseren Fall als Bewegungsgleichung:

$$x - x_1 - \frac{1}{2g}v^2\left[1 - \left(\frac{rF}{F_1}\right)^2\right] - \xi_3\frac{v_0^2}{2g}\cdot\frac{lu}{F_0} = 0,$$

worin wir noch für ξ_3 einfach ξ, für $x - x_1$ das Gefälle h auf die Länge l und für rF den Querschnitt F_2 zu Ende der Flußstrecke setzen wollen, F_1 bezeichnet dann also den oberen Querschnitt des vom Wasser erfüllten Flußbettes und v die im Querschnitte F_2 vorhandene mittlere Geschwindigkeit des abfließenden Wassers. Die der Bewegung des Wassers in Flüssen und Canälen zu Grunde zu legende Formel ist deshalb:

$$h - \frac{v^2}{2g}\left[1 - \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2\right] - \xi\frac{v_0^2}{2g}\cdot\frac{lu}{F_0} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (64)$$

Die im vorigen Paragraphen abgeleitete Formel ist um so genauer, je 38
kleiner l, d. h. je kürzer die untersuchte Flußstrecke genommen wird. Anstatt der Geschwindigkeiten können wir noch die abfließende Wassermasse V einführen. Es ist $V = F_2\, v = F_0\, v_0$, und deshalb

$$h - \frac{V^2}{2g}\left(\frac{1}{F_2^2} - \frac{1}{F_1^2} + \zeta\,\frac{lu}{F_0^3}\right) = 0.$$

Hieraus folgt das Gefälle

$$h = \frac{V^2}{2g}\left(\frac{1}{F_2^2} - \frac{1}{F_1^2} + \zeta\,\frac{lu}{F_0^3}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (65)$$

die Wassermasse

$$V = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\frac{1}{F_2^2} - \frac{1}{F_1^2} + \zeta\,\frac{lu}{F_0^3}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

Die für das Gefälle in gewöhnlichen Flußbetten entwickelte Formel (65) wollen wir noch weiter umformen. Bezeichnen wir für die Flußstrecke von der Länge l die obere Wassertiefe mit a_1, die untere mit a_2, so ist, unter δ den Abhang des Grundbettes verstanden,

$$a_1 - a_2 + l\,\sin\delta = h \quad \ldots\ldots\ldots \quad (67)$$

Führen wir diesen Werth in der obigen Gleichung ein und setzen noch statt F_0, $\frac{F_1 + F_2}{2}$, so erhalten wir:

$$a_1 - a_2 + l\,\sin\delta = \frac{V^2}{2g}\left(\frac{1}{F_2^2} - \frac{1}{F_1^2} + \zeta\,\frac{8\,lu}{(F_1 + F_2)^3}\right).$$

Hieraus folgt die Länge l, welche einer gegebenen Veränderung $a_1 - a_2$ der Wassertiefe entspricht:

$$l = \frac{a_1 - a_2 - \frac{V^2}{2g}\left(\frac{1}{F_2^2} - \frac{1}{F_1^2}\right)}{\zeta\,\frac{8u}{(F_1 + F_2)^3}\cdot\frac{V^2}{2g} - \sin\delta} \quad \ldots\ldots \quad (68)$$

Nehmen wir die mittlere Breite des Flusses als constant gleich b an, so daß also $F_1 = a_1\, b$ und $F_2 = a_2\, b$ gesetzt werden darf, so vereinfacht sich die letzte Gleichung und wir erhalten:

$$l = \frac{a_1 - a_2 - \frac{V^2}{2g}\cdot\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2\, a_2^2\, b^2}}{8\zeta\,\frac{u}{b^3}\cdot\frac{1}{(a_1 + a_2)^3}\cdot\frac{V^2}{2g} - \sin\delta}.$$

Führen wir weiter statt der Wassermasse V die Geschwindigkeit v_1 in dem Querschnitte F_1 ein, setzen wir also $V = a_1\, b\, v_1$, so wird

$$l = (a_1 - a_2)\,\frac{1 - \frac{v_1^2}{2g}\cdot\frac{a_1 + a_2}{a_2^2}}{8\,\xi\,\frac{u}{b}\cdot\frac{a_1^2}{(a_1 + a_2)^3}\cdot\frac{v_1^2}{2g} - \sin\delta}.$$

Wählen wir die zu untersuchende Flußstrecke l klein, so kann man annähernd $a_1 + a_2 = 2\,a_1 = 2\,a_2$ nehmen und wir erhalten schließlich:

$$l = (a_1 - a_2)\,\frac{1 - \frac{v_1^2}{2g}\cdot\frac{2}{a_1}}{\xi\,\frac{u}{a_1 b}\cdot\frac{v_1^2}{2g} - \sin\delta}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (69)$$

39 Ist das Flußbett ein Canal oder Gerinne, das einen constanten Querschnitt F hat, so vereinfachen sich die im vorigen Paragraphen entwickelten Formeln, indem $F_0 = F_1 = F_2 = F$ zu setzen ist. Wir erhalten für diese Annahme:

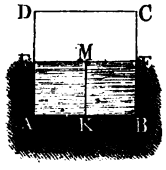
$$h = \xi\,\frac{V^2}{2g}\cdot\frac{l\,u}{F^3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (65a)$$

$$V = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\xi\,\frac{l\,u}{F^3}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (66a)$$

die Geschwindigkeit $v = \sqrt{\frac{F}{\xi\,l\,u}\,2gh}$.

Bei der Anlage von Canälen handelt es sich um den zweckmäßigsten Querschnitt F, d. h. um denjenigen, für welchen bei gegebenem Inhalte F die Geschwindigkeit möglichst groß ausfällt. Aus dem obigen Werthe von v ersieht man, daß v ein Maximum ist, wenn der benetzte Umfang u zu einem Minimum gemacht wird. Die in der Praxis ausgeführten Querschnitte haben bei Gerinnen aus Holz oder Eisen die Form eines Rechtecks oder die eines Halbkreises. Bei gegrabenen Canälen stellt man den Querschnitt jedoch in Form eines Paralleltrapezes dar. Hiernach sind die Abmessungen des Rechtecks oder des Trapezes zu bestimmen, damit der benetzte Umfang u ein Minimum werde.

Fig. 114.



Nennen wir (Fig. 114) die Breite AB des Rechtecks $ABEF$, x und die Höhe AF, y so ist:

$$F = xy$$

und

$$u = x + 2y = \text{Minimum},$$

d. h.

$$\frac{F}{y} + 2y \text{ ein Minimum.}$$

Es iſt $fy = \frac{F}{y} + 2y$ und $fy_1 = \frac{F}{y_1} + 2y_1$, daher $\frac{fy - fy_1}{y - y_1}$

$$= -\frac{F}{y\,y_1} + 2.$$

Geht man zur Grenze über, ſetzt alſo $y = y_1$ und den erhaltenen Ausdruck gleich Null, ſo entſteht $2y^2 = F$, d. h. $y = \frac{1}{2}\sqrt{2F}$ und ferner ergiebt ſich aus $xy = F$ $x = \sqrt{2F}$.

Es iſt hiernach die Höhe y des Rechtecks gleich der halben Grundlinie x, der Querſchnitt $ABEF$ des Gerinnes muß alſo ein halbes Quadrat von der Seite x bilden. Nennen wir die Waſſertiefe MK, a ſo iſt für ein in dieſer Weiſe ausgeführtes Gerinne:

$$v = \sqrt{\frac{a}{\zeta l} g h}$$

$$h = \zeta \frac{v^2}{g} \cdot \frac{l}{a},$$

oder

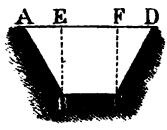
$$h = \zeta \frac{V^2}{2g} \cdot \frac{l}{2a^5}$$

und

$$V = \sqrt{\frac{2a^5}{\zeta l}\, 2gh}.$$

Sind andererſeits die Abmeſſungen des Trapezes $ABCD$ (Fig. 115) für einen gegrabenen Canal zu beſtimmen, ſo iſt außer dem Inhalte F des Querſchnitts noch der Böſchungswinkel $ADC = \vartheta$ des Erdreiches gegeben, der bei der Beſtimmung des benetzten Umfanges zu berückſichtigen iſt. Es ſei x die untere Grundlinie BC des Trapezes und y die Länge $AB = CD$ der nicht parallelen Seiten. Für dieſe Annahme iſt:

Fig. 115.



$$F = \frac{2x + 2y\cos\vartheta}{2}\, y \sin\vartheta$$

$$u = x + 2y.$$

Der letztere Ausdruck ſoll zu einem Minimum gemacht werden, d. h. nach Einſetzung des Werthes von x aus der erſten Gleichung muß

$$\frac{F}{y\sin\vartheta} - y\cos\vartheta + 2y,$$

oder

$$\frac{F}{y\sin\vartheta} + y\,(2 - \cos\vartheta)$$

ein Minimum ſein.

$$fy = \frac{F}{y \sin\delta} + y\,(2 - \cos\delta);$$

$$fy_1 = \frac{F}{y_1 \sin\delta} + y_1\,(2 - \cos\delta);$$

$$\frac{fy - fy_1}{y - y_1} = -\frac{F}{y y_1 \sin\delta} + 2 - \cos\delta$$

d. h. für das Minimum

$$y^2 \sin\vartheta\,(2 - \cos\vartheta) = F.$$

Hieraus folgt:

$$y = \sqrt{\frac{F}{\sin\vartheta\,(2 - \cos\vartheta)}}$$

und dann

$$x = 2\,\frac{1 - \cos\vartheta}{\sin\vartheta\,(2 - \cos\vartheta)} \cdot \sqrt{F \sin\vartheta\,(2 - \cos\vartheta)}.$$

Die Tiefe $EB = FC = z$ des Canals aber ist:

$$\sqrt{\frac{F \sin\vartheta}{2 - \cos\vartheta}}.$$

Bei gemauerten Canälen kann der Böschungswinkel ϑ eine beliebige Größe erhalten. Nehmen wir z. B. $\vartheta = 60^0$, so wird $x = y = {}^2/_3 \sqrt{F.\sqrt{3}}$, d. h. als Querschnitt ergiebt sich ein halbes regelmäßiges Sechseck, dessen Inhalt also gleich $2F$ ist.

Aendert sich in einem Canale der Wasserstand durch außerordentliche Zuflüsse, so hat dieses eine Vergrößerung der mittleren Geschwindigkeit und eine Vermehrung der abfließenden Wassermenge zur Folge. Hierbei ändern sich der Querschnitt F in F_1, der benetzte Umfang u in u_1, die Geschwindigkeit v in v_1 und die abfließende Wassermasse V in V_1 um. Unter diesen Annahmen ist:

$$v_1 = \sqrt{\frac{F_1}{\zeta l u_1}\,2gh},$$

daher

$$\frac{v_1}{v} = \sqrt{\frac{F_1}{F}} \cdot \sqrt{\frac{u}{u_1}}$$

und

$$\frac{V_1}{V} = \frac{F_1 v_1}{F v} = \frac{F_1}{F} \cdot \sqrt{\frac{F_1}{F}} \cdot \sqrt{\frac{u}{u_1}}.$$

Bezeichnen wir die ursprüngliche Tiefe mit a, die nach dem Steigen vorhandene mit a_1 und die obere Breite des Canals mit b, so ist für nicht allzugroße Steigungen des Wassers:

$$F_1 = F + b\,(a_1 - a)$$

und

$$u_1 = u + \frac{2\,(a_1 - a)}{\sin\vartheta},$$

unter ϑ den Böschungswinkel der Ufer verstanden. Substituiren wir diese Werthe in den obigen Ausdrücken für die Geschwindigkeit v_1 und die abfließende Wassermasse V_1, so erhalten wir:

$$v_1 = v\sqrt{1+\frac{b(a_1-a)}{F}}\cdot\sqrt{1+\frac{2(a_1-a)}{u\sin\vartheta}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (70)$$

$$V_1 = V\left(1+\frac{b(a_1-a)}{F}\right)\cdot\sqrt{1+\frac{b(a_1-a)}{F}}\cdot\sqrt{1+\frac{2(a_1-a)}{u\sin\vartheta}} \quad (71)$$

Bei breiten Canälen mit geringer Böschung kann man annähernd $F = ab$ setzen und $\frac{2(a_1-a)}{u\sin\vartheta}$ gegen 1 vernachlässigen. Für diese Voraussetzungen erhalten wir:

$$v_1 = v\sqrt{\frac{a_1}{a}}$$

$$V_1 = V\frac{a_1}{a}\sqrt{\frac{a_1}{a}}.$$

Bei Anlage eines Canals ist gewöhnlich die Wassermenge V gegeben, 41
welche durch denselben abgeführt werden soll. Zur Bestimmung des Querschnitts F handelt es sich zuerst um die mittlere Geschwindigkeit v. Dieselbe soll erfahrungsmäßig wenigstens 0,209 Meter betragen, wenn das Wasser leichten Schlamm mit sich führt; ist dagegen das Absetzen von Sand zu befürchten, so ist für v wenigstens 0,418 Meter zu nehmen. Weiter ist es zu vermeiden, die Geschwindigkeit so groß zu nehmen, daß dadurch ein Wegschwemmen der Sohle und der Ufer herbeigeführt werden könnte. Folgende Tabelle giebt die Maximalwerthe von v für verschiedene Bodenarten an:

Beschaffenheit des Flußbettes.	Geschwindigkeit an der Oberfläche.	Mittlere Geschwindigkeit.	Geschwindigkeit am Boden.
Schlammige Erde oder brauner Töpferthon	0,151m	0,113m	0,078m
Fetter Thon	0,302	0,229	0,157
Fester Flußsand	0,603	0,458	0,314
Kiesiger Boden	1,224	0,960	0,697
Grobsteiniger Boden	1,519	1,230	0,942
Conglomerat von Schieferstücken	2,225	1,858	1,491
Lagerhafte Gebirgsarten	2,718	2,269	1,820
Harte Felsarten	4,240	3,691	3,139

Bezeichnet ϑ den Böschungswinkel der Ufer eines Canals mit trapezförmigem Querschnitt und a die Tiefe des Bettes, so ist die Ausladung der oberen Uferkante gegen die untere $a \cot g \vartheta$. Zur Bestimmung von ϑ dienen folgende, der praktischen Erfahrung entnommene Angaben:

	$\cot g \vartheta$	ϑ
Für verticale Wände	0	90°
Für Futtermauern	½	63° 20′
Für gegrabene Canäle in fester Erde mit Uferbekleidung	1	45°
Für gegrabene Canäle in fester Erde ohne Uferbekleidung	1½	33° 40′
Für Canäle in lockerer Erde, Sand ꝛc.	2	26° 34′

Was den Widerstandscoefficienten ζ anbetrifft, so ist zu bemerken, daß derselbe, wie bei der Bewegung des Wassers in Röhren, nicht constant ist, sondern sich mit der Geschwindigkeit v ändert. Nach Weisbach's Versuchen ist:

$$\zeta = 0{,}007409 \left(1 + \frac{0{,}05853}{v}\right).$$

In der folgenden Tabelle sind die Werthe von ζ für verschiedene Wassergeschwindigkeiten zusammengestellt:

Geschwindigkeit . . . v^m =	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
Widerstandscoefficient ζ =	0,01175	0,00958	0,00885	0,00849	0,00828	0,00813
Geschwindigkeit . . . v^m =	0,7	0,8	0,9	1	1,2	1,5
Widerstandscoefficient ζ =	0,00803	0,00795	0,00789	0,00784	0,00777	0,00771
Geschwindigkeit . . . v^m =	2	3	4	5		
Widerstandscoefficient ζ =	0,00763	0,00755	0,00752	0,00750		

42 Die vorhandene Geschwindigkeit der Flüsse und Bäche ist zum Betriebe von Maschinen gewöhnlich zu gering. Um dieselbe zu erhöhen, oder um das

Wasser durch sein Gewicht auf die Maschine wirken lassen zu können, wird das Wasser durch künstliche Mittel *aufgestaut* und dadurch ein Gefälle erzeugt. Zu dem Ende bringt man quer durch den Fluß Einbauten aus Holz oder Steinen an, die man *Wehre* nennt. Die Wehre zerfallen in *Ueberfallwehre* und *Schleusenwehre*, je nachdem das Wasser frei über der höchsten Kante wegfließen kann, oder durch aufgestellte Schutzbretter noch über dieser höchsten Kante aufgestaut wird. Die Ueberfallwehre kommen zur Anwendung, wenn ein Theil des fließenden Wassers in einen oberhalb des Wehres mündenden Canal treten und hier eine Maschine in Bewegung setzen soll. Die Schleusenwehre werden dagegen unmittelbar vor der zu treibenden Maschine angelegt, und durch den Aufstau des Wassers fällt das Wasser mit einer größeren Geschwindigkeit auf die Maschine, wirkt also mit einer größeren lebendigen Kraft. Man pflegt die durch Wehre zu bewirkende *Aufstauung nicht über 2,2 bis 2,5 Meter zu machen*.

Die Wehre werden dadurch gebildet, daß man den natürlichen Strom des Flusses durch irgend ein Hinderniß hemmt. Der zu dem Ende quer durch den Fluß gezogene Damm besteht aus Pfählen oder Steinen und Mauerwerk. Der in Richtung des Stromes gebildete Querschnitt des Wehres hat die Form eines Fünfecks *ABCDE* (Fig. 116), oder bei massiven Wehren rundet man die scharfen Kanten ab, um den Abfluß des Wassers zu erleichtern; die durch *C*

Fig. 116.

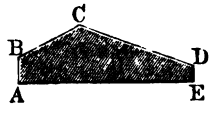
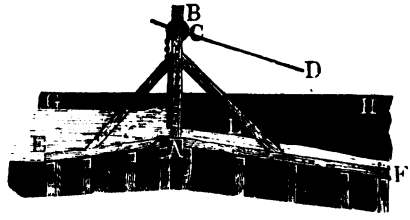


Fig. 117.



gehende oberste Kante des Wehres heißt *Sattelbaum*, *Wehrbaum*, *Fachbaum*, deren Verrückung bei Strafe verboten ist. An dem Wehre ist weiter zu unterscheiden die Sohle *AE*, die Brust *AB*, der Vorherd *BC*, der Abschußboden *CD* und der Rücken *DE*. Bei Schleusenwehren (Fig. 117) ist die Schleuse auf dem Fachbaume *A* angebracht; zwischen den auf dem Fachbaume eingezapften sogenannten *Griessäulen AB* bewegen sich die Schützen in Falzen. Das Aufziehen der Schleusen geschieht durch Hebeladen, durch Zahnstange mit Rad, durch Verbindung einer Schraube mit Zahnrädern u. s. w.

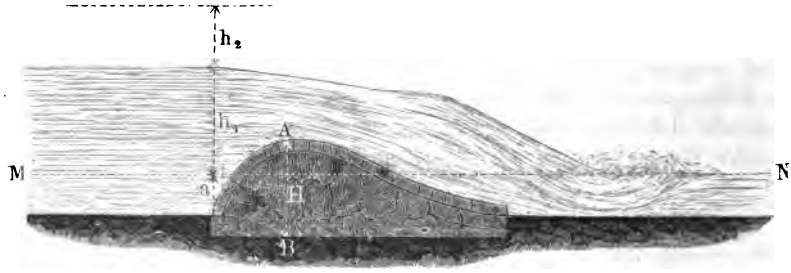
Der Fachbaum bei Ueberfallwehren kann entweder *höher* oder *tiefer* als der ursprüngliche Wasserspiegel gelegt werden. Hiernach unterscheidet man *vollkommene und unvollkommene Ueberfallwehre* oder *Grundwehre*. Die senkrechte Entfernung des *gestauten* Wasserspiegels von dem natürlichen

heißt die Stauhöhe und die senkrechte Entfernung des Fachbaumes von der Sohle des Flusses nennt man die Wehrhöhe.

43 Bei dem vollkommenen Ueberfallwehre (Fig. 118) bezeichne MN den ursprünglichen Wasserspiegel, a die Wassertiefe, H die Wehrhöhe AB, h_1 die Stauhöhe und h_2 die der Geschwindigkeit des Wassers bei der Stauung entsprechende Höhe. Für diese Annahmen läßt sich der Abfluß des Wassers über das Wehr als ein Ausfluß aus der Seitenöffnung eines Gefäßes ansehen. Der oberen Kante dieser Oeffnung entspricht daher die Druckhöhe h_2, für die untere Kante derselben, d. h. für den Fachbaum, ist dagegen die Druckhöhe $a_1 + h_1 + h_2 - H$. Bezeichnen wir die lichte Breite des Wehres mit b, so ist die in einer Secunde ausfließende Wassermenge V n. F. 40:

$$V = {}^2/_3 \mu F \sqrt{2g} \, \frac{(a + h_1 + h_2 - H)^{3/2} - h_2^{3/2}}{a + h_1 + h_2 - H - h_2}.$$

Fig. 118.



Der Querschnitt F der Oeffnung ist aber $b\,(a + h_1 - H)$, deshalb erhalten wir nach Einsetzung dieses Werthes:

$$V = {}^2/_3 \mu b \sqrt{2g}\,[(a + h_1 + h_2 - H)^{3/2} - h_2^{3/2}] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

Aus dieser Gleichung folgt die Druckhöhe über dem Fachbaume:

$$a + h_1 - H = \left(\frac{{}^3/_2\, V}{\mu b \sqrt{2g}} + h_2^{3/2}\right)^{2/3} - h_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

die Stauhöhe:

$$h_1 = \left(\frac{{}^3/_2\, V}{\mu b \sqrt{2g}} + h_2^{3/2}\right)^{2/3} - (h_2 + a - H) \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

die Wehrhöhe:

$$H = h_1 + h_2 + a - \left(\frac{{}^3/_2\, V}{\mu b \sqrt{2g}} + h_2^{3/2}\right)^{2/3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

die Höhe des Fachbaumes über dem ursprünglichen Wasserspiegel MN:

$$H - a = h_1 + h_2 - \left(\frac{{}^3/_2\, V}{\mu b \sqrt{2g}} + h_2^{3/2}\right)^{2/3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

So lange $H - a$ positiv bleibt, ist der Ueberfall ein vollkommener, weshalb für eine zu machende Anlage nur dann ein vollkommenes Ueberfallwehr gebaut werden kann, wenn

$$h_1 + h_2 > \left(\frac{^3/_2\, V}{\mu\, b \sqrt{2g}} + h_2^{3/2}\right)^{2/3}$$

oder

$$V < [(h_1 + h_2)^{3/2} - h_2^{3/2}]\ ^2/_3\, \mu\, b \sqrt{2g}.$$

Der Fachbaum muß dagegen in den ursprünglichen Wasserspiegel gelegt werden, wenn

$$V = [(h_1 + h_2)^{3/2} - h_2^{3/2}]\ ^2/_3\, \mu\, b \sqrt{2g},$$

und es ist die Anlage eines Grundwehres nothwendig, wenn

$$V > [(h_1 + h_2)^{3/2} - h_2^{3/2}]\ ^2/_3\, \mu\, b \sqrt{2g}.$$

Die erhaltenen Formeln vereinfachen sich bedeutend, wenn, wie es gewöhnlich der Fall ist, die Wehrhöhe mehr als 0,6 Meter beträgt. In diesem Falle ist nämlich die Geschwindigkeit des ankommenden Wassers so gering, daß man $h_2 = 0$ setzen darf. Nehmen wir, den Versuchen von Weisbach gemäß, $\mu = 0{,}80$ und setzen $a + h_1 - H$ einfach gleich h, so erhalten wir für ein vollkommenes Ueberfallwehr die überfließende Wassermenge:

$$V = 0{,}533\, b h \sqrt{2gh},$$

die Druckhöhe:

$$h = \left(\frac{V}{0{,}533\, b \sqrt{2g}}\right)^{2/3},$$

die Stauhöhe:

$$h_1 = \left(\frac{V}{0{,}533\, b \sqrt{2g}}\right)^{2/3} - (a - H),$$

die Wehrhöhe

$$H = h_1 + a - \left(\frac{V}{0{,}533\, b \sqrt{2g}}\right)^{2/3},$$

die Bedingung für die Möglichkeit der Anlage eines vollkommenen Ueberfallwehres:

$$V < 0{,}533\, b h_1 \sqrt{2\, g h_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (77)$$

Für die Untersuchungen bei dem Grundwehre (Fig. 119) behalten wir die gemachten Bezeichnungen bei und denken die abfließende Wassermasse V

Fig. 119.

aus den beiden Theilen V_1 und V_2 bestehend, von denen die erstere V_1, die Wassermasse bis zu dem ursprünglichen Wasserspiegel MN ausmacht, also gerade so berechnet werden kann, wie beim vollkommenen Ueberfallwehre. Der zweite Theil V_2 der Wassermasse, zwischen dem ursprünglichen Wasserspiegel MN und dem Fachbaume A gelegen, hat in sämmtlichen Punkten dieselbe Geschwindigkeit, welche der Stauhöhe h_1 entspricht, da die Vermehrung der Druckhöhe in den einzelnen Punkten durch die entsprechende Druckhöhe des Unterwassers wieder aufgehoben wird. Hiernach ist

$$V_1 = {}^2/_3 \mu b \sqrt{2g}\,[(h_1 + h_2)^{3/2} - h_2^{3/2}]$$

$$V_2 = \mu b\,(a - H)\sqrt{2g}\,(h_1 + h_2)^{1/2},$$

und deshalb

$$V = \mu b \sqrt{2g}\,({}^2/_3\,[(h_1 + h_2)^{3/2} - h_2^{3/2}] + (a - H)\,(h_1 + h_2)^{1/2}) \quad (78)$$

Aus der Wassermasse V und der Stauhöhe h_1 ergiebt sich die Höhe des gestauten Wasserspiegels über dem Fachbaume:

$$a - H + h_1 = \frac{V}{\mu b \sqrt{2g\,(h_1 + h_2)}} - {}^2/_3 \frac{(h_1 + h_2)^{3/2} - h_2^{3/2}}{(h_1 + h_2)^{1/2}} + h_1 \quad (79)$$

Weiter ist die Wehrhöhe:

$$H = a + {}^2/_3 \frac{(h_1 + h_2)^{3/2} - h_2^{3/2}}{(h_1 + h_2)^{1/2}} - \frac{V}{\mu b \sqrt{2g\,(h_1 + h_2)}} \quad (80)$$

Die Tiefe des Fachbaumes unter dem ursprünglichen Wasserspiegel MN aber ist:

$$a - H = \frac{V}{\mu b \sqrt{2g\,(h_1 + h_2)}} - {}^2/_3 \frac{(h_1 + h_2)^{3/2} - h_2^{3/2}}{(h_1 + h_2)^{1/2}} \quad (81)$$

So lange dieser Ausdruck positiv bleibt, ist die Anlage eines Grundwehres möglich. Wir kommen dabei zu der schon oben gefundenen Bedingung:

$$V > {}^2/_3 \mu b \sqrt{2g}\,[(h_1 + h_2)^{3/2} - h_2^{3/2}].$$

Nehmen wir hier ebenfalls die Geschwindigkeit des gestauten Wassers gering an, setzen wir also $h_2 = 0$ und μ wieder $= 0{,}80$, so ist für ein Grundwehr die überfließende Wassermasse:

$$V = 0{,}533\, b \sqrt{2gh_1}\,[h_1 + {}^3/_2\,(a - H)],$$

die Bedingung für die Anlage eines Grundwehres:

$$V > 0{,}533\, b h_1 \sqrt{2gh_1},$$

und die Bedingung, daß der Fachbaum gerade in den Wasserspiegel gelegt werden muß,

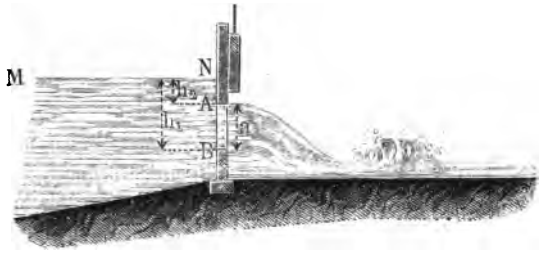
$$V = 0{,}533\, b h_1 \sqrt{2gh_1}.$$

44 Bei einem Schleusenwehr (Fig. 120) habe die rechteckige Schützöffnung AB die Breite b und die Höhe a, der Ausfluß des Wassers finde in freier Luft statt und die Entfernungen der unteren und oberen Kante der Oeffnung vom Wasserspiegel MN, den wir als vollkommen ruhend annehmen, seien h_1 und h_2. Für diese Annahmen ist die Wassermenge n. F. 40:

$$V = {}^2/_3\,\mu\,a\,b\sqrt{2g}\,\frac{h_1^{3/2} - h_2^{3/2}}{h_1 - h_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (82)$$

Nimmt man an, daß in der Mitte der Schutzöffnung die mittlere Geschwindigkeit stattfindet, so kann man als mittlere Druckhöhe $h_1 - \frac{a}{2}$ einführen, und die Wassermasse läßt sich nach der einfacheren Formel:

Fig. 120.



$$V = \mu\,a\,b\sqrt{2g\left(h_1 - \frac{a}{2}\right)}$$

berechnen. Wir setzen hierin h_1 einfach gleich h und haben nun in der Formel nur diejenigen Abmessungen, die sich mit großer Genauigkeit messen lassen. Es ist die Formel

$$V = \mu\,a\,b\sqrt{2g\left(h - \frac{a}{2}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (83)$$

zur Berechnung der zufließenden Wassermasse besonders wichtig, weil sie bei gehöriger Benutzung des Coefficienten μ die genauesten Werthe für die Wassermenge V liefert. Es ist dies aber um so leichter, da gerade für den vorliegenden Fall, wenn nämlich das Wasser durch eine Schützöffung fließt, die meisten Versuche zur Bestimmung von μ angestellt worden sind. Wir wissen nach dem Früheren, daß der Ausflußcoefficient μ ein Product aus dem Geschwindigkeitscoefficienten φ und dem Contractionscoefficienten r ist. Da sich jedoch der Werth von φ nicht wesentlich ändert, so ist die Art der Contraction besonders auf den Ausflußcoefficienten μ von Einfluß.

Kann das Wasser von allen Seiten der Schutzöffnung zufließen, liegt also die untere Kante derselben nicht in dem Boden des Zuführungsgerinnes, so findet auf allen Seiten der Oeffnung Contraction statt, dieselbe ist dann eine *vollständige*. Fließt das Wasser andererseits von einigen Seiten der Oeffnung zu, reicht also dieselbe bis an den Boden oder bis an die Seitenwände des Gerinnes, so findet nur an einigen Seiten der Ausflußöffnung Contraction statt, dieselbe ist dann eine *unvollständige, theilweise, partielle*. Der ausfließende Strahl erhält bei einer *theilweisen* Contraction eine *schiefe Richtung* und die Ausflußmenge wird dabei *größer*.

Nach den hierüber an rechteckigen Oeffnungen angestellten Versuchen sind die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werthe von μ zu benutzen:

Art der Contraction.	Anzahl der Seiten, an welchen Contraction stattfindet.	Werth des Ausfluß-coefficienten μ.
vollständige	4	0,617
theilweise	3	0,642
	2	0,666
	1	0,716
gar keine	0	0,815

Es war bei Herleitung der letzten Formel angenommen worden, daß sich das Wasser unmittelbar vor der Oeffnung in Ruhe befindet. Ist dies nicht der Fall, so müßte, ähnlich wie bei den Ueberfallwehren, die der vorhandenen Geschwindigkeit entsprechende Höhe in Rechnung gebracht werden. Da die Formeln zur Berechnung der Wassermenge V dadurch für den praktischen Gebrauch unbequem werden, so kann man den angestellten Versuchen gemäß bei gehöriger Aenderung des Ausflußcoefficienten μ die oben angegebene Formel

$$V = \mu a b \sqrt{2g\left(h - \frac{a}{2}\right)}$$

in Anwendung bringen. Es hat sich nämlich gezeigt, daß der ausfließende Strahl um so weniger zusammengezogen ist, daß also die ausfließende Wassermenge um so größer wird, je schneller das Wasser der Schutzöffnung zufließt. Es ist hier also bei Anwendung der einfachen Formel eine andere Contraction zu berücksichtigen, die man zum Unterschiede von der früheren unvollkommene genannt hat. Dieselbe findet dann immer statt, wenn der Querschnitt F_1 des Gerinnes wenig größer ist als der Querschnitt F_2 der Schützöffnung. Bezeichnen wir den Ausflußcoefficienten bei vollkommener Contraction (gleichviel ob dieselbe vollständig oder partiell ist) mit μ, den bei unvollkommener mit μ_1 und ist β ein Erfahrungscoefficient, so ist den von Weisbach angestellten Versuchen gemäß:

$$\mu_1 = \mu\,(1 + \beta).$$

Die Größe β von dem Verhältnisse

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\text{Querschnitt der Ausflußöffnung}}{\text{Querschnitt des Gerinnes}}$$

abhängig, findet sich in der folgenden Tabelle:

Wenn $\frac{F_2}{F_1} =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6
ſo iſt $\beta =$	0,019	0,042	0,071	0,107	0,128	0,152	0,178	0,208

Wenn $\frac{F_2}{F_1} =$	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
ſo iſt $\beta =$	0,241	0,278	0,319	0,365	0,416	0,473	0,537	0,608

Aus dem Werthe V für die Waſſermenge erhalten wir die Stauhöhe über der unterſten Kante der Oeffnung:

$$h = \left(\frac{V}{\mu a b \sqrt{2g}}\right)^2 + \frac{a}{2}.$$

Handelt es ſich um eine recht genaue Waſſermeſſung, ſo iſt immer die in dieſem Paragraphen angegebene Methode in Anwendung zu bringen. Die in den früheren Paragraphen gezeigten Verfahren aus der mittleren Geſchwindigkeit des Fluſſes und dem Querſchnitte oder mittelſt eines Ueberfallwehres ſind viel unzuverläſſiger.

Iſt es bei der Anlage von Ueberfallſchützen nicht möglich, den Ausfluß des Waſſers in freier Luft zu erhalten, ſondern erfolgt derſelbe (Fig. 121) vielmehr unter Waſſer, ſo iſt für alle Punkte des ausfließenden Strahles eine conſtante Druckhöhe, die Entfernung $AB = h$ der beiden Waſſerſpiegel vor und hinter der Schutzöffnung CD in Rechnung zu bringen. Wir haben hier unter den obigen Vorausſetzungen die ausfließende Waſſermenge

$$V = \mu a b \sqrt{2gh} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (84)$$

Fig. 121.

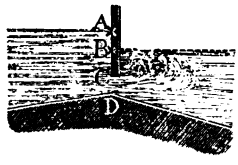
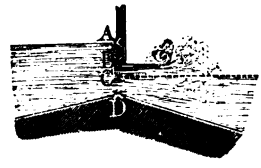


Fig. 122.



Findet der Abfluß des Waſſers durch die Schützöffnung theilweiſe unter Waſſer, theilweiſe in freier Luft (Fig. 122) Statt, ſo iſt die ausfließende Waſſermenge aus zwei Theilen beſtehend zu betrachten, wie bei der Beurtheilung des Grundwehres, wobei dann alſo die beiden Formeln

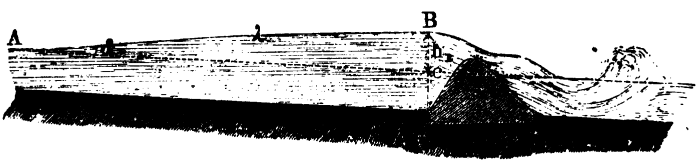
$$\mu a_1 b \sqrt{2g\left(h_1 - \frac{a_1}{2}\right)} \text{ und } \mu a_2 b \sqrt{2gh_2}$$

zur Anwendung kommen. Der Werth von μ ist aus den obigen Angaben zu entnehmen, wobei genau zu berücksichtigen, ob die stattfindende Contraction eine vollständige oder partielle, eine vollkommene oder unvollkommene ist.

45 Die durch ein Wehr erhaltene Stauung kann für Wasserwerke, welche sich oberhalb des Wehres befinden, oder für niedrig gelegene Grundstücke nachtheilig sein, indem bei hohem Wasserstande die ersteren durch das zurückgestaute Wasser einen Widerstand an ihrem Wasserrade erfahren, die letzteren aber von großen Ueberschwemmungen zu leiden haben. Hiernach ist es oft nothwendig, bei Anlage eines Wehres die Höhe des Fachbaumes über dem natürlichen Wasserspiegel in der Weise zu bestimmen, daß die angedeuteten Uebelstände nicht stattfinden können. Es handelt sich also bei einer neuen Anlage, für welche eine bestimmte Stauhöhe angenommen wird, um die Entfernung, bis zu welcher sich die Stauung rückwärts erstreckt, um die sogenannte Stauweite. Wenn man für die Oberfläche des gestauten Wasserspiegels bestimmte Annahmen macht, so handelt es sich bei der Berechnung der Stauweite um den Durchschnitt dieser Oberfläche mit dem vor der Stauung vorhandenen Wasserspiegel, oder, wenn man die Durchschnittslinie zwischen einer Verticalebene und der Oberfläche des gestauten Wassers die Staucurve nennt, so ist der Durchschnittspunkt derselben mit der Stromlinie des ungestauten Wassers zu bestimmen.

In dieser Weise ist die Stauweite mehrfach bestimmt worden, je nachdem man für die Staucurve eine gerade horizontale, eine gegen den Horizont geneigte gerade Linie, einen Kreisbogen oder einen Parabelbogen angenommen hat. Für die erste Annahme, wenn also die Staucurve AB (Fig. 123) als eine gerade horizontale Linie angesehen wird, ergiebt sich die einfachste Relation zwischen der Stauhöhe $BC = h_1$ und der Stauweite

Fig. 123.



$AB = \lambda$. Bezeichnet wieder δ den Abhang des ursprünglichen Wasserspiegels oder der Flußsohle, so ist die Stauweite:

$$\lambda = h_1 \, cotg \, \delta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (85)$$

Zur Bestimmung von δ dient §. 63:

$$sin \, \delta = \frac{h}{l},$$

unter h das ursprüngliche Gefälle auf die Länge l verstanden. Für eine gleichförmige Bewegung des Wassers im Flußbette haben wir n. §. 65a:

$$h = \zeta \, \frac{V^2}{2g} \, \frac{l u}{F^3}.$$

Hieraus folgt:

$$\sin^2\delta = \frac{h}{l} = \zeta \frac{V^2}{2g} \frac{u}{F^3}.$$

und da

$$\operatorname{cotg}\delta = \frac{\sqrt{1 - \sin\delta^2}}{\sin\delta}$$

ist, so ergiebt sich für die Stauweite λ die Gleichung:

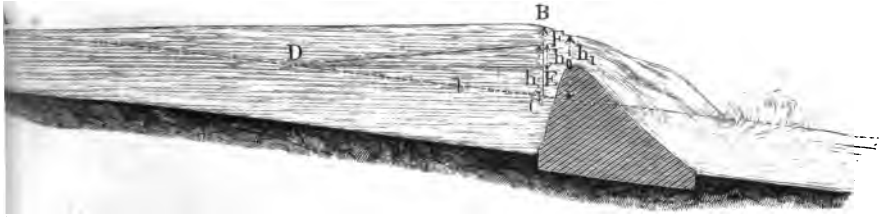
$$\lambda = h_1 \frac{\sqrt{1 - \left(\zeta \frac{V^2}{2g} \frac{u}{F^3}\right)^2}}{\zeta \frac{V^2}{2g} \frac{u}{F^3}}$$

$$\lambda = h_1 \sqrt{\left(\frac{2g\,F^3}{\zeta\,V^2 u}\right)^2 - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (86)$$

Führen wir die Rechnung auch für die zweite Voraussetzung durch, daß die Staucurve AB (Fig. 124) nämlich eine gegen den Horizont geneigte gerade Linie ist. Zu dem Ende ziehen wir von dem beliebigen Punkte D eine Parallele DE zur Staucurve und eine Horizontale DF. Es ist dann FC das Gefälle h für den ursprünglichen Wasserspiegel und FE das Gefälle h_0 für die Stauung auf die Länge $DC = l$. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke DEC und ABC folgt:

$$EC : BC = DC : AC$$

Fig. 124.



Für EC setzen wir die Differenz $h - h_0$ der Gefälle, BC ist die Stauhöhe h_1, DC ist $= l$ und für AC läßt sich annähernd die Stauweite λ setzen.

Hiernach erhalten wir aus der obigen Proportion:

$$\lambda = \frac{h_1 l}{h - h_0}$$

oder

$$\lambda = \frac{h_1}{\frac{h}{l} - \frac{h_0}{l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (87)$$

Nach der oben citirten Formel ist

$$\frac{h}{l} = \xi \frac{V^2}{2g} \frac{u}{F^3},$$

und

$$\frac{h_0}{l} = \xi \frac{V^2}{2g} \frac{u_0}{F_0^3},$$

unter u und F den benetzten Umfang und Querschnitt des Flusses vor der Stauung, unter u_0 und F_0 die entsprechenden Werthe unmittelbar vor dem Wehre nach erfolgter Stauung des Wassers verstanden.

Substituiren wir diese Werthe in dem oben erhaltenen Ausdrucke für die Stauweite λ, so erhalten wir:

$$\lambda = \frac{2gh_1}{\xi V^2 \left(\frac{u}{F^3} - \frac{u_0}{F_0^3}\right)}.$$

Nach den Versuchen von du Buat muß man, um der wirklichen Stauweite näher zu kommen, diesen entwickelten Werth mit 1,9 multipliciren. Hiernach ist für diese zweite Annahme:

$$\lambda = \frac{1{,}9 \,.\, 2g\, h_1}{\xi V^2 \left(\frac{u}{F^3} - \frac{u_0}{F_0^3}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (88)$$

Für zwei verschiedene Stauhöhen h_1 und h_2 seien die Stauweiten λ_1 und λ_2. Bei Benutzung von §. 86 haben wir:

$$\lambda_1 = h_1 \sqrt{\left(\frac{2g\, F_1^3}{\xi\, V^2\, u_1}\right)^2 - 1}$$

$$\lambda_2 = h_2 \sqrt{\left(\frac{2g\, F_2^3}{\xi\, V^2\, u_2}\right)^2 - 1}.$$

Hieraus folgt:

$$\lambda_2 = \frac{h_2}{h_1} \lambda_1 \sqrt{\frac{\left(\frac{2g\, F_2^3}{\xi\, V^2\, u_2}\right)^2 - 1}{\left(\frac{2g\, F_1^3}{\xi\, V_2\, u_1}\right)^2 - 1}},$$

und bei Vernachlässigung der Summanden 1 unter den Wurzeln:

$$\lambda_2 = \frac{h_2}{h_1} \frac{F_2^3\, u_1}{F_1^3\, u_2} \cdot \lambda_1.$$

Bezeichnet b die Breite des Flusses, so ist die durch Vergrößerung der Stauhöhe vermehrte aufgestaute Wassermasse W:

$$W = {}^1/_2\, \lambda_2\, h_2\, b - {}^1/_2\, \lambda_1\, h_1\, b$$

$$W = {}^1/_2\, b\, \lambda_2 \left(h_2 - \frac{h_1^2}{h_2} \frac{F_1^3\, u_2}{F_2^3\, u_1}\right) \quad \ldots\ldots \quad (89)$$

worin noch nach §. 40

$$F_2 = F_1 + b\,(a_2 - a_1)$$

und

$$u_2 = u_1 + 2\,\frac{a_2 - a_1}{\sin\vartheta}$$

gesetzt werden kann.

Die in §. 38 abgeleitete Formel 69 läßt sich unter der dort gemachten 46
Voraussetzung, daß die Flußstrecke verhältnißmäßig klein gewählt werde, ebenfalls zur Berechnung der Stauweite λ benutzen, ohne über die Form der Staucurve eine bestimmte Voraussetzung zu machen. Verstehen wir in der Formel

$$l = (a_1 - a_2)\,\frac{1 - \frac{v_1^2}{2g}\,\frac{2}{a_1}}{\xi\,\frac{u}{a_1 b}\,\frac{v_1^2}{2g} - \sin\delta}$$

unter a_1 die Tiefe des Wassers unmittelbar am Wehre und unter a_2 die Tiefe in einer kleinen Entfernung stromaufwärts vom Wehre, so ist dadurch der früheren Voraussetzung zufolge die Bezeichnung a_1 und a_2 umgekehrt worden, weshalb auch der Nenner des obigen Ausdrucks entgegengesetzt zu nehmen ist, um positive Werthe für l zu erhalten. Es ist hiernach, wenn wir noch $u = u_1$, $b = b_1$ setzen, um damit anzudeuten, daß diese Angaben sich auf die Stelle des Flusses unmittelbar am Wehre beziehen,

$$l = (a_1 - a_2)\,\frac{1 - \frac{v_1^2}{2g}\,\frac{2}{a_1}}{\sin\delta - \xi\,\frac{u_1}{a_1 b_1}\,\frac{v_1^2}{2g}},$$

und hieraus die einer angenommenen Länge l_1 stromaufwärts entsprechende Tiefenabnahme:

$$a_1 - a_2 = \frac{\sin\delta - \xi\,\frac{u_1}{a_1 b_1}\,\frac{v_1^2}{2g}}{1 - \frac{v_1^2}{2g}\,\frac{2}{a_1}}\,l_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (90)$$

Gehen wir von dem erhaltenen Punkte l_2 Längeneinheiten weiter, so ergiebt sich ebenso:

$$a_2 - a_3 = \frac{\sin\delta - \xi\,\frac{u_2}{a_2 b_2}\,\frac{v_2^2}{2g}}{1 - \frac{2}{a_2}\,\frac{v_2^2}{2g}}\,l_2.$$

Fährt man in derselben Weise fort, so läßt sich für eine gegebene Entfernung $l_1 + l_2 + l_3 + \cdots$ nach und nach die Tiefenabnahme in dem Flusse berechnen, und umgekehrt aus den stationsweise gemessenen Tiefenabnahmen läßt sich die Entfernung vom Wehre angeben. Geht man hierbei so weit zurück, daß die Differenz der Tiefen $a_n - a_{n+1}$ von zwei aufeinanderfolgenden Stationspunkten Null oder verschwindend klein wird, so ist die Summe

$$l_1 + l_2 + l_3 + \cdots l_n = \Sigma l_n$$

gleich der geſuchten Stauweite λ. Hiernach haben wir für die Stauweite λ die Gleichung:

$$\lambda = \Sigma l_n = \Sigma \left((a_n - a_{n+1}) \frac{1 - \frac{2}{a_n} \frac{v_n^2}{2g}}{\sin \delta - \zeta \frac{u_n}{a_n b_n} \frac{v_n^2}{2g}} \right) \quad . \quad . \quad (91)$$

Benutzt man die Längen l_1, $l_1 + l_2$, $l_1 + l_2 + l_3$ u. ſ. w. als Abſciſſen, die Tiefen aber als die zugehörigen Ordinaten, ſo geben die nach §. 90 gebildeten Ausdrücke die Gleichungen der Staucurve zwiſchen den einzelnen Stationspunkten, deren Eigenſchaften ſich deshalb aus der angegebenen Formel beſtimmen laſſen. Nimmt man hierbei die Entfernungen l_1, l_2 . . . unendlich klein, ſo läßt ſich mit Hülfe der höheren Analyſis ein genauerer Werth für die Stauweite λ berechnen.

Uebungen.

1. Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit des fließenden Wassers in einem Canale, dessen Querschnitt 3,424 □^{m} ist und bei dem die in einer Secunde abgeführte Wassermenge 4,573 Kubikmeter beträgt?

$$V = F\,v$$

$$v = 1{,}33^m.$$

2. Das Wasser bewegt sich in einem Graben mit 0,8^m Geschwindigkeit, und dabei werden in jeder Secunde 2,4 Kubikm. Wasser abgeführt. Welchen Querschnitt hat der Graben?

$$F = 3\,\square^m.$$

3. Wie groß ist die in einer Secunde in einem Canale abfließende Wassermenge, dessen Querschnitt 4,9 □^{m} beträgt, wenn die mittlere Geschwindigkeit des Wassers 1,3^m ist?

$$V = 6{,}37 \text{ Kubikm.}$$

4. Ein Bach hat auf eine Länge von 126^m ein Gefälle von 0,5^m. Der mittlere benetzte Umfang sei 4,4^m, der obere Querschnitt F_1 habe 3 □^{m}, der untere F_2, 2 □^{m} Inhalt.

Wie groß ist die in einer Secunde abgeführte Wassermenge?

Wie groß ist der Abhang der Sohle, wenn die mittlere constante Breite des Baches zu 1,3^m angenommen wird?

Wie groß sind die Geschwindigkeiten v_1, v_0, v_2 für den oberen mittleren und unteren Querschnitt?

Dem Gefälle von 0,5^m entspricht eine mittlere Geschwindigkeit c, die sich aus der Formel $c^2 = 2gh$ bestimmt. Wir erhalten hieraus:

$$c = \sqrt{2g \,.\, 0{,}5} = 3{,}13^m,$$

weshalb der Widerstandscoefficient ξ nach §. 41, gleich 0,00755 gesetzt werden muß. Die abgeführte Wassermenge V, n. F. 66 ist:

$$V = \frac{\sqrt{2g \,.\, 0{,}5}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 0{,}00755\,\frac{126\,.\,4{,}4}{\left(\frac{5}{2}\right)^3}}} = 4{,}9 \text{ Kubikm.}$$

Weiter ist n. F. 63:

$$\sin \delta = \frac{h}{l} = \frac{0{,}5}{126}$$

$$\delta = 0^0\ 13'\ 40''$$

$$V = F_1\, v_1 = F_0\, v_0 = F_2\, v_2$$

$$v_1 = \frac{4{,}9}{3} = 1{,}63^{\mathrm{m}}$$

$$v_0 = \frac{4{,}9\,.\,2}{5} = 1{,}96^{\mathrm{m}}$$

$$v_2 = \frac{4{,}9}{2} = 2{,}45^{\mathrm{m}}.$$

In gleicher Weise ist:

$$V = a_1\, b\, v_1 = a_2\, b\, v_2$$

$$a_1 = \frac{4{,}9}{1{,}3 \cdot 1{,}63} = 2{,}31^{\mathrm{m}}$$

$$a_2 = \frac{4{,}9}{1{,}3 \cdot 2{,}45} = 1{,}54^{\mathrm{m}}.$$

Der Tiefenunterschied ist hiernach:

$$a_1 - a_2 = 0{,}77^{\mathrm{m}}.$$

5. Ein Bach, der eine mittlere constante Breite von $3{,}14^{\mathrm{m}}$ hat, und dessen Tiefe sich bei 94^{m} Länge ändert, führt in der Secunde 15 Kubikmeter Wasser ab. Wie groß ist das Gefälle des Baches auf dieser Länge, wenn der obere Querschnitt $6\,\square^{\mathrm{m}}$, der untere $4{,}5\,\square^{\mathrm{m}}$ Inhalt hat, und der mittlere benetzte Umfang $9{,}4^{\mathrm{m}}$ beträgt?

Welche Tiefe hat der Canal am oberen und unteren Querschnitt?

$$h = 0{,}712^{\mathrm{m}}$$

$$a_1 = 1{,}92^{\mathrm{m}},$$

$$a_2 = 1{,}44^{\mathrm{m}}.$$

6. Welche Wassermenge liefert ein Bach, dessen mittlere Breite $1{,}9^{\mathrm{m}}$, dessen mittlere Tiefe $1{,}6^{\mathrm{m}}$ und dessen benetzter Umfang 3^{m} beträgt, wenn der Bach auf 47^{m} Länge ein Gefälle von $0{,}1^{\mathrm{m}}$ hat?

$$V = \frac{\sqrt{2g\,.\,0{,}1}}{\sqrt{0{,}008\,\frac{47\,.\,3}{(1{,}9\,.\,1{,}6)^3}}} = 6{,}99 \text{ Kubikmeter.}$$

7. Ein Canal, dessen Querschnitt ein Paralleltrapez ist, habe eine mittlere Tiefe von $1{,}4^{\mathrm{m}}$, die untere parallele Seite des Querschnitts sei $0{,}9^{\mathrm{m}}$, die obere 3^{m} lang. Welches Gefälle ist dem Canale auf 314^{m} Länge zu geben, damit er in einer Secunde 7,5 Kubikmeter Wasser fortführe?

$$h = 0{,}008\,\frac{7{,}5^2}{2g} \cdot \frac{314\,.\,4{,}4}{2{,}73^3} = 1{,}56^{\mathrm{m}}.$$

8. Es ist ein Canal von 94^m Länge anzulegen, welcher bei einem Gefälle von $0{,}157^m$ in jeder Secunde 3,9 Kubikm. Wasser fortführt. Wie sind die Abmessungen des zweckmäßigsten Querschnitts zu nehmen, der die Form eines Paralleltrapezes erhalten soll, wenn das Erdreich aus fester Erde besteht?

Es ist nach §. 39:

$$h = \zeta \frac{V^2}{2g} \frac{lu}{F^3}$$

$$0{,}157 = 0{,}008 \frac{3{,}9^2}{2g} \frac{94 . u}{F^3}$$

und hieraus

$$\frac{F^3}{u} = 3{,}713.$$

Für den zweckmäßigsten Querschnitt ist

$$u = x + 2y \text{ (siehe §. 39)}$$

$$u = \frac{2}{\sin\vartheta} \sqrt{F (2 - \cos\vartheta) . \sin\vartheta},$$

worin ϑ nach der Tabelle in §. 41 in Bezug auf die Aufgabe gleich $33^0\ 40'$ zu setzen ist,

$$u = 2{,}9 \sqrt{F}$$

und

$$\frac{F^3}{u} = \frac{\sqrt{F^6}}{2{,}9 \sqrt{F}} = 3{,}713$$

$$\sqrt{F^5} = 2{,}9 . 3{,}713$$

$$F = 2{,}59 \square \text{Meter}.$$

Die untere Breite des Querschnitts ist:

$$x = 2 \frac{1 - \cos\vartheta}{\sin\vartheta (2 - \cos\vartheta)} \cdot \sqrt{F \sin\vartheta (2 - \cos\vartheta)}$$

$$x = 0{,}671^m.$$

Die Länge der Böschung:

$$y = \sqrt{\frac{F}{\sin\vartheta (2 - \cos\vartheta)}}$$

$$y = 2^m.$$

Die Tiefe des Flußbettes:

$$z = \sqrt{\frac{F \sin\vartheta}{2 - \cos\vartheta}}$$

$$z = 1{,}11^m.$$

Die Geschwindigkeit v des fließenden Wassers ist:

$$v = \frac{3{,}9}{2{,}59} = 1{,}5^m.$$

9. Wenn das Wasser in dem der vorigen Aufgabe entsprechenden Flußbette um $0{,}065^m$ steigt, wie groß ist dann die Geschwindigkeit des Wassers und die in einer Secunde abgeführte Wassermasse?

Die gesuchten Geschwindigkeiten und Wassermengen bezeichnen wir mit v_1 und V_1. Es ist nach §. 40:

$$\frac{v_1}{v} = \sqrt{\frac{F_1}{F}} \cdot \sqrt{\frac{u}{u_1}},$$

worin

$$F_1 = F + b\,(a_1 - a)$$

und

$$u_1 = u + \frac{2\,(a_1 - a)}{\sin\vartheta}$$

gesetzt wird. Es ist:

$$b = x + 2y\cos\vartheta = 4^m$$

$$F_1 = 2{,}59 + 4 \cdot 0{,}065 = 2{,}85\,\square^m$$

$$u = x + 2y = 4{,}671^m$$

$$u_1 = 4{,}671 + \frac{2 \cdot 0{,}065}{\sin\vartheta}$$

$$= 4{,}904$$

$$v_1 = 1{,}5\sqrt{\frac{2{,}85 \cdot 4{,}671}{2{,}59 \cdot 4{,}904}} = 1{,}54^m$$

$$V_1 = V\,\frac{F_1}{F}\sqrt{\frac{F_1}{F}}\sqrt{\frac{u}{u_1}}$$

$$V_1 = 3{,}9\,\frac{2{,}85}{2{,}59}\sqrt{\frac{2{,}85 \cdot 4{,}671}{2{,}59 \cdot 4{,}904}} = 4{,}39 \text{ Kubikmeter.}$$

10. Ein Canal mit trapezförmigem Querschnitt hat eine untere Breite von $1{,}5^m$, eine obere Breite von 3^m, eine mittlere Tiefe von $1{,}3^m$ und führt in der Secunde 3 Kubikmeter ab. Wie groß ist das Gefälle für 628^m Länge?

Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit?

Wie groß ist aber die Tiefe des Canals, wenn plötzlich eine Vermehrung der Wassermasse von 0,9 Kubikmeter pro Secunde entsteht?

Wie groß ist in diesem Falle die mittlere Geschwindigkeit?

Es ist $F = 2{,}925\,\square^m$, $u = 4{,}5^m$

$$h = \xi\,\frac{V^2}{2g} \cdot \frac{l\,u}{F^3}$$

$$h = 0{,}008\,\frac{3^2}{2g}\,\frac{628 \cdot 4{,}5}{2{,}925^3} = 0{,}414^m$$

$$= \frac{3}{2{,}925} = 1{,}03^m$$

$$\frac{V_1}{V} = \frac{a_1}{a}\sqrt{\frac{a_1}{a}}$$

$$a_1 = 1{,}55^{\text{m}}$$

$$v_1 = v\sqrt{\frac{a_1}{a}}$$

$$= 1{,}124^{\text{m}}.$$

11. Ein Fluß von $6{,}3^{\text{m}}$ Breite und $1{,}3^{\text{m}}$ Tiefe soll $1{,}1^{\text{m}}$ hoch aufgestaut werden. Welche Höhe erhält das Wehr, wenn in jeder Secunde 9 Kubikmeter Wasser abgeführt werden?

Wir haben n. F. 77 die Wassermasse V mit dem Ausdruck

$$0{,}533\ b\ h_1\sqrt{2gh_1}$$

zu vergleichen, wodurch sich bestimmen läßt, ob das anzulegende Wehr als ein vollkommenes oder als ein Grundwehr angelegt werden muß. Es ist

$$0{,}533\ .\ 6{,}3\ .\ 1{,}1\sqrt{2g\ .\ 1{,}1} = 17{,}14 \text{ Kubikmeter.}$$

Da $V = 9$ kleiner als 17,14 Kubikmeter ist, so muß das Wehr ein vollkommenes Ueberfallwehr werden. Die Wehrhöhe H ist:

$$H = h_1 + a - \left(\frac{V}{0{,}533\ b\sqrt{2g}}\right)^{2/3}$$

$$H = 2{,}4 - 0{,}715$$

$$H = 1{,}685^{\text{m}}.$$

12. Welche Höhe erhält das Wehr, wenn in dem vorigen Beispiele die Stauhöhe $0{,}47^{\text{m}}$ betragen soll?

Es ist $0{,}533\ .\ 6{,}3\ .\ 0{,}47\sqrt{2g\ .\ 0{,}47} = 4{,}78$ kleiner als die abzuführende Wassermasse V, das Wehr muß deshalb ein Grundwehr sein. Die Wehrhöhe ist:

$$H = a + \tfrac{2}{3}\frac{(h_1 + h_2)^{3/2} - h_2^{3/2}}{(h_1 + h_2)^{1/2}} - \frac{V}{\mu\, b\sqrt{2g\,(h_1 + h_2)}}.$$

In diesem Ausdruck ist noch die Geschwindigkeitshöhe h_2 unbekannt, die sich aus dem Querschnitt des Flußbettes $b\,(a + h_1)$ der abzuführenden Wassermasse V und der mittleren Geschwindigkeit v_0 bestimmen läßt.

Es ist

$$b\,(a + h_1)\,v_0 = V$$

und

$$2gh_2 = v_0^2,$$

daher:

$$h_2 = \frac{1}{2g}\left(\frac{V}{b\,(a + h_1)}\right)^2$$

$$h_2 = 0{,}033^{\text{m}}.$$

Nach Einsetzung dieses Werthes erhalten wir, wenn wieder $\mu = 0{,}80$ genommen wird:

$$H = 1{,}3 + {}^2/_3 \frac{\sqrt{0{,}503^3} - \sqrt{0{,}033^3}}{\sqrt{0{,}503}} - \frac{9}{0{,}80 \,.\, 6{,}3\sqrt{2g} \,.\, 0{,}503}$$
$$= 1{,}06^{\mathrm{m}},$$

d. h. der Fachbaum liegt um $0{,}24^{\mathrm{m}}$ tiefer als der ursprüngliche Wasserspiegel.

13. Welche Wassermasse fließt in einer Secunde über ein vollkommenes Ueberfallwehr, vor welchem das Wasser $1{,}73^{\mathrm{m}}$ aufgestaut ist? Die Wassertiefe sei $2{,}04^{\mathrm{m}}$, die Breite des Flusses $9{,}4^{\mathrm{m}}$, die Wehrhöhe $2{,}5^{\mathrm{m}}$ und die Geschwindigkeit des Wassers unmittelbar vor dem Wehre $0{,}204^{\mathrm{m}}$.

Es ist die der Geschwindigkeit $0{,}204^{\mathrm{m}}$ entsprechende Höhe:

$$h_2 = \frac{0{,}204^2}{2g} = 0{,}0021^{\mathrm{m}},$$

und die in einer Secunde abfließende Wassermasse:

$$V = {}^2/_3 \mu b \sqrt{2g}\left(\sqrt{(a + h_1 + h_2 - H)^3} - \sqrt{h_2^3}\right)$$
$$V = {}^2/_3 \, 0{,}80 \,.\, 9{,}4 \sqrt{2g} \,.\, (\sqrt{1{,}272^3} - \sqrt{0{,}0021^3}) = 31{,}85 \text{ Kubikmeter.}$$

14. Welche Wassermasse fließt in jeder Secunde durch eine Schützöffnung von $1{,}9^{\mathrm{m}}$ Breite und $0{,}95^{\mathrm{m}}$ Höhe, wenn die Entfernung der unteren Kante der Oeffnung von dem Wasserspiegel $1{,}2^{\mathrm{m}}$ ist und der Ausfluß in freier Luft stattfindet?

$$V = \mu a b \sqrt{2g\left(h - \frac{a}{2}\right)}$$
$$= 0{,}617 \,.\, 0{,}95 \,.\, 1{,}9 \sqrt{2g \,.\, 0{,}725}$$
$$= 4{,}2 \text{ Kubikmeter.}$$

15. Wie groß ist die Ausflußmenge im vorigen Beispiel, wenn der Ausfluß unter Wasser stattfindet und die Entfernung der Wasserspiegel vor und hinter der Schützöffnung $0{,}013^{\mathrm{m}}$ beträgt?

$$V = \mu a b \sqrt{2gh}$$
$$= 0{,}617 \,.\, 0{,}95 \,.\, 1{,}9 \sqrt{2g \,.\, 0{,}013}$$
$$= 0{,}562 \text{ Kubikmeter.}$$

16. Wie groß ist die Wassermasse, wenn das Unterwasser in dem Beispiel Nro. 14 bis auf $^3/_4$ der Höhe die Schützöffnung erfüllt?

$$V = \mu a_1 b \sqrt{2g\left(h_1 - \frac{a_1}{2}\right)} + \mu a_2 b \sqrt{2gh_2}$$

$$V = \mu b \sqrt{2g}\left(a_1 \sqrt{h_1 - \frac{a_1}{2}} + a_2 \sqrt{h_2}\right)$$
$$= 0{,}617 \,.\, 1{,}9 \sqrt{2g}\ (0{,}2375 \,.\, \sqrt{0{,}369} + 0{,}713 \sqrt{0{,}488})$$
$$= 3^1/_3 \text{ Kubikmeter.}$$

17. Wie hoch ist eine $3{,}2^{\mathrm{m}}$ breite Schleuse aufzuziehen, damit in jeder Secunde 8 Kubikmeter Wasser frei abfließen, wenn der Wasserstand über der unteren Kante 2^{m} beträgt?

$$8 = 0{,}617 \,.\, a \,.\, 3{,}2 \sqrt{2g} \sqrt{2 - \frac{a}{2}}$$

$$a^3 - 4a^2 = -1{,}674$$

$$a = 0{,}719^{\text{m}}.$$

18. Wie hoch ist die Schütze im vorigen Beispiele aufzuziehen, wenn der Abfluß unter Wasser stattfindet und die Entfernung der Wasserspiegel $0{,}94^{\text{m}}$ beträgt?

$$8 = 0{,}617 \,.\, a \,.\, 3{,}2 \sqrt{2g \,.\, 0{,}94}$$

$$a = 0{,}944^{\text{m}}.$$

19. In einem 13^{m} breiten und $1{,}9^{\text{m}}$ tiefen Flusse, welcher in jeder Secunde 25 Kubikmeter Wasser abführt, soll ein Wehr eingebaut werden, um das Wasser $0{,}94^{\text{m}}$ hoch aufzustauen. Welche Höhe erhält das Wehr?

Wie groß ist die Stauweite?

Wie groß ist die aufgestaute Wassermasse?

Wenn der Besitzer des Wasserwerkes das Wehr unbefugter Weise $0{,}16^{\text{m}}$ höher baut, wie ändern sich dann Stauhöhe, Stauweite, aufgestaute Wassermasse?

Ein vollkommenes Ueberfallwehr ist durch Formel 75

$$V < 0{,}533\, b\, h_1 \sqrt{2gh_1}$$

bedingt. Es ist aber für die obigen Annahmen:

$0{,}553\, b \,.\, h_1 \sqrt{2gh_1} = 0{,}533 \,.\, 13 \,.\, 0{,}94 \,.\, \sqrt{2g \,.\, 0{,}94} = 27{,}97$ Kubikmeter.

Da der Ausdruck größer als die vom Flusse abzuführende Wassermasse, 25 Kubikmeter, ist, so muß ein vollkommenes Ueberfallwehr angelegt werden. Die Wehrhöhe H ist, von der Geschwindigkeit vor dem Wehre abgesehen,

$$H = h_1 + a - \left(\frac{V}{0{,}533\, b \sqrt{2g}}\right)^{2/3}$$

$$H = 2{,}84 - \left(\frac{25}{0{,}533 \,.\, 13 \sqrt{2g}}\right)^{2/3}$$

$$H = 1{,}97^{\text{m}}.$$

Zur Bestimmung der Stauweite λ gebrauchen wir den Querschnitt F und den benetzten Umfang u des Flusses unmittelbar vor dem Wehre. Nehmen wir den Böschungswinkel $\vartheta = 45^0$, so ist die Breite des Flußbettes auf dem Boden $13 - 3{,}8 = 9{,}2^{\text{m}}$, die auf dem Wasserspiegel $9{,}2 + 5{,}68 = 14{,}88^{\text{m}}$, daher:

$$F = \frac{9{,}2 + 15}{2} \cdot 2{,}84 = 34{,}4\,\square^{\text{m}}$$

$$u = 9{,}2 + 5{,}68\sqrt{2} = 17{,}2^{\text{m}},$$

und die Stauweite n. F. 86:

$$\lambda = h_1 \sqrt{\left(\frac{2gF^3}{\zeta V^2 u}\right)^2 - 1}, \text{ worin wir } \zeta = 0{,}007 \text{ setzen,}$$

$$\lambda = 0{,}94 \sqrt{\left(\frac{2g \,.\, 34{,}4^3}{0{,}007 \,.\, 25^2 \,.\, 17{,}2}\right)^2 - 1}$$

$$\lambda = 9876^{\mathrm{m}}.$$

Nach Formel 88 erhalten wir die Stauweite, wenn wir F_0 und u_0 gleich den eben benutzten Werthen setzen, für u und F aber diejenigen nehmen, die dem Flußbette vor der Stauung entsprechen:

$$\lambda = \frac{1{,}9 \,.\, 2g\, h_1}{\xi\, V^2 \left(\frac{u}{F^3} - \frac{u_0}{F_0^3}\right)}$$

$$u_0 = 17{,}2^{\mathrm{m}};\ F_0 = 34{,}4\,\square^{\mathrm{m}},$$

$$u = 9{,}2 + 3{,}8\sqrt{2} = 14{,}6^{\mathrm{m}}$$

$$F = \frac{9{,}2 + 13}{2} \cdot 1{,}9 = 21{,}1\,\square^{\mathrm{m}}$$

$$\lambda = \frac{1{,}9 \,.\, 2g \,.\, 0{,}94}{0{,}007 \,.\, 25^2 \left(\frac{14{,}6}{21{,}1^3} - \frac{17{,}2}{34{,}4^3}\right)} = 7100^{\mathrm{m}}.$$

Die aufgestaute Wassermasse W ist, wenn wir den ersten Werth der Stauweite benutzen,

$W = {}^1/_2\, \lambda\, h_1\, b$, unter b die mittlere Breite verstanden,

$$= {}^1/_2 \,.\, 9867 \,.\, 0{,}94\ \frac{13 + 15}{2} = 65000 \text{ Kubikmeter.}$$

Wird das Wehr um $0{,}16^{\mathrm{m}}$ erhöht, so ist die Wehrhöhe:

$$H' = 2{,}13^{\mathrm{m}},$$

die Stauhöhe:

$$h'_1 = \left(\frac{V}{0{,}533\ b\ \sqrt{2g}}\right)^{2/3} + H' - a$$

$$= 0{,}87 + 2{,}13 - 1{,}9 = 1{,}1^{\mathrm{m}},$$

die Stauweite annähernd, indem wir die Veränderung von F_0 und u_0 unberücksichtigt lassen,

$$\lambda' = 8976 \cdot \frac{1{,}1}{0{,}94}$$

$$= 11557^{\mathrm{m}},$$

die dabei aufgestaute Wassermasse:

$$W' = {}^1/_2 \,.\, 11557 \,.\, 1{,}1 \,.\, 14$$

$$W' = 89000 \text{ Kubikmeter,}$$

die durch unbefugte Erhöhung des Wehres aufgestaute Wassermasse deshalb:

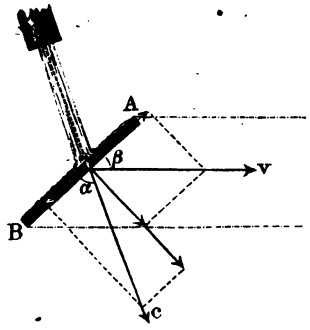
$$W' - W = 24000 \text{ Kubikmeter.}$$

20. Stellt sich dem fließenden Wasser ein Widerstand entgegen, so übt das Wasser gegen denselben einen Stoß aus. Der Stoß des Wassers ist in-

sofern von dem Stoße fester Körper verschieden, als bei dem festen Körper nur eine einmalige Einwirkung zu erkennen ist, bei dem Wasser dagegen der Stoß durch sehr viele Massentheilchen in ununterbrochener Folge hervorgerufen wird, weshalb der Wasserstoß mit dem hydraulischen Druck (§. 28) vollkommen übereinstimmend ist. Ist der Inhalt der Widerstand leistenden Fläche bedeutend größer als der Querschnitt des dagegen stoßenden Wasserstrahles, so wird der Stoß durch einen isolirten Wasserstrahl hervorgerufen.

Andererseits unterscheidet man den Stoß im begrenzten Wasser in einem Gerinne und den Stoß im unbegrenzten Wasser in einem Flusse. Das in die Zellen eines oberschlächtigen Wasserrades eintretende Wasser liefert ein Beispiel zum Stoße isolirter Strahlen. Die Schaufeln eines oberschlächtigen Wasserrades erleiden einen Stoß im begrenzten Wasser, und die Schaufeln der Räder von Dampfbooten, von Schiffsmühlen haben den Stoß im unbegrenzten Wasser auszuhalten. Außerdem ist die Größe des Wasserstoßes noch davon abhängig, ob der sich entgegenstellende Widerstand in Ruhe oder in Bewegung ist, ob das Wasser den Widerstand normal oder schief trifft.

Fig. 125.



Der aus der Oeffnung O (Fig. 125) ausfließende Strahl treffe das Hinderniß AB mit der Geschwindigkeit c unter dem Winkel α, während dasselbe unter dem Winkel β mit der Geschwindigkeit v ausweicht. Da die zur Fläche AB normal gerichteten Componenten allein auf den Stoß Einfluß haben, so zerlege man die Geschwindigkeiten c und v nach Richtung der Fläche AB und normal dazu. Die Geschwindigkeit des Wassers $c \sin \alpha$ normal zur Fläche muß auf die Geschwindigkeit $v \sin \beta$ gebracht werden. Geht diese Umsetzung allmälig vor sich und bezeichnen wir die in einer Secunde zufließende Wassermasse mit Q, so ist die der Geschwindigkeitsänderung entsprechende Arbeitstärke:

$$\tfrac{1}{2} \frac{Q\gamma}{g} (c^2 \sin \alpha^2 - v^2 \sin \beta^2).$$

Der durch die plötzliche Aenderung in der Geschwindigkeit hervorgerufene Stoß wird die angegebene Arbeitstärke vermindern, und zwar erhalten wir den Verlust an Arbeitstärke, die Tafel AB und das Wasser als unelastische Körper vorausgesetzt, nach F. 156, Thl. I.:

$$V = \tfrac{1}{2} (c_2 - c_1)^2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Für unseren vorliegenden Fall entsteht der entsprechende Werth, wenn wir die Masse m_1 des gestoßenen Körpers (die Fläche AB) sehr groß gegen die Masse m_2 des Wasserstrahles denken und $c_2 = c \sin \alpha$, $c_1 = v \sin \beta$ setzen.

Hiernach ist:

$$V = \frac{m_2}{2} (c \sin\alpha - v \sin\beta)^2$$

$$= {}^1/_2 \frac{Q\gamma}{g} (c \sin\alpha - v \sin\beta)^2.$$

Der übrigbleibende Theil der Arbeitstärke ist die Leistung $L^=$ des Wasserstoßes, die wir auch mit Pv bezeichnen können, unter P den Wasserstoß, den hydraulischen Druck in Kilogrammen für die Bewegungsrichtung der Fläche AB verstanden. Wir erhalten demnach:

$$L^= = P v = {}^1/_2 \frac{Q\gamma}{g} (c^2 \sin\alpha^2 - v^2 \sin\beta^2)$$

$$- {}^1/_2 \frac{Q\gamma}{g} (c \sin\alpha - v \sin\beta)^2$$

$$L^= = P v = {}^1/_2 \frac{Q\gamma}{g} 2 v \sin\beta (c \sin\alpha - v \sin\beta) \text{ und}$$

1. $$P = 2 \frac{Q\gamma}{2g} (c \sin\alpha - v \sin\beta) \sin\beta.$$

Bewegt sich die Tafel AB dem Wasser entgegen, so ist in den entwickelten Formeln $v = -v$ zu setzen, und wir erhalten dann den Wasserstoß:

2. $$P = 2 \frac{Q\gamma}{2g} (c \sin\alpha + v \sin\beta) \sin\beta.$$

Hatte die Fläche keine Geschwindigkeit, ist also $v = 0$, so wird

3. $$P = 2 \frac{Q\gamma}{2g} c \sin\alpha \sin\beta.$$

Folgerungen. a. Das Wasser stößt normal gegen eine ruhende Fläche, welche normal ausweicht

$$P = 2 \frac{Q\gamma}{2g} c.$$

Ist F der Querschnitt des Wasserstrahles, so ist

$$Q = F c$$

und

$$P = 2 F \gamma \frac{c^2}{2g}.$$

Setzen wir noch statt $\frac{c^2}{2g}$ die Geschwindigkeitshöhe h, so ist endlich:

$$P = 2 F h \gamma.$$

Denken wir ein Gefäß bis auf die Höhe h mit Wasser gefüllt, und machen darin eine Oeffnung von der Größe F, so ist der hier wirksame hydrostatische Druck

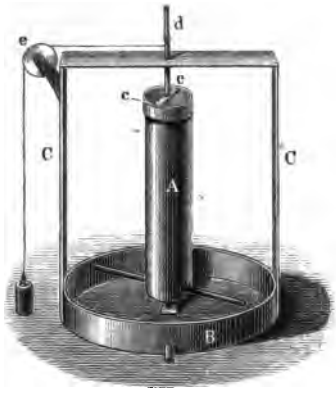
$$= F h \gamma,$$

und der gegen eine vor die Oeffnung gehaltene Platte ausgeübte hydraulische Druck

$$= 2 F h \gamma,$$

d. h. der hydraulische Druck ist unter der Voraussetzung, daß das Wasser seine Geschwindigkeit vollständig verliert, das Doppelte des hydrostatischen Druckes. Hieraus folgt, daß der Theil der Gefäßwandung, welcher der Oeffnung (in einer Seitenwand) gerade gegenüber liegt und mit der Oeffnung dieselbe Größe hat, während des Wasserausflusses einen Normaldruck auszuhalten hat, welcher das Doppelte des hydrostatischen beträgt und der bei geeigneter Aufhängung des Gefäßes benutzt werden kann, dasselbe in Bewegung zu setzen.

Fig. 126.



Man kann die beim Ausfließen des Wassers wirkende Reaction durch einen Apparat anschaulich machen, welcher unter dem Namen Segner'sches Wasserrad (Fig. 126) bekannt ist. Dasselbe besteht aus einem um eine stehende Welle leicht drehbaren Gefäße A, an dessen unterem Ende sich zwei horizontale Röhren befinden, die auf entgegengesetzten Seiten mit kleinen Oeffnungen versehen sind. Das Gefäß erhält eine Drehung nach der, dem ausströmenden Wasserstrahle entgegengesetzten Richtung.

b. Das Wasser stößt unter dem Winkel α gegen eine ruhende Fläche, während diese normal ausweicht:

$$P = \frac{Q\gamma}{g} c \sin \alpha.$$

c. Das Wasser stößt unter dem Winkel α gegen eine ruhende Fläche, und diese weicht in Richtung des stoßenden Wasserstrahles aus:

$$P = \frac{Q\gamma}{g} c \sin \alpha^2.$$

d. Hatte die Fläche eine Geschwindigkeit v, so ist (Fig. 127 a. f. S.) für den normalen Stoß:

$$P = \frac{Q\gamma}{g} (c - v)$$

$$L^{=} = \frac{Q\gamma}{g} (c - v)\, v,$$

für den schiefen Stoß, wenn die Fläche in Richtung des stoßenden Wasserstrahles ausweicht:

$$P = \frac{Q\gamma}{g} (c - v) \sin \alpha^2$$

$$L^{=} = \frac{Q\gamma}{g} (c - v)\, v \sin \alpha^2.$$

Der Druck P bildet mit dem Seitendrucke S (Fig. 128) die Componenten des Normaldruckes N, und es ist der Normaldruck:

Fig. 127.

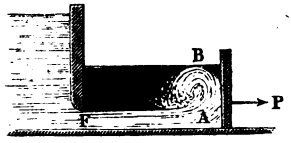
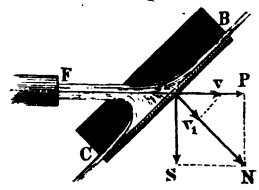


Fig. 128.



$$N = \frac{Q\gamma}{g}(c - v)\sin\alpha,$$

der Seitendruck:

$$S = \frac{Q\gamma}{2g}(c - v)\sin 2\alpha.$$

Der allgemeine Ausdruck für die Arbeitstärke

$$L^{=} = \frac{Q\gamma}{g} v \sin\beta\,(c\sin\alpha - v\sin\beta)$$

hängt hauptsächlich von der Größe der Geschwindigkeit v der gestoßenen Fläche ab. Es ist $L^{=}$ ein Maximum, wenn

$$v\sin\beta\,(c\sin\alpha - v\sin\beta)$$

ein Maximum ist.

Es ist:

$$f_v = vc\sin\beta\sin\alpha - v^2\sin\beta^2$$

und

$$f_{v_1} = v_1\, c\sin\beta\sin\alpha - v_1^2\sin\beta^2,$$

daher

$$\frac{f_v - f_{v_1}}{v - v_1} = c\sin\beta\sin\alpha - \sin\beta^2\,(v + v_1)$$

und wenn wir zur Grenze übergehen:

$$2\,v\sin\beta^2 = c\sin\beta\sin\alpha$$

und

$$v = {}^1/_2\; c\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Das Maximum der Arbeitstärke $L_1^{=}$ ist deshalb:

$$L_1^{=} = {}^1/_2\,\frac{Q\gamma}{2g}\,c^2\sin\alpha^2,$$

oder die der Geschwindigkeit $c\sin\alpha$ entsprechende Druckhöhe mit h bezeichnet:

$$L_1^{=} = {}^1/_2\, Q\, h\, \gamma,$$

d. h. in diesem günstigsten Falle geht die Hälfte der vorhandenen Arbeitstärke verloren, so daß eine Einwirkung des Wassers durch Stoß auf Maschinen zu vermeiden ist.

21. Das durch die Schwerkraft bewegte Wasser wird zum Betriebe von

Maschinen benutzt. Die hierher gehörigen Kraftmaschinen sind entweder Radmaschinen, Wasserräder, oder Kolbenmaschinen, Wassersäulenmaschinen (siehe Seite 188 Thl. II.). Die Wasserräder im weitesten Sinne können eingetheilt werden:

I. In die Wasserräder im engeren Sinne, bei welchen das Wasser gleichzeitig nur an einem Theile des Umfanges zur Wirkung gelangt, und deren Drehungsachse gewöhnlich eine horizontale Lage hat. Diese heißen aus dem letzteren Grunde specieller verticale Wasserräder. Es giebt jedoch auch horizontale Wasserräder, z. B. das Tangentialrad von Poncelet.

II. In Turbinen, bei welchen das Wasser meistens gleichzeitig an allen Punkten des Umfanges eintritt. Die Drehungsachse hat hier gewöhnlich eine verticale Lage, jedoch kommen auch Turbinen mit horizontaler Drehungsachse vor.

I. Wasserräder.

Die Construction der verticalen Wasserräder ist hauptsächlich von der Art und Weise abhängig, in welcher die Uebertragung der Arbeitgröße des Wassers an die Maschine stattfindet. Nach der Wirkungsweise des Wassers kann man im Allgemeinen unterscheiden:

a. Räder, bei welchen das Wasser als schwerer Körper wirkt und mit dem Angriffspunkte der Maschine von einer durch das Gefälle bedingten Höhe gemeinschaftlich herabsinkt.

b. Räder, bei welchen das Wasser vermöge einer außerhalb der Maschine erlangten Geschwindigkeit auf das Rad fließt, welches die dem Wasser innewohnende Arbeitgröße, die gleich seiner lebendigen Kraft ist, dadurch empfängt.

c. Räder, bei welchen das Wasser theils durch sein Gewicht, theils durch seine lebendige Kraft wirksam ist.

Ein verticales Wasserrad (Fig. 129 a. f. S.) besteht aus einer hölzernen oder eisernen Welle A, die in zwei Zapfen C gelagert ist und durch Arme BE mit zwei Kränzen verbunden wird. Zwischen den Kränzen befinden sich Schaufeln, welche sich manchmal an einen die inneren Kranzumfänge cylindrisch umschließenden Boden anlehnen. Die Schaufeln theilen den von den Kränzen und dem Boden gebildeten ringförmigen Raum in kleinere Abtheilungen, nach deren verschiedenartiger Construction die Räder Schaufel- oder Zellenräder heißen.

Gewöhnlich benennt man die Räder nach dem Verhältniß ihres Halbmessers zu dem nutzbaren Gefälle. Unter Gefälle versteht man die senkrechte Entfernung der Wasserspiegel im Zufluß- und Abflußcanale.

1. Ist das nutzbare Gefälle größer als der Durchmesser des Rades, so heißt das Rad über- oder oberschlächtig. Bei dieser Anordnung (Fig. 130) wird das Wasser aus einem Canale A an den Scheitel des Rades geführt, stürzt

hier in die Zellen des Rades, wobei es einen Stoß ausübt, und dann gemeinschaftlich mit der Zelle vermöge seines Gewichtes bis auf den tiefsten Punkt herabsinkt.

Fig. 129.

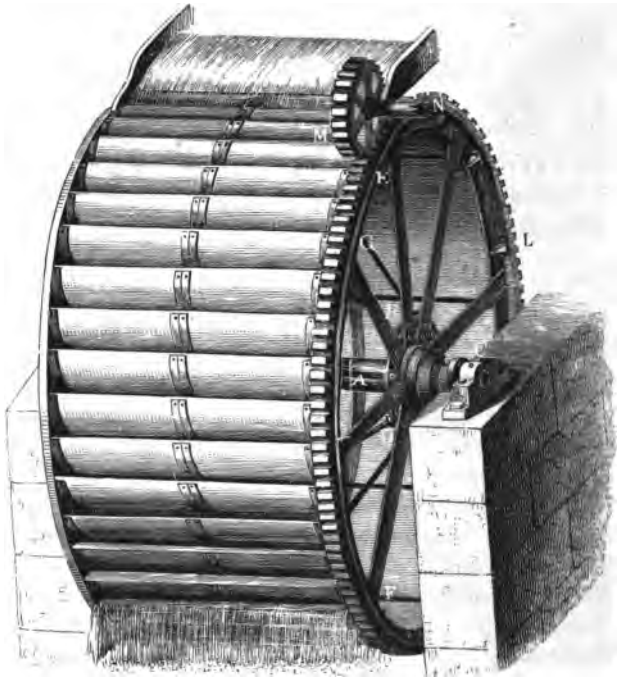
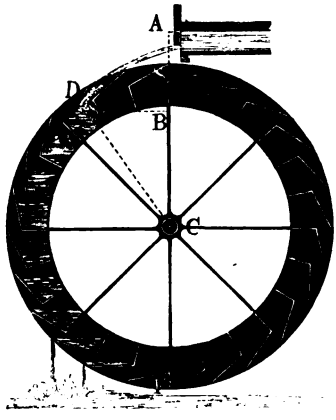


Fig. 130.

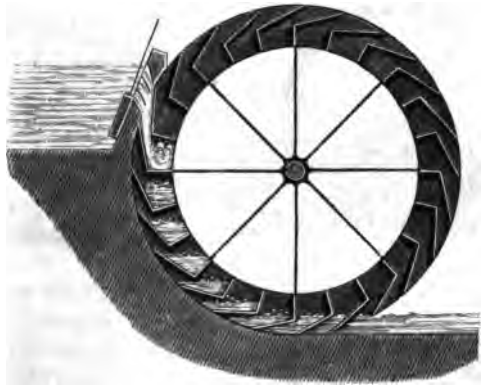


2. Ist das nutzbare Gefälle größer als der Halbmesser, aber kleiner als der Durchmesser, so heißt das Rad rückschlächtig oder Brustrad (Fig. 131). Das Wasser fließt hier über die obere Kante der Schütze in die durch die Coulissen des Einlaufes gebildeten Canäle und von hier in die Zellen, wo es zuerst durch Stoß wirkt, später aber vermöge seines Gewichtes bis auf den tiefsten Punkt herabsinkt. Der Radmantel, Kropf genannt, ist zwar bei diesem Rade nicht unbedingt nothwendig, jedoch erhöht er die Wirkung der Maschine bedeutend.

3. Ist das nutzbare Gefälle gleich

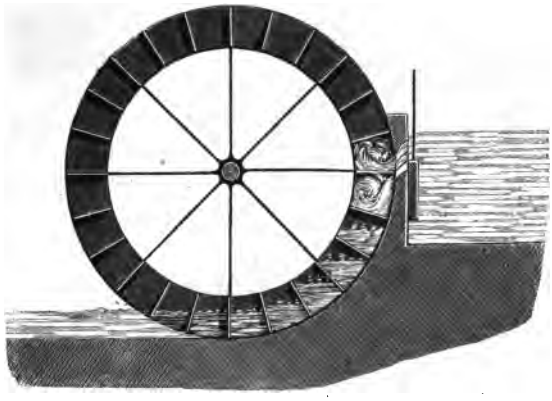
dem Halbmesser des Rades, so nennt man das Rad mittelschlächtig (Fig. 132). Das Wasser wird ebenfalls durch einen Coulisseneinlauf zwischen die Schaufeln

Fig. 131.



des Rades geführt, und wirkt hier größtentheils durch sein Gewicht, mit welchem es bis zum tiefsten Punkte gegen die Schaufeln drückt.

Fig. 132.



4. Das Rad heißt unterschlächtig, wenn das nutzbare Gefälle kleiner als der Halbmesser des Rades ist.

In Fig. 133 (a. f. S.) ist die Skizze eines unterschlächtigen Rades gegeben, das, für sehr kleine Gefälle construirt, gewöhnlich aus ebenen, radial gestellten Schaufeln besteht, gegen welche das Wasser vermöge seiner außerhalb der Maschine erhaltenen Geschwindigkeit stoßend wirkt. An das Rad schließt sich der Abzugscanal mit schwach geneigtem Boden. Das Rad in Fig. 134 (a. f. S.) hat im Allgemeinen dieselbe Construction, jedoch wird durch den Kropf

das zu frühe Austreten des Waſſers verhindert. Das Waſſer gelangt auch hier zunächſt ſtoßend gegen die Schaufelflächen, wirkt dann aber noch bis zum tiefſten

Fig. 133.

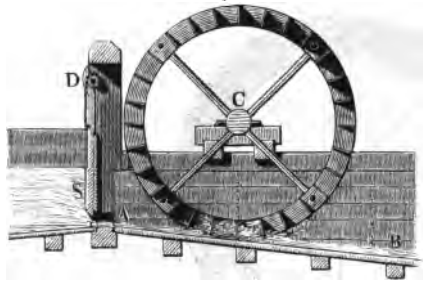


Fig. 134.

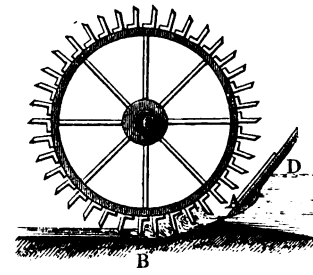
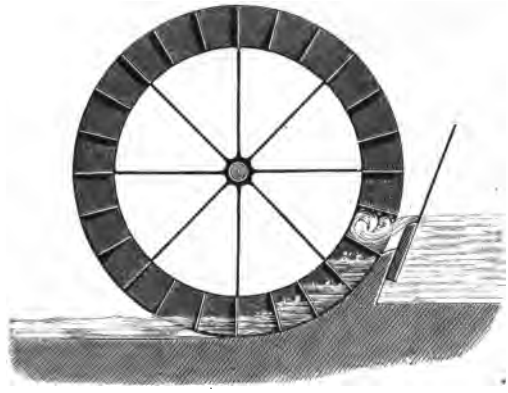
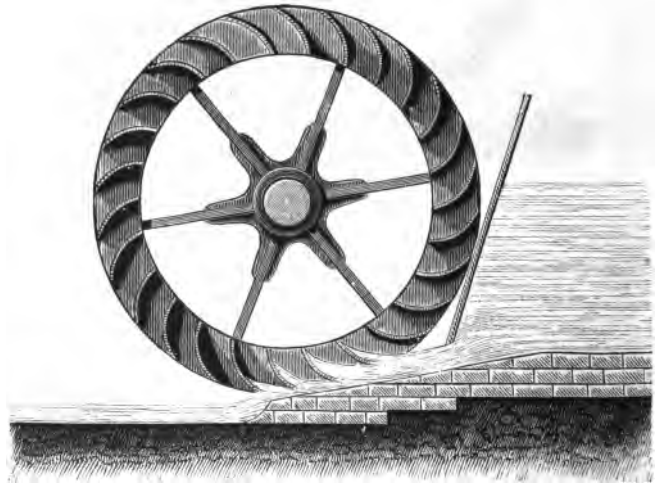


Fig. 135.



Punkte vermöge ſeines Gewichtes. Zweckmäßig conſtruirt man auch bei dem letzten Rade die Schütze als verſtellbares Ueberfallwehr (Fig. 135), wobei dann das Waſſer größtentheils ohne Stoß in das Rad gelangt und allein vermöge ſeines Gewichtes wirkt. Die vollkommenſten unterſchlächtigen Waſſerräder ſind aber die mit krummen Schaufeln verſehenen Räder von Poncelet (Fig. 136).

Fig. 136.

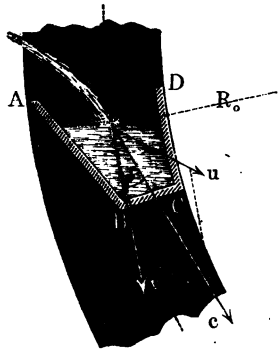


Das Wasser tritt hier ohne Stoß in das Rad und wirkt vermöge seiner lebendigen Kraft mit continuirlichem Druck gegen die Schaufeln, indem es mit abnehmender Geschwindigkeit an den Schaufeln hinauf, sodann mit zunehmender Geschwindigkeit herabgleitet und ohne eine bedeutende absolute Geschwindigkeit zu behalten aus dem Rade tritt. Das Rad ist mit keinem Boden versehen, sondern ganz offen, und gehört zu den Schaufelrädern.

22. Bei den folgenden Untersuchungen über die verschiedenen Wasserräder beginnen wir mit denjenigen, bei welchen das Wasser allein oder doch hauptsächlich durch sein Gewicht wirkt.

Es sei R_0 (Fig. 137) der Halbmesser des Theilrisses, d. h. desjenigen Kreises, zu dessen Umfange der vom Wasser getroffene Punkt gehört, und c die Geschwindigkeit des hier einfließenden Wassers, während die Peripheriegeschwindigkeit des Rades im Theilrisse v sein mag. Die Geschwindigkeit c des Wassers wird bei dem Eintritt in die Zelle $ABCD$ der Größe und Richtung nach geändert, und es tritt daher ein Verlust an Arbeitgröße ein.

Fig. 137.



Bestimmen wir für c die Componenten, von denen die eine v der Größe und Richtung nach gegeben ist, so giebt die dazu gehörige Componente u den Verlust an Geschwindigkeit an, und der Verlust an Arbeitgröße ist daher gleich der dieser Geschwindigkeit entsprechenden lebendigen Kraft. Fließen in jeder Secunde Q Kubikmeter Wasser auf das Rad, so ist der Verlust an Arbeitstärke gleich

$$\tfrac{1}{2}\frac{Q\gamma}{g}u^2.$$

Das Wasser verläßt bei seinem Austritt aus dem Rade dasselbe mit einer Geschwindigkeit, welche gleich der Peripheriegeschwindigkeit des Rades am Ausflußpunkte ist. Die dem Wasser dadurch noch innewohnende lebendige Kraft geht daher dem Rade verloren, und dieser Verlust ist, wenn wir mit R_1 den äußeren Halbmesser des Rades bezeichnen:

$$\tfrac{1}{2}\frac{Q\gamma}{g}v^2\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2.$$

Die in Folge der vorhandenen Wassergeschwindigkeit an das Rad übertragene Arbeitstärke $L_1^{=}$ ist daher:

$$L_1^{=} = \tfrac{1}{2}\frac{Q\gamma}{g}\left[c^2 - u^2 - v^2\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2\right].$$

Aus der Figur ergiebt sich unmittelbar, wenn wir den Winkel, den die Geschwindigkeiten c und v bilden, mit δ bezeichnen,

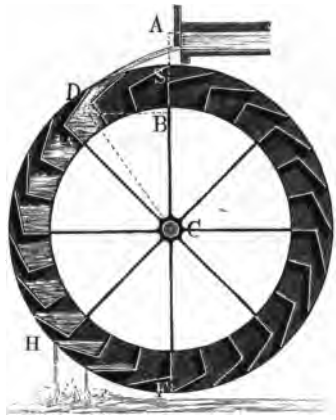
$$u^2 = c^2 + v^2 - 2vc\cos\delta.$$

Nach Einsetzung dieses Werthes erhalten wir:

1. $$L_1^{=} = {}^1/_2 \frac{Q\gamma}{g} \left\{ 2c \cos\delta - v \left[1 + \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^2 \right] \right\} v.$$

Nachdem das Wasser in der Zelle relativ zur Ruhe gekommen, sinkt es mit derselben gemeinschaftlich nieder und wirkt dabei allein durch sein Gewicht. Ist h_1 die senkrechte Entfernung DH (Fig. 138) von dem zur Ruhe gekommenen Wasserspiegel bis zum Punkte H, wo soeben der Ausfluß beginnt, so ist die durch das Gewicht des Wassers verrichtete Arbeitstärke:

Fig. 138.



$$Q\gamma h_1.$$

Hierzu kommt noch die Leistung des Wassers bei dem Niedersinken von der Höhe $HF = h_2$, wobei sich aber durch den steten Ausfluß des Wassers aus den Zellen die Wassermasse ändert. Es sinken hiernach nicht Q Kubikmeter von der Höhe h_2 herab, sondern ξQ Kubikmeter, worin ξ einen von der Form der Zellen abhängigen Coefficienten bezeichnet. Die durch das Gewicht des Wassers an das Rad übertragene Arbeitstärke $L_2^{=}$ ist hiernach:

2. $$L_2^{=} = Q\gamma (h_1 + \xi h_2).$$

Die an das Rad vom Wasser übertragene Arbeitstärke wird durch die der Zapfenreibung vermindert. Bezeichnen wir mit, G das Gewicht des Rades, mit r den Zapfenhalbmesser, den Reibungscoefficienten mit μ, so ist (S. 250 Thl. I) das statische Moment der Reibung:

$$Ff = \mu_1 G r,$$

die Reibung am Umfange des Zapfens

$$= \mu_1 G,$$

und die dadurch consumirte Arbeitstärke, wenn u Umdrehungen in einer Minute gemacht werden:

3. $$L_3^{=} = \mu_1 G \frac{2\pi r u}{60}.$$

Die nutzbare Arbeitstärke $L^{=}$, welche ein Zellenrad ohne Kropf zu übertragen vermag, ist hiernach:

$$L^{=} = L_1^{=} + L_2^{=} - L_3^{=}$$

4. $$L^{=} = Q\gamma \left[\left(\frac{c}{g} \cos\delta - \frac{v}{2g} \left[1 + \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^2 \right] \right) v + h_1 + \xi h_2 \right] - \mu_1 \frac{\pi}{30} G r u.$$

Bezeichnen wir das ganze Gefälle $h_1 + h_2 +$ dem, welches der Ge-

schwindigkeit c entspricht, mit h, so ist die vorhandene rohe Arbeitstärke gleich $Q\gamma h$ und deshalb der Nutzeffect η eines Zellenrades ohne Kropf:

5. $$\eta = \frac{L^{=}}{Q\gamma h}.$$

Behalten wir für Kropfräder dieselben Bezeichnungen bei, so verschwindet der Summand ξh_2, da kein zu frühes Austreten des Wassers stattfinden kann. Dagegen bezeichnet nun auch h_1 den senkrechten Abstand zwischen dem Eintrittspunkte des Wassers in die Zelle und der Oberfläche des Unterwassers. Es kommt hier bei den Kropfrädern jedoch ein anderer Arbeitverlust vor, der oftmals nicht unbedeutend ist und der darin besteht, daß ein Theil des Wassers zwischen Kropf und Schaufel, ohne eine Wirkung auszuüben, wegfließt. Wir werden diesen Verlust dadurch in Rechnung bringen, daß wir wieder statt der Wassermasse Q, $\xi_1 Q$ setzen, unter ξ_1 einen zu ermittelnden Erfahrungscoefficienten verstanden. Es ist hiernach allgemein die nutzbare Arbeitstärke für jedes beliebige Kropfrad:

6. $$L^{=} = Q\gamma\left[\left(\frac{c}{g}\cos\delta - \frac{v}{2g}\left[1+\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2\right]\right)v + \xi_1 h_1\right] - \mu_1 \frac{\pi}{30} G r u.$$

23. Für bereits ausgeführte Räder sind die Formeln 4 u. 6 zur Berechnung der Arbeitstärke benutzbar, um aber für neu zu construirende Räder die Rechnung durchführen zu können, müssen über c, v, $\frac{R_1}{R_0}$, δ, ξ und ξ_1 noch nähere Bestimmungen getroffen werden. Die nutzbare Arbeitstärke $L^{=}$ nimmt mit der Zunahme von $\frac{R_1}{R_0}$ ab, es ist deshalb nothwendig $\frac{R_1}{R_0}$ so klein als möglich zu nehmen. Der kleinste Werth, den $\frac{R_1}{R_0}$ erhalten kann, ist 1, weshalb man den Theilriß mit der äußeren Peripherie zusammenfallen, das Wasser also im äußeren Umfange eintreten läßt. Die äußeren Radhalbmesser bestimmen sich nach Redtenbacher wie folgt:

a. Für oberschlächtige Räder, welche die Oberfläche des Wassers im Abflußcanale im tiefsten Punkte berühren:

$$R_0 = R_1 = {}^1/_2\left(h - \frac{c^2}{2g}\right),$$

worin $c = 2v$ gesetzt werden soll, um den größtmöglichsten Nutzen von der Stoßwirkung zu erhalten (siehe Seite 286) und um einen dünneren Strahl in die Zelle fließen zu lassen, so daß die Luft in derselben sich noch bequem einen Ausgang verschaffen kann. Hiernach ist:

$$R_0 = R_1 = {}^1/_2\left(h - 2\,\frac{v^2}{g}\right),$$

b. für rückschlächtige Räder:

$$R_0 = R_1 = {}^2/_3\, h,$$

c. für mittelschlächtige Räder, wie schon der Name angiebt:

$$R_0 = R_1 = h,$$

d. für unterschlächtige Räder, welche versehen sind:

α. mit einer Ueberfallschütze und einem Kropfe

$$R_0 = R_1 = 1{,}25\,h \text{ bis } 1{,}5\,h;$$

β. mit einem Kropfe und einer gewöhnlichen Schleuse:

$$R_0 = R_1 = 1{,}5\,h = 2{,}5\,h.$$

Hierbei ist zu bemerken, daß man aus constructiven Rücksichten den äußeren Durchmesser in den Grenzen 3,8 bis 7,6 Meter hält, so daß sich hieraus mit den letzten Angaben in jedem einzelnen Falle die Art des Rades angeben läßt.

Der innere Halbmesser R_2 des Rades bestimmt sich dadurch, daß das Rad hinreichend groß sein muß, um die zufließende Wassermenge aufzunehmen. Ist a die Tiefe des Rades gleich $R_1 - R_2$, b die Breite desselben, d. h. die Dimension parallel zur Welle, und e die Entfernung zweier Zellenscheidewände von einander, so ist der Inhalt einer Zelle $= a\,b\,e$. Gehören zur Füllung einer Zelle t Secunden, so ist:

$$a\,b\,e = Q\,t = Q\,\frac{e}{v} \text{ (n. F.: } s = c\,t),$$

d. h.

$$a\,b\,v = Q.$$

Man construirt die Räder so, daß dieselben eine größere Menge Wasser aufzunehmen vermögen, als pr. Secunde auf das Rad fließt, um einmal sicher zu sein, daß die zufließende Wassermasse wirklich aufgenommen werde, und daß andererseits das Entleeren der Schaufelräume oder Zellen nicht zu früh erfolge. Bezeichnen wir das Vielfache von Q mit $\varepsilon\,Q$, so ist also

$$a\,b\,v = \varepsilon\,Q$$

zu setzen.

Für Schaufelräder ist $\varepsilon = 2$,

„ Zellenräder ist $\varepsilon = 3$ bis 4.

Drücken wir mit N_a die der rohen Arbeitstärke $L^{=}$ entsprechende Anzahl Pferdestärken aus, $N_a = \frac{L^{=}}{75}$, so ist vielfachen Versuchen an gut construirten Rädern zufolge nach Redtenbacher:

$$\text{Für Schaufelräder: } \frac{b}{a} = 1{,}75\,\sqrt[3]{N_a}$$

$$\text{„ Zellenräder: } \frac{b}{a} = 2{,}25\,\sqrt[3]{N_a}.$$

Diese empirisch gefundenen Formeln geben in Verbindung mit der obigen Gleichung $a\,b\,v = \varepsilon\,Q$ ein Mittel, die Tiefe a sowie den inneren Halbmesser R_2 und die Breite b der Räder zu bestimmen. In Betreff der Peripheriegeschwindigkeit v können folgende Angaben für die verschiedenen Räder als Anhaltspunkte dienen:

a. für oberschlächtige Räder:

bei kleineren Gefällen bis zu 5 Meter . . $v = 1{,}3$ bis $1{,}5^m$,

„ größeren „ . . . . . $v = 1{,}5^m$;

b. für Kropfräder:

rückenschlächtig . . . . . $v = 1{,}5^m$

mittelschlächtig . . . . . $v = 1{,}6^m$

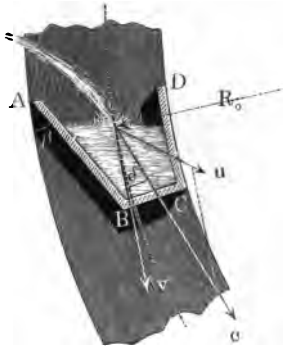
unterschlächtig . . . . . $v = 1{,}41^m$ bis 2^m.

Obgleich für alle Räder eine große Anzahl von Schaufeln oder Zellen vortheilhaft ist, so ist deren Zahl wegen der sich darbietenden praktischen Schwierigkeiten doch in bestimmte Grenzen gewiesen. Nach den Angaben von Redtenbacher ist die Anzahl m der Schaufeln oder Zellen nach der empirisch gefundenen Formel

$$m = \frac{2\,R\,\pi}{0{,}2 + 0{,}7\,a}$$

zu berechnen, wobei für m die nächste ganze Zahl zu nehmen ist. Gewöhnlich bestehen die Schaufeln der Zellenräder aus drei einzelnen Theilen, Fig. 139, von denen das äußerste Element AB die Wasserschaufel, das zweite BC die Setz- oder Riegelschaufel und CD die Bodenschaufel heißt.

Fig. 139.



Das Verhältniß und die gegenseitige Neigung dieser drei Theile ist für eine zweckmäßige Construction der verschiedenen Räder verschieden. Bei oberschlächtigen Rädern kann das Wasser fast tangential in das Rad geleitet werden, weshalb hier in der obigen Formel 4 $\delta = 0$ ist. Es ist daher bei diesen Rädern möglich, den Winkel β, unter welchem die Wasserschaufel den äußeren Umfang des Rades schneidet, verhältnißmäßig klein zu machen, weshalb auch hier der kostspielige Kropf wegbleiben kann. Die Figur 140 (a. f. S.) zeigt zweckmäßige Constructionen der Zellen oberschlächtiger Räder. Eine eigene Bodenschaufel ist nicht vorhanden, die Riegelschaufel in Richtung des Halbmessers ist gleich $\frac{1}{2}\,a$ gleich der halben Radtiefe und die Wasserschaufel bildet einen Winkel von 20^0 bis 30^0 mit dem äußeren Umfange.

Bei einer derartigen Construction der Zellen kann man den Coefficienten ξ, der sich auf die zu früh stattfindende Entleerung bezieht, gleich $\frac{1}{2}$ setzen.

Bei rückschlächtigen Rädern darf der Winkel β nicht so klein wie bei den oberschlächtigen gemacht werden, da sonst der Winkel, den die Leitschaufeln des Coulisseneinlaufes mit dem Umfange des Rades bilden, zu klein ausfallen würde. Die zu früh beginnende Entleerung, die durch die Vergrößerung des Winkels β bedingt ist, wird durch Anbringung eines Kropfes vermieden.

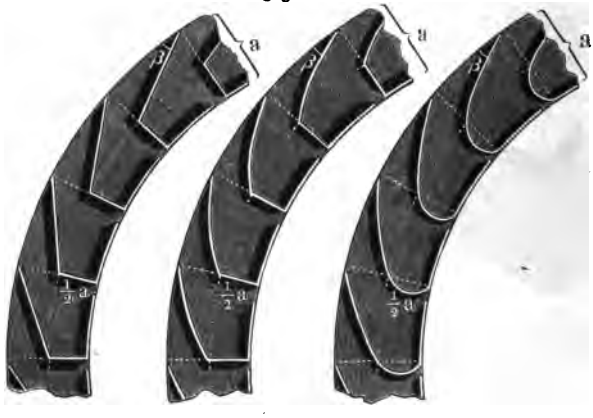
Sobald eine Zelle während der Bewegung des Rades innerhalb des

Kropfes getreten, iſt die in der Zelle enthaltene Luft abgeſchloſſen, die ſchon bei geringer Zuſammendrückung die vollkommene Füllung der Zellen verhin-

Fig. 140.

dern wird, weshalb der Luft durch Oeffnungen in der Bodenſchaufel Gelegenheit zum Austreten gegeben werden muß. Dieſe Ventilation muß ſo angeordnet ſein, daß dabei kein Waſſer verloren geht. In Fig. 141 finden ſich zweckmäßige Conſtructionen für die Zellenform rückſchlächtiger Räder. Die

Fig. 141.

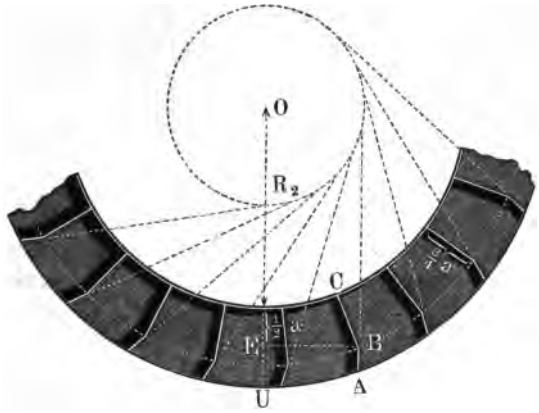


Bodenſchaufel reicht nicht vollſtändig bis zur Riegelſchaufel der nächſten Zelle, wodurch eine zweckmäßige Ventilation erfolgt. Die Riegelſchaufel liegt in Richtung des Halbmeſſers und iſt gleich der halben Radtiefe. Der Anſchluß der Waſſerſchaufel an den äußeren Umfang geſchieht in einem Punkte, der in der Verlängerung der Riegelſchaufel der nächſten Zelle liegt.

Bei den mittelſchlächtigen Rädern iſt es für den Eintritt des Waſſers nur nothwendig, den Schaufeln ein ſolche Form zu geben, daß ſie den Eintritt des Waſſers nicht erſchweren und ſo wenig als möglich durch Stoßwirkung von dem Gefälle verbraucht werde. Radialſtehende Schaufeln würden hier alſo

vollkommen genügen. Da jedoch die Schaufeln im Unterwasser, wie bei allen Kropfrädern, so tief eintauchen müssen, daß der Wasserspiegel in der tiefsten Schaufel mit dem Unterwasserspiegel zusammenfällt, damit das Wasser nicht noch beim Verlassen des Rades Geschwindigkeit besitze, so ist es gut, den äußersten Theil der Schaufeln nicht radial, sondern in der Weise geneigt zu stellen, daß derselbe beim Austritte eine verticale Stellung habe. In Fig. 142 ist die zweckmäßige Construction einer solchen Schaufel angegeben. Eine eigene

Fig. 142.



Bodenschaufel ist nicht vorhanden, die Riegelschaufel BC, in Richtung des Halbmessers gelegen, ist gleich $^3/_4$ der Radtiefe.

Um die Richtung der Wasserschaufel BA zu bestimmen, errichte man auf der Mitte E der halben Radtiefe, die auf dem nach dem tiefsten Punkte U gezogenen Halbmesser OU abgemessen wird, eine Normale und ziehe vom Durchschnittspunkte B derselben mit dem concentrischen Kreise, dessen Halbmesser gleich $= R_2 + {}^3/_4\, a$ ist, eine Parallele BA zu OU. Die Verlängerung von AB ist Tangente zu einem mit EB um O geschlagenen Kreise, wodurch sich die Verzeichnung der übrigen Wasserschaufeln leicht ausführen läßt. Eine Ventilation der Schaufelräume ist hier ebenfalls nothwendig.

Der Winkel δ, den der einfallende Wasserstrahl mit dem äußeren Radumfange bildet, ist auch bei den Kropfrädern annähernd gleich Null. Die Geschwindigkeit c des ankommenden Wassers ist ebenso wie bei den oberschlächtigen Rädern gleich der doppelten Peripheriegeschwindigkeit v des Treffpunktes im Rade zu nehmen.

24. Der in Aufgabe 22 abgeleitete Werth für die Arbeitstärke eines Wasserrades enthält in seinem letzten Summand $\mu_1 \frac{\pi}{30} G r u$ die Arbeitstärke L_3'', welche von der Zapfenreibung verbraucht wird. Es steht aber der Festigkeitslehre gemäß, der Zapfendurchmesser $d = 2r$ in einer bestimmten Beziehung zum Zapfendruck $P = {}^1/_2\, G$ und zwar haben wir für gußeiserne Zapfen, bei welchen das Verhältniß zwischen der Zapfenlänge und dem Zapfendurchmesser

gleich $^1/_2$ genommen wird, nach S. 432 Thl. I $d = \sqrt{\frac{P}{29}}$. Für den vorliegenden Fall das Gewicht G eingeführt, iſt demnach

$$d = \sqrt{\frac{G}{58}} \text{ und } Gr = G\,\frac{d}{2} = \frac{G}{2}\sqrt{\frac{G}{58}} = \sqrt{\frac{G^3}{232}};$$

Die Größe ſowie das Gewicht eines Waſſerrades iſt jedenfalls von der rohen Arbeitſtärke abhängig, und man kann bei Näherungsrechnungen G der rohen Arbeitſtärke, ausgedrückt in Pferdeſtärken N_a ſogar proportional nehmen, alſo $G = \alpha N_a$ ſetzen. Nach Redtenbacher iſt α gleich 600 bis 700 Kilogramm, und wir haben bei Benutzung dieſes Zahlenwerthes

$$Gr = \sqrt{\frac{(600\,N_a)^3}{232}} \text{ bis } \sqrt{\frac{(700\,N_a)^3}{232}} = 600\,N_a\sqrt{2{,}6\,N_a} \text{ bis } 700\,N_a\sqrt{3\,N_a}$$

ſowie

$$L_3^{=} = 63\,\mu_1\,u\,N_a\sqrt{2{,}6\,N_a} \text{ bis } 73\,\mu_1\,u\,N_a\sqrt{3\,N_a} = \beta\,N_a\sqrt{N_a}.$$

Werden die in den vorigen Nummern gemachten praktiſchen Angaben zur Umformung der Gleichungen 4 und 6 in Aufgabe 22 benutzt, ſo ergiebt ſich als nutzbare Arbeitſtärke:

a) für oberſchlächtige Räder

$$L^{=} = Q\gamma\left(\frac{v^2}{g} + h_1 + {}^1/_2\,h_2\right) - \beta\,N_a\sqrt{N_a}.$$

Das ganze Gefälle iſt:

$$h = \frac{c^2}{2g} + h_1 + h_2,$$

worin wir der Waſſerverluſte wegen beim Eintritt in das Rad $\frac{c^2}{2g} = 1{,}1\,\frac{c^2}{2g}$ ſetzen wollen. Bei Einführung der Peripheriegeſchwindigkeit v iſt dann

$$h = 4{,}4\,\frac{v^2}{2g} + h_1 + h_2 \text{ und } h_1 + {}^1/_2\,h_2 = h - {}^1/_2\,h_2 - 4{,}4\,\frac{v^2}{2g},$$

und deshalb erhalten wir für die nutzbare Arbeitſtärke

$$L^{=} = Q\gamma\left(h - 0{,}5\,h_2 - 1{,}2\,\frac{v^2}{g}\right) - \beta\,N_a\sqrt{N_a}.$$

Setzen wir noch

$$v = \frac{2\,R\pi\,u}{60}$$

und

$$N_a = \frac{Q\,h\,\gamma}{75},$$

ſo erhalten wir ſchließlich

$$L^{=} = Q\gamma\left\{h - 0{,}5\,h_2 - 1{,}2\,\frac{v^2}{g} - \frac{\beta\,h}{75}\sqrt{\frac{Q\,h\,\gamma}{75}}\right\}^{\frac{\text{km}}{=}}.$$

b) für Kropfräder:

$$L^{=} = Q\gamma\left(\frac{v^2}{g} + \xi_1 h\right) - \beta N_a \sqrt{N_a}.$$

Substituiren wir hierin ebenfalls

$$h_1 = h - 2{,}2\,\frac{v^2}{g}$$

und

$$N_a = \frac{Q h \gamma}{75},$$

so ergiebt sich

$$L^{=} = Q\gamma\left\{\xi_1 h - 1{,}2\,\frac{v^2}{g} - \frac{\beta h}{75}\sqrt{\frac{Q h \gamma}{75}}\right\}^{\frac{km}{=}}.$$

Für gut construirte Kropfräder, bei denen zwischen Rad und Kropf ein unveränderlicher Spielraum von 0,013 Meter vorhanden, ist ξ_1 nahezu gleich 1 zu nehmen.

Bezeichnet man mit η den Nutzeffekt des Wasserrades, so ist schließlich für beide Arten Räder

$$L^{=} = \eta . Q h \gamma.$$

25. Bei unterschlächtigen Rädern, die mit keinem Kropfe versehen sind, wirkt das Wasser gar nicht durch sein Gewicht, sondern allein durch den Stoß, so daß der in Nr. 22 F. 1 entwickelte Werth $L_1^{=}$ für die nutzbare Arbeitstärke hier unmittelbar benutzt werden kann:

$$L_1^{=} = \frac{Q\gamma}{2g}\left\{2\,c\cos\delta - v\left[1 + \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2\right]\right\} v.$$

Das Wasser wird auch hier fast tangential im tiefsten Punkte des Rades zugeführt, so daß wir $R_1 = R_0$ und $\delta = 0$ zu setzen haben. Es ist hiernach für die unterschlächtigen Räder mit radialstehenden Schaufeln ohne Kropf die Arbeitstärke bei Berücksichtigung des Arbeitverlustes durch die Zapfenreibung:

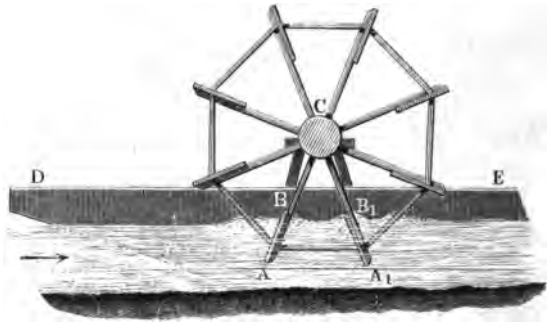
$$L^{=} = \frac{Q\gamma}{g}(c - v)\,v - \beta N_a \sqrt{N_a},$$

worin Q das zum Stoße gelangende Wasserquantum bezeichnet, welches jedoch nur einen Theil des zufließenden Wassers ausmacht, da zu beiden Seiten des Rades im Gerinne Wasser ohne zu wirken abfließt. Dieselbe Formel ist auch für die frei in einem Strome hängenden Räder (Fig. 143 a. f. S.) zu benutzen, die sogenannten Schiffmühlenräder. Die Zapfen C derselben ruhen auf Schiffen oder Kähnen DE, die durch Anker an ihrer Stelle gehalten werden. Die Schaufeln AB, A_1B_1 sind bei diesen Rädern unmittelbar auf den Radarmen CA, CA_1 befestigt, so daß hier die Kränze ganz fehlen. Die Schaufeln müssen recht lang (1,9 bis 5,7 Meter) und breit (0,3 bis 0,6 Meter) construirt werden, damit möglichst viel Wasser zur Wirkung komme. Das hierbei

benutzbare Wasserquantum Q ist, wenn F den Flächeninhalt des eingetauchten Theiles einer Schaufel bezeichnet:

$$Q = Fc.$$

Fig. 143.



Nach Einsetzung dieses Werthes erhalten wir für die nutzbare Arbeitstärke:

$$L^{=} = \frac{F\gamma}{g}(c - v)cv - \beta N_a \sqrt{N_a}.$$

Wenn bei dem unterschlächtigen Rade sowohl im Gerinne als auch im freien Strome keine Wasserverluste stattfänden, so wäre die vortheilhafteste Peripheriegeschwindigkeit v gleich der halben Geschwindigkeit c des zuströmenden Wassers (siehe Nr. 20). Wegen der vorkommenden Wasserverluste ist jedoch $v = 0{,}35$ bis $0{,}4\ c$ zu nehmen. Abgesehen von dem Arbeitverluste durch die Zapfenreibung erhalten wir im günstigsten Falle die Arbeitstärke

$$L^{=} = 0{,}24\frac{Q\gamma}{g}c^2,$$

$$= 0{,}48\ \frac{Q\gamma}{2g}c^2,$$

d. h. diese Räder geben für die günstigste Geschwindigkeit nur 48 Proc. der vorhandenen Arbeitstärke, selbst wenn man von allen anderen Arbeitverlusten absieht. Der Halbmesser R der unterschlächtigen Räder wird nach der Größe der Leistung und nach den localen Verhältnissen zu 1,9 bis 3,8 Meter genommen. Zur Bestimmung der Tiefe a und der Breite b des Rades dienen wieder die schon für Schaufelräder in Nro. 23 angegebenen Formeln:

$$abv = \varepsilon Q,$$

und

$$\frac{b}{a} = 1{,}75\sqrt[3]{N_a},$$

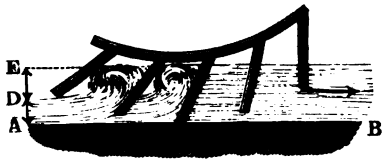
wobei $\varepsilon = 2$ und die Breite b des Rades immer um 0,1 Meter größer genommen werden muß, als die Breite des zufließenden Wassers. Eine große Anzahl von Schaufeln ist für die unterschlächtigen Räder besonders nothwendig,

damit nicht eine große Masse Wasser, ohne eine Wirkung auszuüben, abfließe. Es ist auch hier die Anzahl m der Schaufeln nach der Formel

$$\frac{2\,R\pi}{0{,}2 + 0{,}7\,a}$$

zu berechnen. Gewöhnlich werden bei dem unterschlächtigen Rade radialstehende Schaufeln angewendet. Es ist damit jedoch ein zweifacher Nachtheil verbunden, indem das Wasser nur allein durch Stoß wirken kann, da es normal gegen die Schaufeln schlägt, und andererseits werfen radialstehende Schaufeln bei ihrem Austritte Wasser in die Höhe. Diese beiden Uebelstände lassen sich theilweise vermeiden, wenn man ebene, gegen den Halbmesser des Rades ungefähr um 45° geneigte Schaufeln in Anwendung bringt. Bei solchen Schaufeln wirkt das Wasser bei seinem Eintritte nur theilweise durch Stoß, da es mit der zur Schaufel parallelen Geschwindigkeitscomponente an der Schaufel hinaufgleitet, bis es diese Geschwindigkeit verloren hat, von hier aber gleitet das Wasser wieder mit beschleunigter Geschwindigkeit herab und fließt am unteren Ende mit einer Geschwindigkeit ab, welche die Resultante aus der Peripheriegeschwindigkeit des Rades und aus der beim Herabgleiten des Wassers erlangten Endgeschwindigkeit ist. Während der Bewegung des Wassers in einem Schaufelraum wirkt dasselbe nur durch Druck. Der Nutzeffect derartig construirter unterschlächtiger Räder wird also jedenfalls gesteigert. Die Neigung der Schaufeln gegen den Halbmesser ist so einzurichten, daß die ausgehobene Schaufel, wie Fig. 144 zeigt, eine senkrechte Lage erhält. Die Schütze ist so nahe als möglich an das Rad zu legen und unter 60° gegen den Horizont zu neigen.

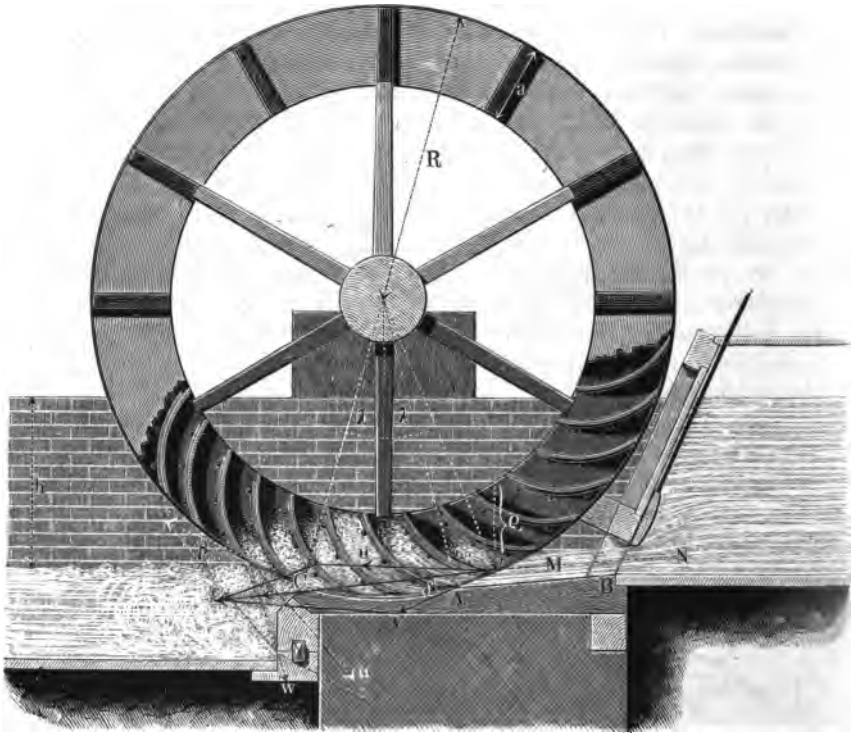
Fig. 144.



26. Werden die Schaufeln unterschlächtiger Räder so gekrümmt, daß der eintretende Wasserstrahl an der hohlen Seite hinströmen und gegen dieselbe drücken kann, ohne einen Stoß auszuüben, so erhält man eine größere Leistung, als bei Anwendung von ebenen Schaufeln. Derartig construirte Radmaschinen heißen nach ihrem Erfinder Poncelet'sche Räder (Fig. 145 a. f. S.). Das Rad darf in dem Gerinne nur einen Spielraum von 7 bis 9 Millimeter erhalten, damit möglichst alles Wasser zur Wirkung komme. Die Mündung des Zuflußgerinnes wird ganz nahe an das Rad gelegt, um wo möglich die ganze vorhandene lebendige Kraft auf das Rad zu übertragen, wobei man das Vorgerinne AB wohl auch noch um 3° gegen den Horizont neigt, um dadurch den Verlust an Wasserreibung auszugleichen. In der Regel umgiebt man das Rad am tiefsten Theile mit einem Kropf AC, der sich wenigstens über zwei Schaufelräume erstreckt, und läßt diesen Kropf am Ende um 0,2 Meter abfallen, damit das Rad nicht im Unterwasser wate. Der Durchmesser bei Ponceleträdern variirt zwischen 3 und 6 Metern, und die Anzahl der Schaufeln, die aus Blech oder Holz hergestellt werden, beträgt bei diesen Rädern 36 bis 42.

Bezeichnet wieder c die Geschwindigkeit des zufließenden Wassers, v die Peripheriegeschwindigkeit des getroffenen Punktes und δ den Winkel zwischen

Fig. 145.



diesen beiden Geschwindigkeiten, so ist die Bedingung, das Wasser soll ohne Stoß in das Rad eintreten, dadurch möglich zu machen, daß die andere Componente u von c in Richtung des ersten Schaufelelementes falle. Mit dieser Geschwindigkeit u steigt dann das Wasser mit gleichmäßig verzögerter Bewegung gegen die Schaufel drückend in die Höhe, und erlangt beim Herabfließen mit gleichmäßig beschleunigter Bewegung die ursprüngliche Geschwindigkeit u wieder. Diese setzt sich mit der vorhandenen Peripheriegeschwindigkeit v zu einer resultirenden Geschwindigkeit w zusammen, mit welcher das Wasser das Rad verläßt, so daß die dieser Geschwindigkeit w entsprechende lebendige Kraft dem Rade verloren geht, welche bei Bestimmung der nutzbaren Arbeitsstärke von der vorhandenen lebendigen Kraft für die Geschwindigkeit c in Abzug zu bringen ist. Hiernach ist, wenn Q Kubikmeter Wasser in jeder Secunde auf das Rad fließen:

$$L^{=} = \frac{Q\gamma}{2g}(c^2 - w^2),$$

und da $w^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos\beta$, unter β den Winkel zwischen den Geschwindigkeiten u und v verstanden, so ist:

$$L^{=} = \frac{Q\gamma}{2g}(c^2 - u^2 - v^2 + 2uv\cos\beta).$$

Weiter ist

$$c^2 = v^2 + u^2 + 2uv\cos\beta,$$

und deshalb:

$$L^{=} = \frac{Q\gamma}{2g} \cdot 4uv\cos\beta.$$

Führen wir zu einer besseren Vergleichung anstatt der Geschwindigkeit u die Geschwindigkeit c des Wassers ein, setzen wir deshalb:

$$c = u\cos(\beta - \delta) + v\cos\delta,$$

und hieraus mit Berücksichtigung, daß $u\sin\beta = c\sin\delta$

$$u\cos\beta = c\cos\delta - v,$$

so erhalten wir:

$$1.\quad L^{=} = \frac{Q\gamma}{g} 2v(c\cos\delta - v).$$

Die nutzbare Arbeitstärke ist am größten für $v = {}^1/_2 c\cos\delta$, deshalb ist das Maximum der Arbeitstärke:

$$2.\quad L^{=} = \frac{Q\gamma}{2g}(c\cos\delta)^2.$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß Nichts an Arbeitstärke bei dem Ponceletrade verloren geht, wenn man den Eintrittswinkel δ des Wassers gleich 0 machen könnte. Obgleich dies nicht möglich ist, so folgt doch hieraus, daß man δ recht klein zu wählen hat. In den meisten Fällen ist $\delta = 15$ bis 20^0. Bei Berücksichtigung des durch die Zapfenreibung entstehenden Arbeitverlustes ist:

$$3.\quad L_1^{=} = \frac{Q\gamma}{2g}(c\cos\delta)^2 - \beta N_a \sqrt{N_a}.$$

Bei praktischer Ausführung sind für die maßgebenden Größen des Rades folgende Werthe zu nehmen, wenn h das Gefälle des Wassers bezeichnet:

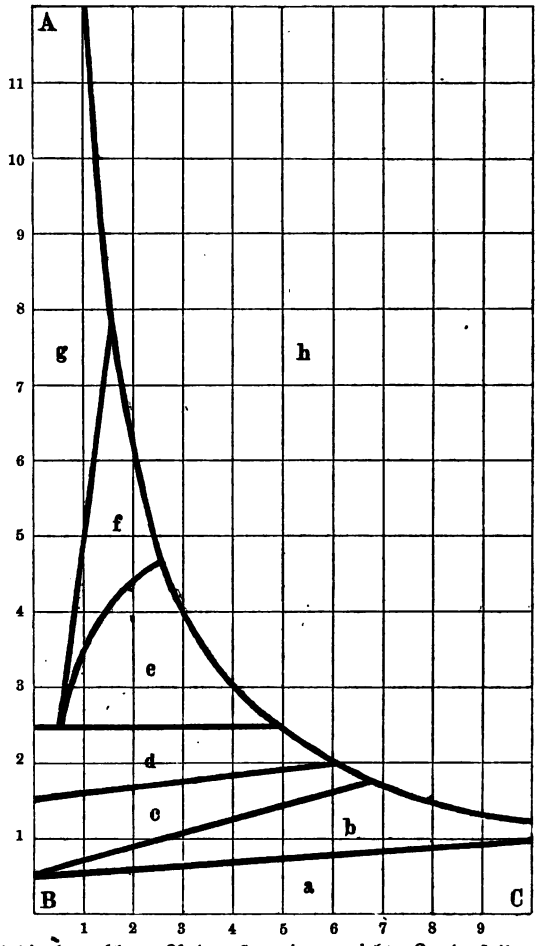
der Halbmesser $R = 1{,}75\ h$,
die Tiefe . . . . $a = 0{,}509\ h$,
die Breite . . . $b = 5{,}26 \dfrac{Q}{h\sqrt{2gh}}$.

Die Größe des wasserhaltenden Bogens, d. i. die Größe des Kropfes, entspricht einem Centriwinkel $2\lambda = 30^0$ und der Halbmesser ϱ der gekrümmten Schaufeln $= 0{,}711\ h$. Zur Bestimmung des Mittelpunktes des Kreises, welcher den krummen Schaufeln entspricht, errichte man in dem Endpunkte

derjenigen Schaufel, die in den mittleren Wasserfaden MN trifft, eine Normale zu demselben und trage darauf $\varrho = 0{,}711\,h$ ab.

27. Als Schluß der Wasserräder geben wir in Fig. 146 das von Redtenbacher construirte Diagramm, aus welcher sich leicht für jeden ein-

Fig. 146.



zelnen Fall die brauchbare Radconstruction ergiebt. In derselben bezeichnen die Zahlen in der Reihe AB das Gefälle in Metern, die Zahlen in der Reihe BC die in jeder Secunde zufließende Wassermenge in Kubikmetern. Um über die Wahl eines Wasserrades zu entscheiden, sucht man in der Reihe AB die Linie, welche der Größe des gegebenen Gefälles, und in BC die, welche der Größe der gegebenen Wassermenge entspricht, und wählt dem Durchschnittspunkte der beiden Linien gemäß das Rad nach folgender Tabelle:

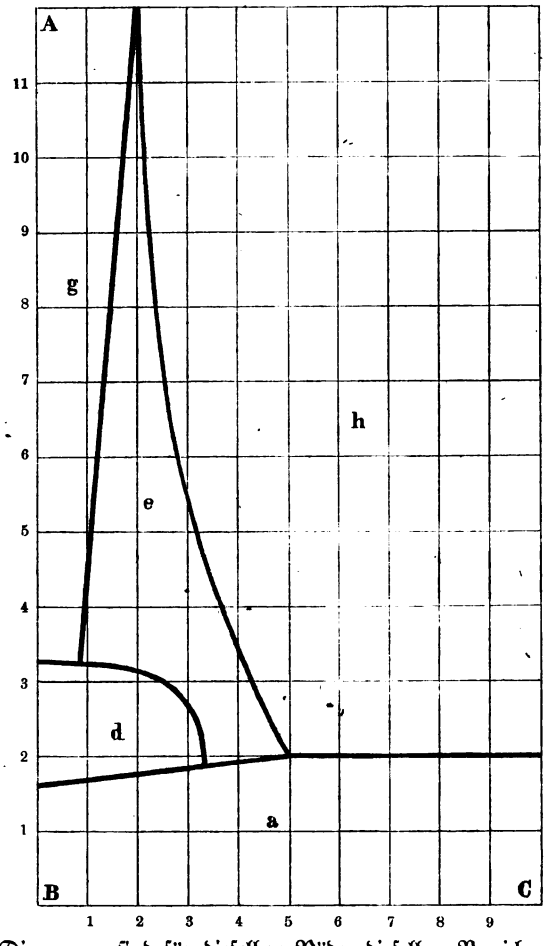
a bedeutet ein unterschlächtiges Rad ohne Kropf oder ein Ponceletrad,
b „ „ „ „ mit Kropf u. Spannschütze oder ein Ponceletrad.
c „ „ „ „ „ „ „ „
d „ „ „ „ „ „ „ Ueberfallschütze,
e „ „ mittelschlächtiges „
f „ „ rückschlächtiges „
g „ „ oberschlächtiges „
h zeigt, daß ein einziges Rad nicht genügt, die vorhandene Wasserkraft zu übertragen.

Bei der Anlage dieser graphischen Tabelle sind von Redtenbacher folgende Principien zu Grunde gelegt worden. Die Anwendbarkeit des gewöhnlichen unterschlächtigen Rades ist bis zu einem Gefälle von circa 1 Meter festgesetzt worden. Das Gebiet des unterschlächtigen Rades mit Kropf und Spannschütze erstreckt sich bis zu einem Gefälle von 1,6 Meter und einem Wasserverbrauche bis zu 2 Kubikmeter. Ueber diese Grenzen ist das unterschlächtige Rad mit Kropf und Ueberfallschütze vortheilhafter. Das Rad von Poncelet läßt sich bis zu einem Gefälle von 1,7 Meter benutzen, ist also zum Ersatz der ersten und theilweise zweiten Räderart brauchbar. Die Grenzen für das unterschlächtige Rad mit Kropf und Ueberfallschütze liegen nach der Figur bei einem Zuflusse von 2,5 Kubikmetern Wasser und einem Gefälle von 2,5 Metern. Für ein größeres Gefälle ist entweder das mittel- oder oberschlächtige Rad brauchbarer. Die Grenzen für das mittelschlächtige Rad sind die Gefälle von 2,5 bis 4,5 Meter und die Wassermengen von 0,3 bis 2,4 Kubikmeter. Das Gebiet des rückschlächtigen Rades liegt zwischen den Grenzen des mittel- und oberschlächtigen. Es ist dasselbe für Gefälle von 2,5 bis 7,9 Meter und für Wassermengen von 0,3 bis 1,3 Kubikmeter benutzbar. Das Gebiet des oberschlächtigen Rades hat hinsichtlich des Gefälles eine sehr große Ausdehnung. Diese Anordnung ist wohlfeiler als jede andere, und giebt, wenn das Gefälle nicht zu klein ist, immer einen guten Nutzeffect. Die Gefällgrenzen liegen zwischen 2,5 und 12,6 Meter, die Wassermengen zwischen 0,3 und 0,8 Kubikmeter. Es ist das oberschlächtige Rad für große Wassermengen besonders deshalb unbrauchbar, weil in diesem Falle der Wasserstand im oberen Canale veränderlich ist und die Zellen des oberschlächtigen Rades nicht ventilirt werden können.

Dieses Diagramm ist von Lacologne (s. „der Civilingenieur“, Bd. IV.) etwas verändert worden, indem er die unterschlächtigen Räder ohne Kropf, sowie die mit Kropf und Spannschütze durch Ponceleträder ersetzt, da sich dieselben sehr gut aus Holz construiren lassen und dann stets schmäler ausfallen, als die alten Räder, daher auch nicht viel theurer als diese zu stehen kommen. Weiter werden die Grenzen für das unterschlächtige Rad mit Kropf und Ueberfallschütze vermindert, da nach der ersten Angabe die Dimensionen in den äußersten Fällen zu colossal ausfallen. Zwischen den mittel- und rückschlächtigen Rädern wird kein Unterschied gemacht, da die mittelschlächtigen bei Benutzung des Coulisseneinlaufes in ihren Schaufeln eine ähnliche

Form wie die rückſchlächtigen Räder erhalten müſſen. Man kann ſogar die beiderſeitigen Grenzen erweitern, da die ſich ergebenden Dimenſionen bei ſolchen Rädern immer noch eine praktiſche Ausführung zulaſſen. Ebenſo läßt ſich die Grenze für die oberſchlächtigen Räder erweitern. In dem in Fig. 147 ver-

Fig. 147.



zeichneten Diagramm ſind für dieſelben Räder dieſelben Bezeichnungen gewählt worden, wie in dem Diagramm von Redtenbacher. Hiernach bedeutet:

a ein Ponceletrad,
d ein unterſchlächtiges Rad mit Kropf und Ueberfallſchütze,
e ein mittel- oder rückſchlächtiges Rad,
g ein oberſchlächtiges Rad, und
h die Unmöglichkeit, mit einem Rade auszukommen.

Bei Erbauung eines neuen Wasserrades ist es oft zweckmäßig, den Nutzeffect der Wasserräder vorher zu kennen. Für Räder, welche nach ihren Constructionsverhältnissen, den Füllungen und Geschwindigkeiten zu gut angeordneten gerechnet werden können, ist dieser Nutzeffect η aus der folgenden Tabelle zu entnehmen.

Unterschlächtiges Rad	$\eta = 0{,}30$ bis $0{,}35$
Kropfrad	$\eta = 0{,}40$ „ $0{,}50$
Ponceletrad	$\eta = 0{,}60$ „ $0{,}65$
Schaufelrad mit Ueberfall-Einlauf	$\eta = 0{,}60$ „ $0{,}65$
Schaufelrad mit Coulissen-Einlauf	$\eta = 0{,}65$ „ $0{,}70$
Rückschlächtiges Rad mit Coulissen-Einlauf	$\eta = 0{,}60$ „ $0{,}70$
Oberschlächtiges Rad für kleine Gefälle von 3 bis 5 Meter	$\eta = 0{,}50$ „ $0{,}60$
Oberschlächtiges Rad für größere Gefälle über 5 Meter	$\eta = 0{,}60$ „ $0{,}75$

II. Turbinen.

28. Diejenigen hydraulischen Motoren, welche Radmaschinen sind und bei denen der Eintritt des Wassers gleichzeitig fast an sämmtlichen Punkten des Umfanges erfolgt, heißen Turbinen. Wir wollen hier nur diejenigen Turbinen näher in Betracht ziehen, welche eine horizontale Lage haben, die also mit einer stehenden Welle versehen sind. Das Wasser wird den Turbinen, in gleicher Weise wie den Wasserrädern, durch ein Gerinne zugeführt, von dem sich gewöhnlich ein Rohr abzweigt, das bis in den Radkörper reicht; dabei kann die Wasserzuführung sowohl von oben als auch von unten geschehen. Je nach der Art und Weise, wie das Wasser den Radkörper durchfließt, unterscheidet man folgende drei Turbinensysteme:

1) Tritt das Wasser am inneren Radumfange ein, am äußeren Umfange aus, entfernt es sich also bei der Bewegung durch das Rad von der Radachse, so haben wir eine Turbine mit innerer Beaufschlagung, kurzweg eine innere Turbine.

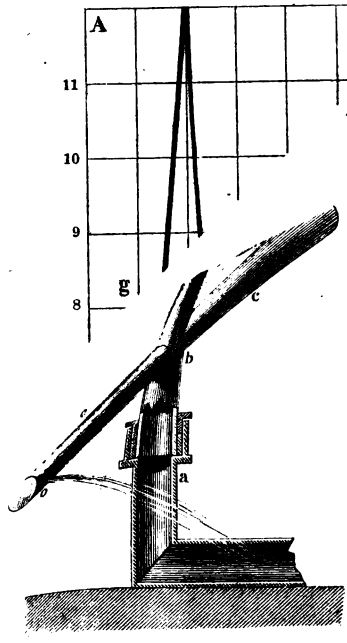
2) Verfolgt das Wasser den entgegengesetzten Weg wie unter 1), nähert es sich bei seinem Wege durch das Rad der Radachse, tritt es also am äußeren Radumfange ein, dagegen am inneren aus, so heißt die Maschine Turbine mit äußerer Beaufschlagung, kurzweg äußere Turbine.

3) Fließt das Wasser parallel der Achse durch das Rad, so nennt man die Maschine eine Axialturbine.

In den meisten Fällen ist zwischen dem Wassereintritt und dem Rade ein feststehender Apparat angeordnet, der Directions- oder Leitschaufel-Apparat, welcher die gehörige Ueberführung des Wassers aus dem Zuflußrohre

Form wie die rückschlächtigen Räder erhalten müssen. Man [illegible] in solche beiderseitigen Grenzen erweitern, da die sich ergebenden Dimen[illegible] Rädern immer noch eine praktische Ausführung zulassen. [illegible] Segner'sche Grenze für die oberschlächtigen Räder erweitern. In [illegible] ohne Leitschaufel-

Fig. 147.



[illegible] wie es in der hier ste-[illegible]ten in die horizontalen [illegible]ist der Reibungswiderstand [illegible]teren Zapfen auf ein Mini-[illegible]ucirt, und dieser hydraulische [illegible]ist in dieser Construction sehr [illegible] geeignet, zum Betriebe von Ma-[illegible]schinen verwendet zu werden. Ein von dem Maschineninspector Althans nach diesem Princip construirtes Reactionsrad treibt zu Vallendar unweit Ehrenbreitstein eine Lohmühle. Der Durchmesser dieses Rades ist 7,5 Meter, die Höhe der Wassersäule in der Röhrenleitung, das Gefälle beträgt 29,5 Meter, und die in einer Minute zufließende Wassermenge 0,551 Meter. Die Anzahl der Umdrehungen pr. Minute war bei dem Betriebe 30. Die Ausflußöffnungen $o\,o$ können nach Bedürfniß größer oder kleiner gemacht werden, jenachdem mehr oder weniger Wasser vorhanden ist. Wird das ganze Gewicht G der Maschine gleich dem Gewichte der drückenden Wassermasse gemacht, so wird an dem unteren Zapfen gar keine Reibung zu überwinden sein, und wir erhalten, wenn h das Gefälle und d den Durchmesser der Zuleitungsröhre a bezeichnet:

$$G = {}^1/_4\,\pi\,d^2\,h\,\gamma;$$

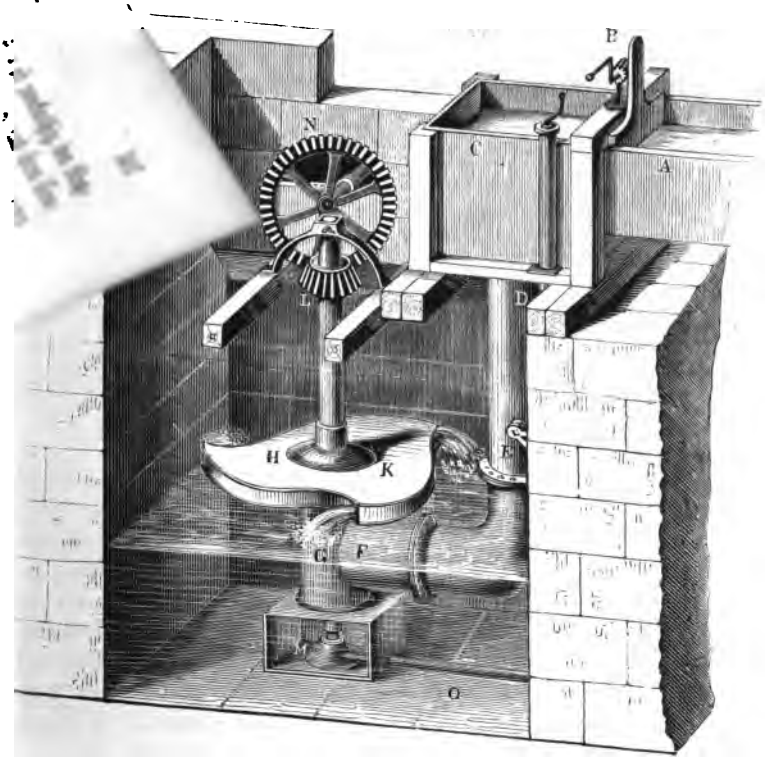
woraus sich der Durchmesser d der Röhrenleitung bestimmt:

$$d = 2\sqrt{\frac{G}{\pi\,h\,\gamma}}.$$

Bei der Einrichtung dieses Rades geht durch die plötzlichen Aenderungen der Richtungen des ein- und ausströmenden Wassers ein großer Theil der vorhandenen Arbeitstärke verloren. Durch eine entsprechende Krümmung der horizontalen Ausflußarme läßt sich dieser Verlust bedeutend herabziehen, so daß dergleichen Turbinen einen ziemlich großen Nutzeffect liefern, wobei noch die Einfachheit der Construction sehr zu Gunsten derartiger Turbinen spricht. Dieselben werden besonders in Schottland häufig angetroffen, weshalb sie auch schottische Turbinen oder, nach ihren ersten Constructeuren, Turbinen von Whitelaw und Stirrat heißen. In der folgenden Fig. 149 ist eine prak-

usgeführte ſchottiſche Turbine dargeſtellt. *A* iſt das Waſſerzuleitungs-
B ein Schutzbrett, *C* das Einfallreſervoir, aus welchem das Waſſer

Fig. 149.



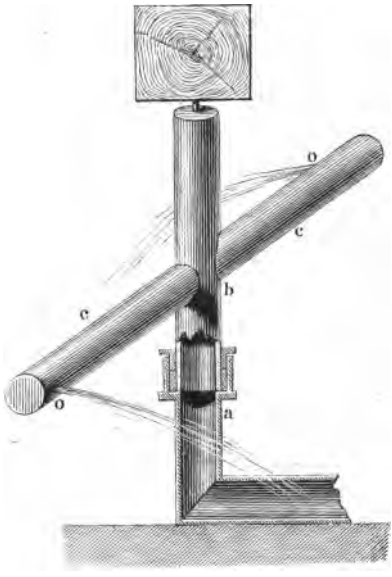
in die Einfallröhre *DEF* läuft. Bei *F* tritt das Waſſer in den feſtſtehenden Cylinder *G* und von da in das Reactionsrad *HK*, das auf der ſtehenden Welle *LM* befeſtigt iſt. Die Reaction des durch die Radöffnungen ſtrömenden Waſſers treibt die Turbine in entgegengeſetzter Richtung um, welche Bewegung mittelſt der coniſchen Räder auf zweckmäßige Weiſe übertragen wird. Das Rohr *O* führt die Schmiere zum unteren Zapfen, auf deſſen Conſtruction, Lagerung und Schmiervorrichtung bei allen Turbinen beſonders Gewicht gelegt werden muß.

Wird das Rad mit einer größeren Anzahl von umlaufenden Canälen conſtruirt, welche durch krumme, zwiſchen zwei ringförmigen Kränzen eingeſetzte Schaufeln gebildet werden, ſo daß je zwei aufeinander folgende Canäle ohne Zwiſchenraum neben einander liegen, ſo erhält man die eigentliche innere Turbine, da die beiden vorher angegebenen Ausführungen noch mit dem Namen Waſſerrad bezeichnet werden können. Dieſe inneren Turbinen ſind von Com-

in das Rad zu bewirken hat. Hiernach kann man die Turbinen noch in solche mit oder ohne Leitschaufel-Apparat unterscheiden.

1. Innere Turbinen. Das in Nro. 20 angeführte Segner'sche Wasserrad liefert im Princip die einfachste innere Turbine ohne Leitschaufel-Apparat, das sogenannte Reactionsrad. Führt man, wie es in der hier stehenden Fig. 148 angedeutet ist, das Wasser von unten in die horizontalen Arme *bc*, so ist der Reibungswiderstand an dem unteren Zapfen auf ein Minimum reducirt, und dieser hydraulische Motor ist in dieser Construction sehr wohl geeignet, zum Betriebe von Maschinen verwendet zu werden. Ein von dem Maschineninspector Althans nach diesem Princip construirtes Reactionsrad treibt zu Vallendar unweit Ehrenbreitstein eine Lohmühle. Der Durchmesser dieses Rades ist 7,5 Meter, die Höhe der Wassersäule in der Röhrenleitung, das Gefälle beträgt 29,5 Meter, und die in einer Minute zufließende Wassermenge 0,551 Meter. Die Anzahl der Umdrehungen pr. Minute war bei dem Betriebe 30. Die Ausflußöffnungen *oo* können nach Bedürfniß größer oder kleiner gemacht werden, jenachdem mehr oder weniger Wasser vorhanden ist. Wird das ganze Gewicht G der Maschine gleich dem Gewichte der drückenden Wassermasse gemacht, so wird an dem unteren Zapfen gar keine Reibung zu überwinden sein, und wir erhalten, wenn h das Gefälle und d den Durchmesser der Zuleitungsröhre a bezeichnet:

Fig. 148.



$$G = {}^1/_4 \pi d^2 h \gamma;$$

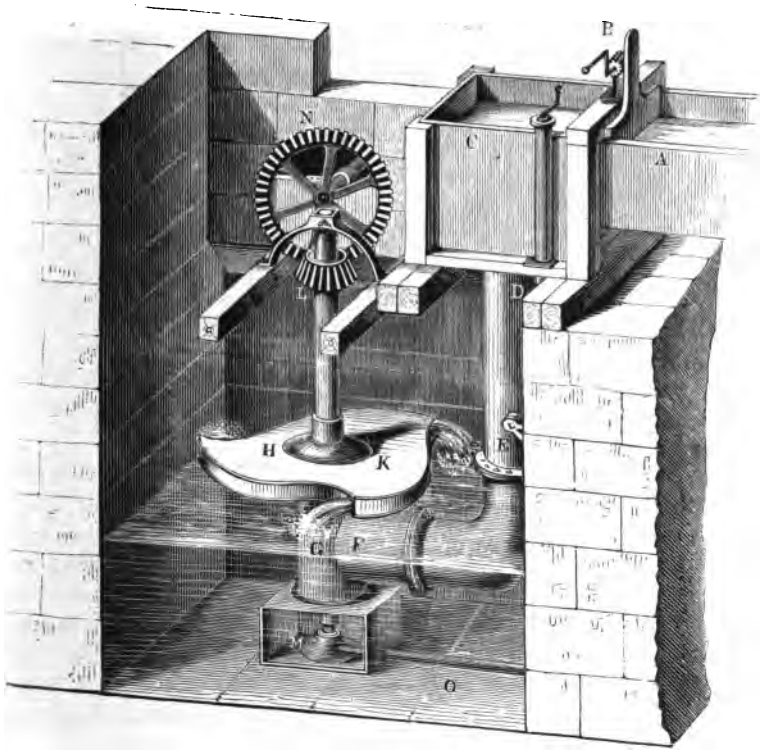
woraus sich der Durchmesser d der Röhrenleitung bestimmt:

$$d = 2\sqrt{\frac{G}{\pi h \gamma}}.$$

Bei der Einrichtung dieses Rades geht durch die plötzlichen Aenderungen der Richtungen des ein- und ausströmenden Wassers ein großer Theil der vorhandenen Arbeitstärke verloren. Durch eine entsprechende Krümmung der horizontalen Ausflußarme läßt sich dieser Verlust bedeutend herabziehen, so daß dergleichen Turbinen einen ziemlich großen Nutzeffect liefern, wobei noch die Einfachheit der Construction sehr zu Gunsten derartiger Turbinen spricht. Dieselben werden besonders in Schottland häufig angetroffen, weshalb sie auch schottische Turbinen oder, nach ihren ersten Constructeuren, Turbinen von Whitelaw und Stirrat heißen. In der folgenden Fig. 149 ist eine prak-

tisch ausgeführte schottische Turbine dargestellt. *A* ist das Wasserzuleitungsgerinne, *B* ein Schutzbrett, *C* das Einfallreservoir, aus welchem das Wasser

Fig. 149.

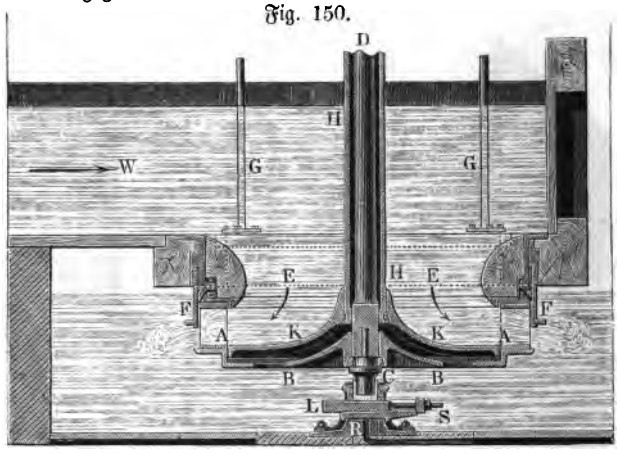


in die Einfallröhre *DEF* läuft. Bei *F* tritt das Wasser in den feststehenden Cylinder *G* und von da in das Reactionsrad *HK*, das auf der stehenden Welle *LM* befestigt ist. Die Reaction des durch die Radöffnungen strömenden Wassers treibt die Turbine in entgegengesetzter Richtung um, welche Bewegung mittelst der conischen Räder auf zweckmäßige Weise übertragen wird. Das Rohr *O* führt die Schmiere zum unteren Zapfen, auf dessen Construction, Lagerung und Schmiervorrichtung bei allen Turbinen besonders Gewicht gelegt werden muß.

Wird das Rad mit einer größeren Anzahl von umlaufenden Canälen construirt, welche durch krumme, zwischen zwei ringförmigen Kränzen eingesetzte Schaufeln gebildet werden, so daß je zwei aufeinander folgende Canäle ohne Zwischenraum neben einander liegen, so erhält man die eigentliche innere Turbine, da die beiden vorher angegebenen Ausführungen noch mit dem Namen Wasserrad bezeichnet werden können. Diese inneren Turbinen sind von Com-

bes und Cadiat ausgeführt worden, und zwar unterscheiden sich deren Constructionen dadurch von einander, daß bei Combes das Wasser von unten, bei Cadiat dagegen von oben in das Rad tritt. In Fig. 150 ist eine Ca-

Fig. 150.

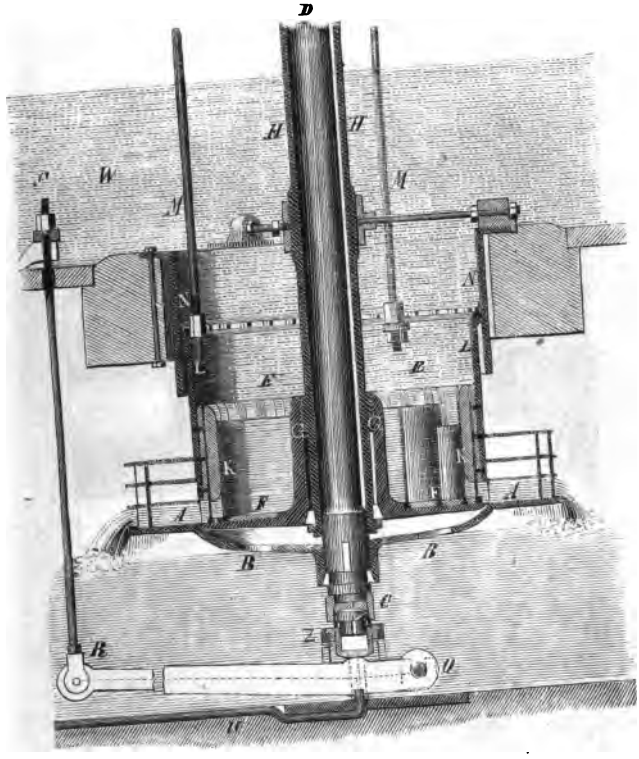


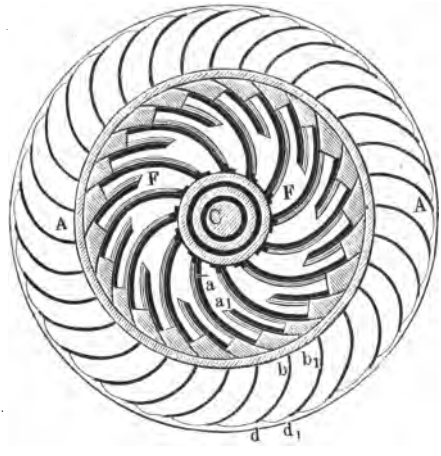
diat'sche Turbine im Durchschnitt dargestellt. AA ist das Turbinenrad durch den Teller BB mit der stehenden Welle CD fest verbunden. Das Wasser tritt aus dem Gerinne W in das Reservoir EE, welches einen kreisförmigen Querschnitt hat und unmittelbar über dem oberen Kranze der Turbine ausmündet. Der Ausfluß des Wassers wird durch eine das Turbinenrad von außen umgebende cylindrische Schütze FF regulirt, welche durch eine besondere Einrichtung auf- und niedergezogen werden kann. Die stehende Welle CD ist noch mit einer feststehenden Hülse HH umgeben, welche sich unten zu dem Teller KK erweitert, so daß das Wasser nach unten abgesperrt ist und auf den Radteller BB nicht zu drücken vermag.

Denkt man diesen feststehenden Teller KK, ähnlich wie die Turbine, aus mehreren Canälen durch aufgesetzte Schaufeln construirt, so wird das Wasser allmälig in die Turbine übergeleitet und wir erhalten die vollkommenste innere Turbine mit Leitschaufel-Apparat, welche zuerst von Fourneyron ausgeführt worden ist, und die entweder in freier Luft oder unter Wasser gehen kann. Fließt das Wasser, wie Fig. 151 zeigt, in das oben offene Ausflußreservoir mit freier Oberfläche zu, so hat man eine Niederdruckturbine, wird dagegen das Wasser bei oben verschlossenem Ausflußreservoir durch die Einfallröhre von der Seite zugeführt, so heißt die Turbine eine Hochdruckturbine (Fig. 152). Aus dem bei Fig. 151 angegebenen Grundriß ist die Construction des Turbinenrades A mit den Schaufeln $bd, b_1 d_1$, sowie des Leitschaufel-Apparates F, mit den feststehenden Canalbegrenzungen ab, $a_1 b_1$ zu ersehen. Die Regulirung geschieht durch die cylindrische Schütze $KLLK$, welche den Zufluß des Wassers aus dem Leitschaufelapparat F in das Turbinenrad regelt, indem die im Innern des Cylinders $KLLK$ aufge-

Uebungen.

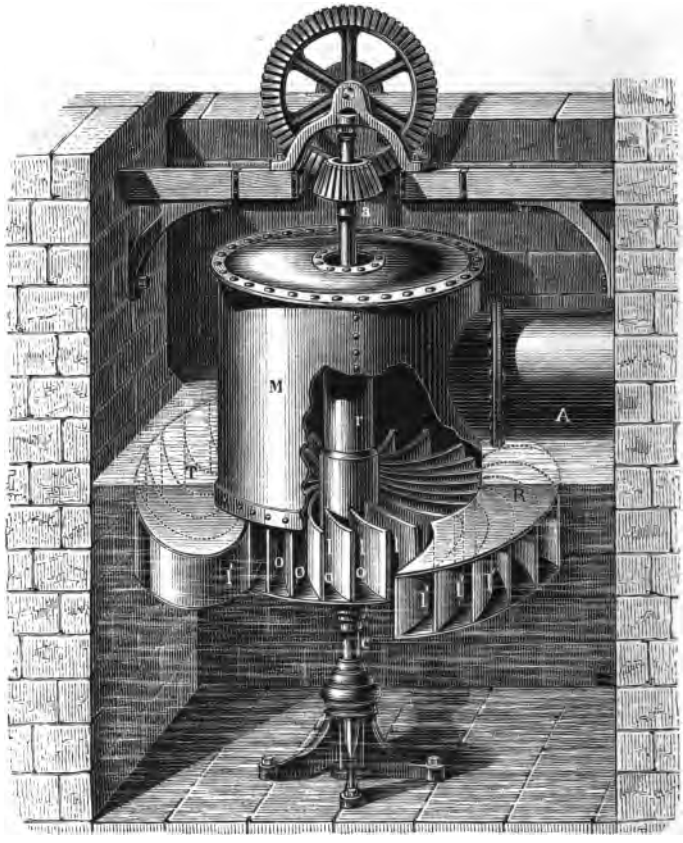
Fig. 151.





ſchraubten Holz- oder Metallſtücke *KK*... in die Zwiſchenräume des Leitſchaufel-Apparates treten und dem Waſſer unter der abgerundeten Kante den Zutritt

Fig. 152.



in das Turbinenrad geſtatten. Das Letztere ſtimmt im Allgemeinen mit der Cadiat'ſchen Turbine überein, oder kann auch, wie in der Figur 151 angenommen worden iſt, aus mehreren übereinander liegenden, durch horizontale Böden getrennten einzelnen Turbinen, ſogenannten Etagen beſtehen, ſo daß das Waſſer je nach der gerade vorhandenen Quantität in einer oder mehreren Etagen zu gleicher Zeit zur Wirkung gelangt.

2. Aeußere Turbinen. Die erſte Idee zur äußeren Beaufſchlagung eines horizontalen Waſſerrades iſt von Poncelet im Jahre 1826 ausgegangen, die erſten praktiſchen Conſtructionen ſind dagegen vom Ingenieur Zupinger in der Maſchinenfabrik von Eſcher, Wyſſ und Comp. in Zürich ausgeführt worden. Dieſe Poncelet'ſchen Turbinen oder Tangentialräder haben

einen aus 3 Canälen bestehenden Leitschaufel-Apparat *C* Fig. 153, aus dem das Wasser nahezu tangential in das Rad *FF* geleitet wird. Der durch Rad

Fig. 153.

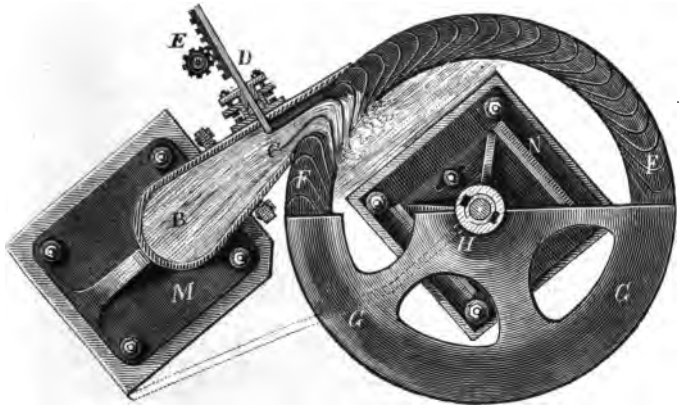
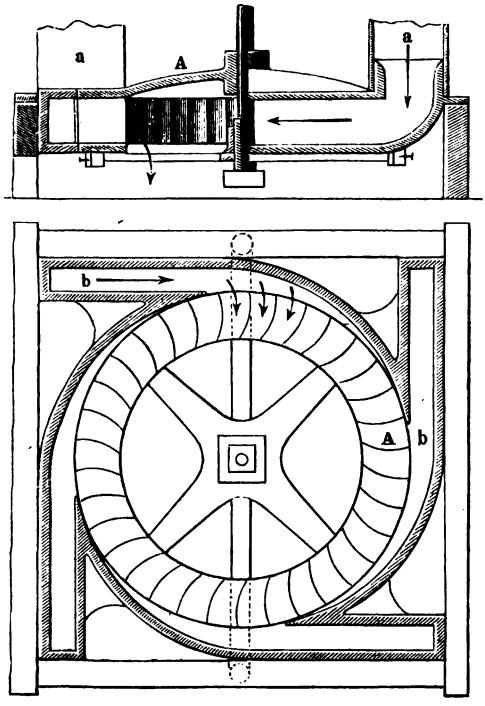


Fig. 154.



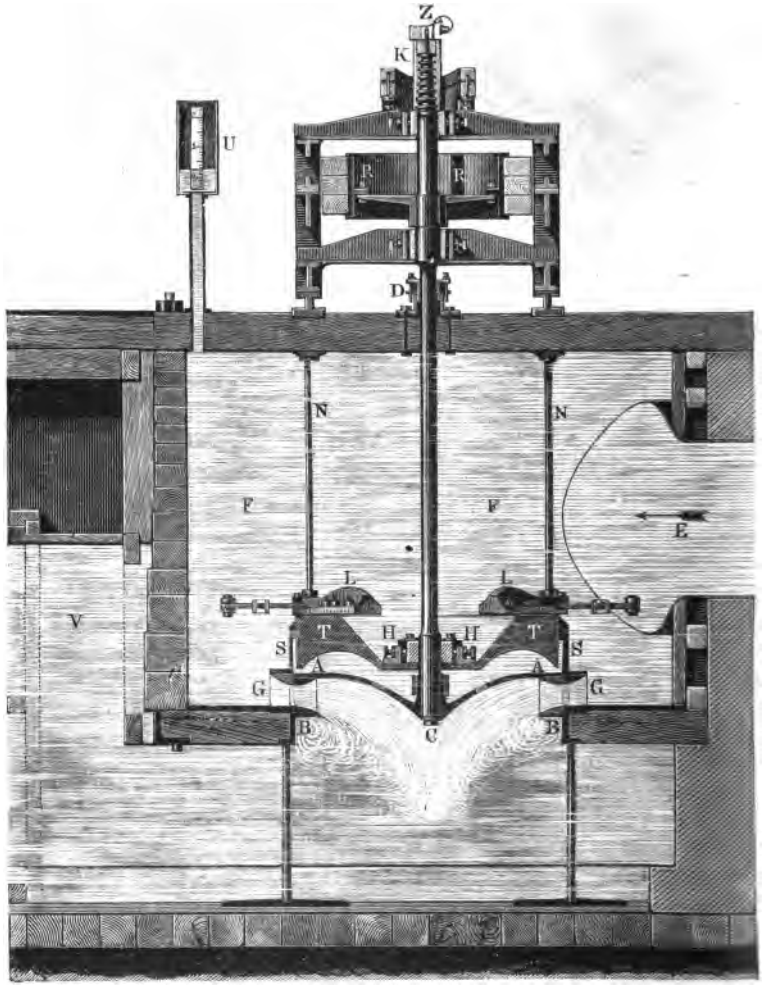
und Zahnstange bewegliche Schieber *D* dient zum Abschließen von 1, 2 oder 3 Canälen, in welchem letzteren Falle das Rad zum Stehen gebracht wird. Das aus 60 Schaufeln bestehende Rad *FF* ist durch den Deckel *GG* und der Muffe *H* mit der stehenden Welle fest verbunden, so daß die Bewegung des Rades die der Welle zur Folge hat. Das Wasser tritt aus dem Zuleitungscanale in die Einfallröhre *B* und gelangt aus dieser in den Leitschaufel-Apparat *C*.

Die von James Martin construirte und in Figur 154 dargestellte äußere Turbine zeigt einen sehr einfach construirten

Directions-Apparat. Das Waſſer wird aus dem Zuleitungs-Canale durch vier verticale Röhren a, a in die vier horizontalen Leitcanäle b, b geleitet, von wo aus es zwiſchen die Schaufeln der Turbine A gelangt. Da das Waſſer von vier Seiten in das Rad tritt, iſt jeder Druck auf die Welle aufgehoben.

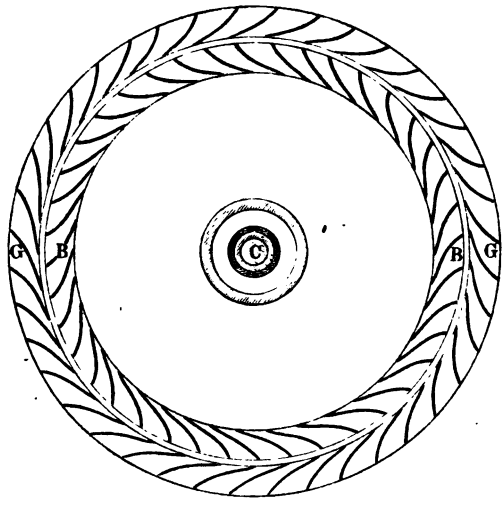
Die mit einem vollſtändigen Leitſchaufel-Apparat verſehenen äußeren Turbinen ſind zuerſt von dem Amerikaner Francis in rationeller Weiſe hergeſtellt worden. Fig. 155 zeigt eine derartige Turbine im Durchſchnitt, und Fig. 156

Fig. 155.



stellt den Grundriß der Turbine B mit Leitschaufel-Apparat G vor. Durch das seitwärts mündende Rohr E wird das Wasser aus dem Zuleitungsrohre

Fig. 156.

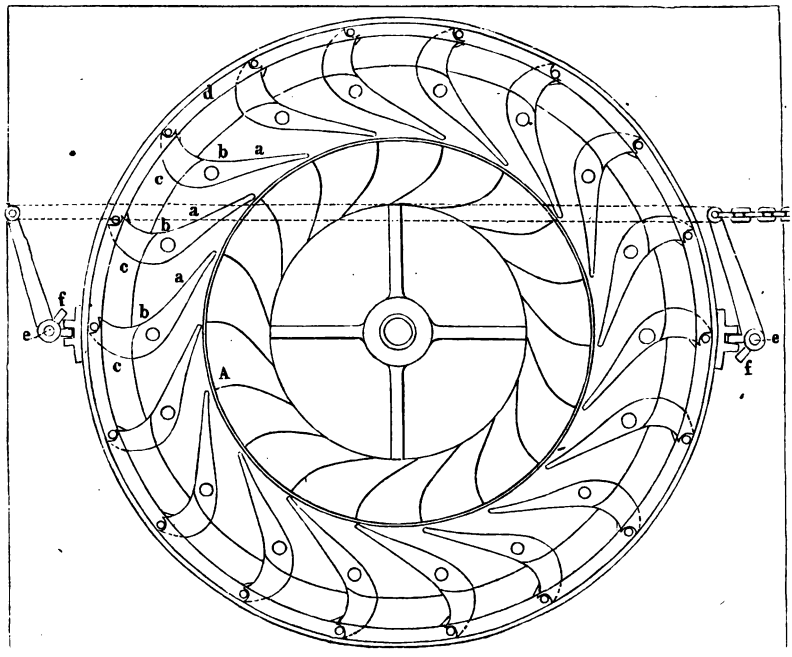


in den oben geschlossenen Radkasten FF geführt, dessen Deckel noch bis 2 Meter unter der Oberfläche des Oberwasserspiegels liegt. Der Radteller ACA hat eine glockenförmige Gestalt, ist von unten auf die Welle CD geschoben und an derselben entsprechend befestigt. Durch den Deckel TT wird der Radteller ACA von dem Drucke des darüber stehenden Wassers geschützt. Die cylindrische Schütze SS bewegt sich in einem zwischen der Turbine und dem Leitschaufel-Apparate frei gelassenen Spielraume und legt sich oben mittelst Lederliderung an den genau abgedrehten Umfang des Schutzdeckels TT an.

Die Unvollkommenheit der angedeuteten Schützvorrichtung, sowie der Umstand, daß bei theilweise geschlossenem Leitschaufel-Apparate der Wasserzufluß unter ungünstigen Verhältnissen stattfindet, hat Anlaß zur Construction von beweglichen Leitschaufel-Apparaten gegeben. Die erste derartige Construction ist dem Professor Fink in Berlin im Jahre 1859 patentirt worden, und ist die Einrichtung aus der Fig. 157 (a. f. S.) zu ersehen. Die Leitschaufeln a sind massiv ausgeführt und um feste Achsen b drehbar. Die Drehung der Leitschaufeln erfolgt mit Hülfe der an den Schaufeln befestigten Arme c, welche gegen Stifte des Ringes d sich anlegen. Zur Ausführung dieser Drehung dienen die beiden stehenden Wellen e, welche am oberen Ende mit zwei gleich langen und gleich gerichteten Armen versehen sind, deren Enden eine Zugstange verbindet, an die sich eine Kette anschließt, so daß also die Winkelbewegung der einen Welle in gleichem Maaße auf die andere übertragen wird. Die unteren Enden dieser

Welle tragen je ein Zahnradſtück *f* mit zwei Zähnen, welche in zwei andere an dem Ringe *d* befeſtigte Zähne eingreifen. Da hiernach alle Leitſchaufeln

Fig. 157.



gleichzeitig und um gleiche Winkel gedreht werden, ſo behalten die Zuflußcanäle auch bei etwaiger Drehung der Leitſchaufeln ihre vortheilhafte Geſtalt. Der Drehpunkt der Leitſchaufeln iſt ſo angeordnet, daß der Waſſerdruck dieſelben

Fig. 158.

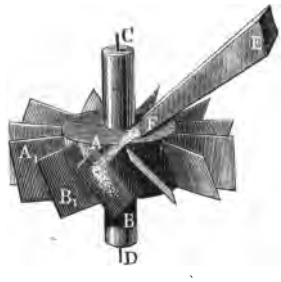
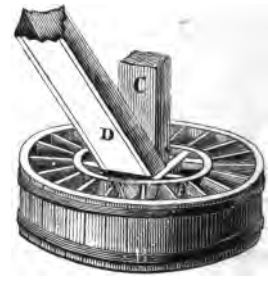


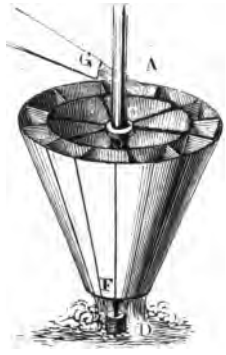
Fig. 159.



gegen die Turbine hindrängt, so daß sich der Arm *c* einer jeden Schaufel jederzeit fest an den zugehörigen Stift des Ringes *d* anlegt. Ein über die Turbine *A* gelegter Deckel nimmt den ganzen Wasserdruck auf, und hat der Spurzapfen deshalb nur das Gewicht von Turbine und Welle zu tragen.

3. Axial-Turbinen. Die einfachsten, jedoch auch unvollkommensten Axial-Turbinen sind die sogenannten Stoßräder, deren Einrichtung sich aus Fig. 158 hinlänglich ergiebt. Will man mit diesen einfachen Rädern einen größeren Effect erzielen, so muß man den Stoß des Wassers zu vermeiden suchen und deshalb den Schaufeln eine gehörige Krümmung geben, sowie dieselben auch von außen durch einen Cylindermantel begrenzen. Die so hergestellten Räder heißen Borda'sche Turbinen, und ist eine derartige in Fig. 159 dargestellt. *AB* ist eine gekrümmte Schaufel, *C* die stehende Welle des Rades und *D* die unter 45° geneigte Einfallsröhre für das Wasser. Das Wasser wirkt hier vorzüglich durch Druck, indem es an den gekrümmten Schaufeln niederfließt. Hierher gehören auch noch die sogenannten Danaiden, welche, wie Fig. 160 zeigt, die Form eines abgestumpften Kegels haben. Auf der stehenden Welle *C* sind zwei Kegelmäntel mit Scheidewänden befestigt, welche den zwischen den Mänteln vorhandenen hohlen Raum in von oben nach unten laufende Canäle zerlegen. Das Wasser tritt durch ein Gerinne oben ein und strömt, nachdem es die Canäle durchlaufen, durch das Loch *F* in der Nähe der Achse aus; es hat demnach Centrifugalkraft und Schwerkraft Einfluß auf die Bewegung des Wassers. Eine viel bessere Ausnutzung der Wasserkraft erlangt man bei Anwendung der Schrauben-Turbine Fig. 161 (a. f. S.). Das Rad *AA* ist aus Gußeisen und besteht aus zwei schraubenförmigen Schaufeln, die auf einer über die Turbinenwelle geschobene Hülse *B* sitzen.

Fig. 160.



Die vollkommenste Axialturbine ist jedoch die von dem Oberbergrath Henschel zu Cassel zuerst construirte Turbine (Fig. 162), welche mit einem über dem Turbinenrade *A* liegenden Leitschaufel-Apparat *K* versehen ist. Das Wasser fließt in den durch krumme Schaufeln gebildeten Canälen durch das Rad und kommt deshalb, ebenso wie bei der Schraubenturbine, die Schwerkraft des Wassers fast allein zur Wirksamkeit. Das Rad *AA* ist durch den Radteller *BB* an der hohlen Welle *CCDD* befestigt, welche die feststehende Säule *EF* umläuft. Der Zapfen der Welle findet sich demnach bei *S*, und die Weiterführung der Bewegung geschieht durch die über dem Auge *G* eingesetzte Welle *H*. Der Leitschaufel-Apparat *KK* ist an den Balken *LL* befestigt, der mit *KK* verbundene Teller *MM* enthält das eine Lager, und bei *DD* findet sich das zweite

Fig. 161.

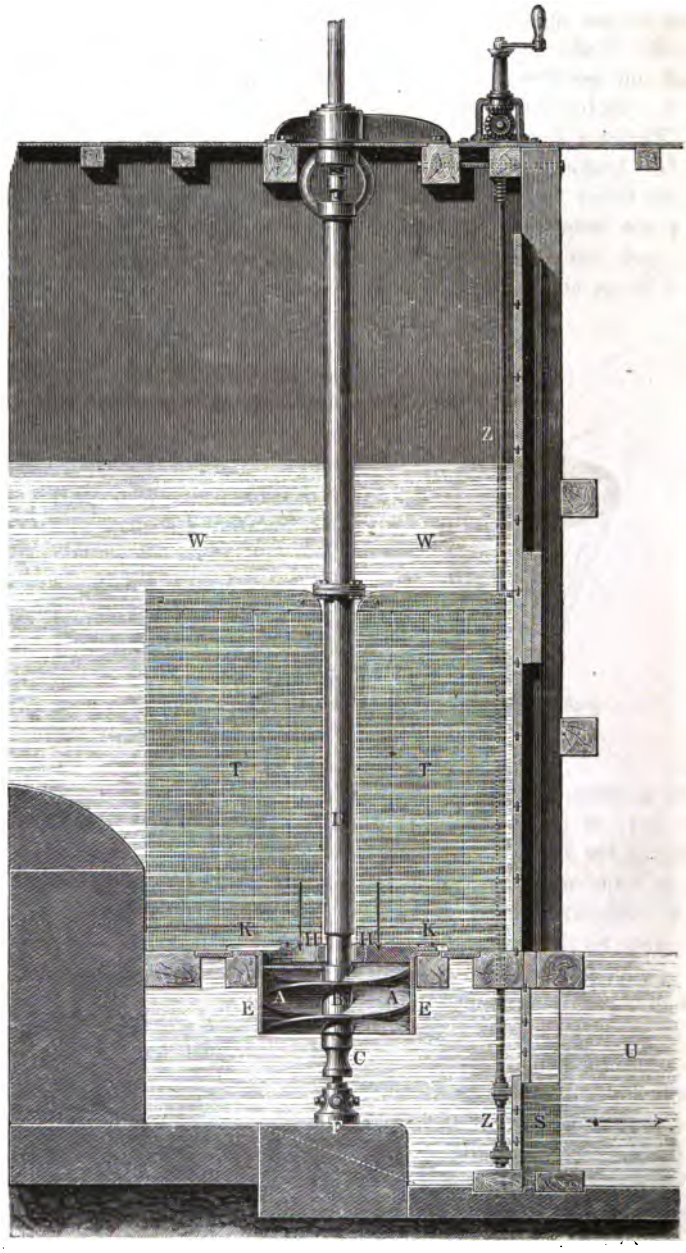


Fig. 162.

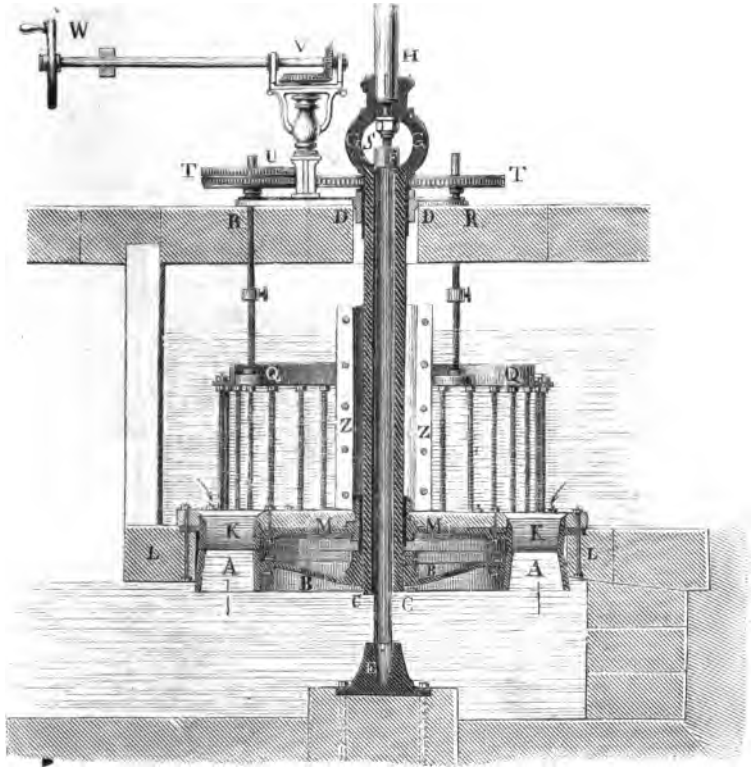
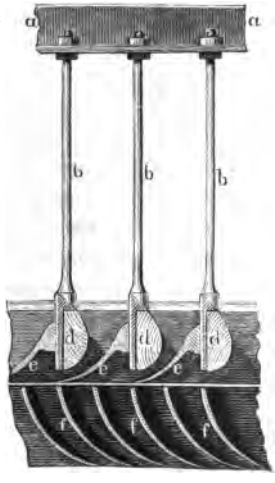


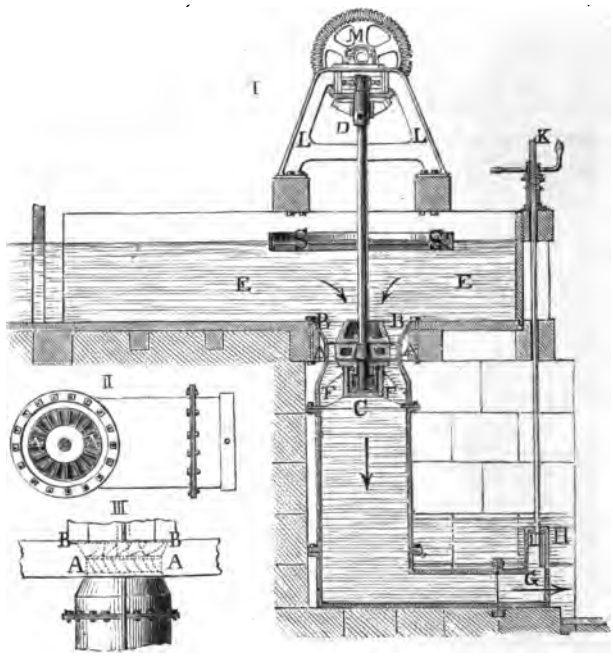
Fig. 163.



Lager zur ſicheren Führung der Turbinenwelle. Die Form der Leitſchaufeln *e, e* und der Radſchaufeln *f, f* iſt aus Fig. 163 zu erſehen. Der zum Reguliren dienende Schützenapparat beſteht aus ſo vielen einzelnen Schützen *d, d* ..., als das Rad Leitſchaufeln hat, und ſämmtliche Schützenſtangen *b, b* ... ſind durch einen eiſernen Ring *a, a* feſt mit einander verbunden, welcher durch das Räderwerk mittelſt dreier Zugſtangen *R* gehoben und geſenkt werden kann. Dieſe Aufſtellung der Henſchel'ſchen Turbine iſt nur bei kleinem Gefälle zu

empfehlen, bei großem Gefälle befestigt man die Turbine in einem Rohre zwischen dem Ober- und Unterwasserspiegel (Fig. 164). Das durch das Tur-

Fig. 164.



binenrad *AA* fließende Wasser steht einmal unter dem Drucke der Wassersäule vom Oberwasserspiegel bis *AA*, andererseits vermindert aber die unter dem Turbinenrade stehende, bis zum Unterwasserspiegel reichende Wassersäule den Druck der atmosphärischen Luft gegen das Turbinenrad, d. h. aber, der Druck der auf dem Rade lastenden Wassersäule wird um die letztere Wassersäule (Saughöhe) vermehrt, so daß hier ebenfalls als Druckhöhe die Entfernung des Ober- vom Unterwasserspiegel einzuführen ist. Damit die untere Wassersäule unter allen Umständen durch den Druck der Atmosphäre getragen wird, darf die Entfernung des Turbinenrades von dem Unterwasserspiegel höchstens 8 Meter betragen. Innerhalb dieser Grenze leistet diese Aufstellung vortreffliche Dienste, indem die Räder am oberen Ende des Rohres angebracht werden können, also leicht zugänglich sind, leicht eingesetzt und wieder herausgezogen werden können. Die Turbinenaxe kann kurz und leicht sein, die relative Lage der Räder gegen den Mantel ist vollkommen gesichert, kostspielige Fundamentirungen sind dadurch vermieden. Durch die bei *G* angeordnete Schütze wird der Wasserabfluß, also auch die von der Turbine verbrauchte Wassermenge regulirt.

29. Berechnung einer inneren Turbine mit Leitschaufelapparat.

Es sei Q die in einer Secunde der Turbine zufließende Wassermenge in Kubikmetern, H das Gefälle, d. i. die Entfernung des Ober- vom Unterwasserspiegel. Für diese Annahme ist die absolute Arbeitstärke

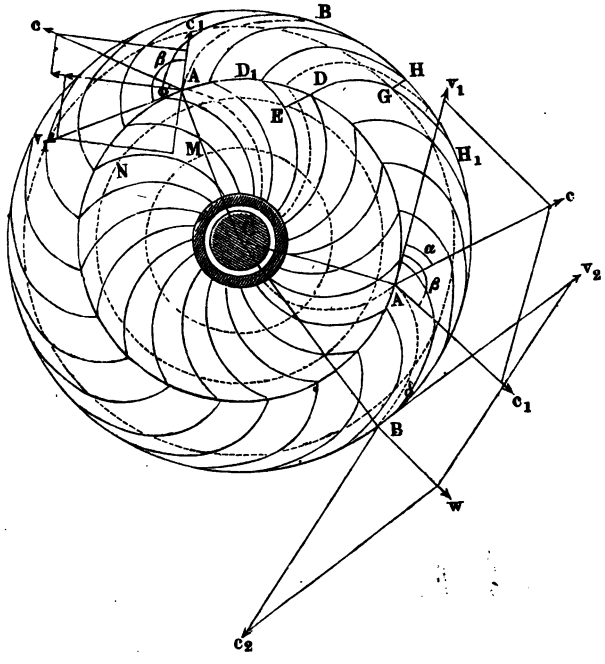
1) $L_a^{=} = Q H \gamma$ Kubikmeter.

Bezeichnen wir mit F die Summe der Querschnitte aller Oeffnungen am Leitschaufel-Apparate, mit F_1 die Summe der Querschnitte der Radcanäle am inneren Umfange des Rades, mit F_2 die Summe dieser Querschnitte am äußeren Umfange des Rades, in Quadratmetern, so ist, wenn die betreffenden Wassergeschwindigkeiten c, c_1, c_2 heißen, und die Contractionscoefficienten r und r_2 genannt werden,

2) $Q = r F c = F_1 c_1 = r_2 F_2 c_2$.

Es seien n Leitschaufeln und n_1 Radschaufeln vorhanden, $a = DE$, Fig. 165, die normale Entfernung zweier benachbarten Leitschaufeln beim

Fig. 165.



Eintritt in das Rad, $a_2 = GH$ der normale Abstand von zwei auf einander folgenden Radschaufeln beim Wasseraustritt, und a_1 der normale Abstand zweier benachbarten Radschaufeln beim Wassereintritt, endlich e, e_1 und e_2 die Höhen

des Leitschaufelcanals und der Radschaufelcanäle an der Ein- und Austrittsstelle des Wassers, dann ist unter der Voraussetzung einer vollkommenen Anfüllung der Leitschaufel- und Radcanäle für den Beharrungszustand der Maschine

$$3)\quad \begin{cases} F = a\,e\,n \\ F_1 = a_1\,e_1\,n_1 \\ F_2 = a_2\,e_2\,n_2. \end{cases}$$

Die Peripheriegeschwindigkeiten der Turbine seien beim Eintritt A und Austritt B des Wassers v_1 und v_2, dabei bilde die Geschwindigkeit c des aus dem Leitschaufel-Apparat austretenden Wassers mit v_1 den Winkel α, die Geschwindigkeit c_1 des in die Turbine eintretenden Wassers bilde mit v_1 den Winkel β und die Geschwindigkeit c_2 des aus der Turbine abfließenden Wassers bilde mit v_2 den Winkel δ, worunter wir den spitzen Winkel verstehen wollen. Man zerlege c und v_1 nach Richtung des ersten Radschaufelelementes und normal dazu, dann sind die Normal-Componenten $c \sin(\beta - \alpha)$ und $v_1 \sin\beta$. Bei der Ueberführung des Wassers aus dem Leitschaufel-Apparate in die Turbine muß hiernach $c \sin(\beta - \alpha)$ plötzlich auf die Geschwindigkeit $v_1 \sin\beta$ gebracht werden, d. h. es geht die Geschwindigkeit $c \sin(\beta - \alpha) - v_1 \sin\beta$ verloren. Diesem Verlust an Geschwindigkeit entspricht aber ein Verlust an lebendiger Kraft, welcher vermieden werden soll, weshalb wir $c \sin(\beta - \alpha) = v_1 \sin\beta$ setzen müssen. Berücksichtigt man weiter, daß die Componenten in Richtung von c_1 gleich $c \cos(\beta - \alpha) - v_1 \cos\beta$ gleich c_1 sein müssen, so erhalten wir:

$$4)\quad \begin{cases} \dfrac{v_1}{c} = \dfrac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\beta} \\ \dfrac{c_1}{c} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} \\ c^2 = c_1^2 + v_1^2 + 2\,c_1\,v_1 \cos\beta, \end{cases}$$

d. h. die Geschwindigkeit c des aus dem Leitschaufel-Apparat tretenden Wassers muß die Resultante aus der Peripheriegeschwindigkeit v_1 und der Wassergeschwindigkeit c_1 am ersten Radschaufelelement sein.

Beim Austritt des Wassers aus der Turbine ergiebt sich aus c_2 und v_2 die resultirende Geschwindigkeit w

$$w^2 = c_2^2 + v_2^2 - 2\,c_2\,v_2 \cos\delta.$$

Die dieser Geschwindigkeit entsprechende lebendige Kraft $\dfrac{Q\gamma}{2g} w^2$ geht für die nutzbare Arbeit verloren, weshalb man $w = 0$ setzen müßte. Da das unmöglich ist, wenn das Wasser überhaupt abfließen soll, so muß man wenigstens w zu einem Minimum machen. Bei constantem c_2 und δ haben wir:

$$\frac{fv - fv'}{v - v'} = v + v' - 2\,c_2 \cos\delta,$$

wenn wir daher zur Grenze übergehen, diesen Ausdruck gleich Null und $v = v'$ setzen, so ist v d. h. $v_2 = c_2 \cos\delta$. Hiernach ergiebt sich:

$$5)\quad \begin{cases} v_2 = c_2 \cos\delta \\ w = c_2 \sin\delta \\ c_2^2 = v_2^2 + w^2, \end{cases}$$

v_2 und w müssen deshalb mit einander einen rechten Winkel bilden, die Richtung der Austrittsgeschwindigkeit w ist also eine radiale.

Arbeitet die Turbine unter Wasser, so sei h die Entfernung des Unterwasserspiegels von der Ebene, in welcher die Mittelpunkte der Oeffnungen der Radcanäle liegen, q der Druck pro Quadratmeter der äußeren Luft und p_x der Druck in der ringförmigen Spalte, zwischen dem Leitschaufel-Apparat und der Turbine. Dieser Spaltendruck ist von der Construction der Turbine, ihrer Geschwindigkeit und dem Gefälle abhängig. Die der Wassergeschwindigkeit c entsprechende Druckhöhe ist dann

$$\frac{q}{1000} + H + h - \frac{p_x}{1000},$$

oder wenn die Turbine über dem Unterwasserspiegel aufgestellt ist

$$\frac{q}{1000} + H - h - \frac{p_x}{1000}$$

und deshalb

$$6)\quad \begin{cases} c^2 = 2g\left(H \pm h + \frac{q - p_x}{1000}\right) \text{ und} \\ \frac{p_x}{1000} = \frac{q}{1000} + H \pm h - \frac{c^2}{2g}. \end{cases}$$

Dem Ausfließen des Wassers aus der Turbine tritt der Druck q der äußeren Atmosphäre entgegen, wenn dieselbe aber unter Wasser arbeitet, so wird derselbe noch durch den Druck der Wassersäule von der Höhe h vermehrt. Der Ueberdruck zwischen Ein- und Austritt des Wassers in der Turbine ist deshalb gleich dem Gewicht einer Wassersäule von der Höhe h_1

$$7)\quad \begin{cases} h_1 = \frac{p_x - q}{1000} - h = H - \frac{c^2}{2g} \\ h_1 = \frac{p_x - q}{1000} + h = H - \frac{c^2}{2g}. \end{cases}$$

Die Nutzwirkung des Wassers, während es die Turbine durchläuft, wird nun hervorgerufen durch die Differenz der Pressungen, die das Wasser gegen die concaven und gegen die convexen Flächen der Radcurven ausübt. Diese Pressungen entstehen aus der lebendigen Kraft des Wassers, welche dasselbe beim Eintritt in die Turbine besitzt, aus dem Ueberdruck des Wassers an der Eintrittsstelle in Bezug auf den Druck an der Austrittsstelle des Rades und aus der Centrifugalkraft.

Die Arbeit, welche die Centrifugalkraft entwickelt, während ein Wasser-

theilchen von der Masse m von dem inneren Umfange des Rades bis an den äußeren gelangt ist, wenn wir den inneren Turbinenhalbmesser mit R_1, den äußeren mit R_2 und die stattfindende Winkelgeschwindigkeit mit ω bezeichnen, nach Seite 90 Thl. I., gleich $^1/_2 m \omega^2 (R_2^2 - R_1^2)$. Mit Benutzung dieses Werthes erhalten wir die Gleichung für die Nutzwirkung des Wassers beim Strömen durch die Turbine, wenn wir statt der Winkelgeschwindigkeit ω die Peripheriegeschwindigkeiten v_1 und v_2 einführen,

$$^1/_2 m (c_2^2 - c_1^2) = ^1/_2 m (v_2^2 - v_1^2) + m g h_1.$$

Die Gleichung ändert sich nicht, wenn wir statt des Wassertheilchens von der Masse m die pro Secunde auf die Turbine fließende Wassermasse von der Masse $\frac{1000\ Q}{g}$ einsetzen. Es ist demnach, da sich die Masse als gemeinschaftlicher Factor weghebt,

$$8)\quad c_2^2 - c_1^2 = v_2^2 - v_1^2 + 2 g h_1.$$

30. Die in vorstehender Nummer entwickelten 8 Gleichungen genügen zur Beurtheilung einer inneren Turbine. Durch zweckmäßige Annahme von einigen in den Ausdrücken vorkommenden Werthen können praktisch brauchbare Resultate abgeleitet werden. (Siehe Theorie der Turbinen, Kreiselpumpen und Ventilatoren von R. R. Werner, Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. 13). Die dem Ueberdruck beim Uebergange des Wassers aus dem Leitschaufel-Apparate in die Turbine entsprechende Wasserhöhe h_1 (Formel 7), kann Null positiv oder negativ sein. Für den Fall, daß $h_1 = 0$, ist $c = \sqrt{2gH}$, d. h. die ganze Druckhöhe H findet auf Erzeugung der Geschwindigkeit c Verwendung, und das in die Turbine getretene Wasser steht nicht außerdem noch unter einem hydrostatischen Druck. Indem das Wasser nun gegen die concave Seite der Radschaufeln einen Druck ausübt, muß die erhaltene Geschwindigkeit c in nutzbaren Druck zurückverwandelt werden, und deshalb heißen diese Turbinen Druckturbinen. Hat dagegen h_1 einen positiven Werth, so ist $c < \sqrt{2gH}$, das Oberwasser drückt daher noch theilweise auf das Turbinenwasser, und es ist hier nicht nothwendig, den ganzen hydrostatischen Druck, sondern nur einen Theil desselben zuerst in Geschwindigkeit und diese wieder in nutzbaren Schaufeldruck umzuwandeln. Da mit einer solchen Umwandlung jederzeit ein Arbeitsverlust verbunden ist, so werden die letzteren Turbinen einen größeren Nutzeffect als die Druckturbinen besitzen. Wegen der Reaction, die das Turbinenwasser auf das Wasser im Leitschaufel-Apparat ausübt, wenn das erstere noch unter einem gewissen hydrostatischen Druck steht, nennt man diese Turbinen Reactions-Turbinen. Der Fall, in welchem h_1 negativ wird, findet keine praktische Anwendung, weshalb wir in dem Folgenden h_1 jederzeit als positiv voraussetzen. Die dem Gefälle H entsprechende Geschwindigkeit bezeichnen wir mit c_0, und sehen den Quotienten $\frac{c_0}{c} = m$, Reactionsgrad genannt, bei jeder Turbine als gegeben an. Für Druckturbinen ist hiernach $m = 1$, für Reactionsturbinen ist dagegen $m > 1$.

Für die Austrittsgeschwindigkeit w des Wassers aus der Turbine haben wir in Formel 5 gefunden, daß dieselbe eine radiale Richtung habe und daß sie möglichst klein sein muß. Wir stellen dieselbe zu der ideellen Geschwindigkeit c_0 in Verhältniß und setzen $\frac{c_0}{w} = t$.

Es ist nach Formel 4 und 5:

$$c_2^2 = v_2^2 + w^2 = v_1^2 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 + w^2 = c^2 \frac{\sin(\beta-\alpha)^2}{\sin\beta^2}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 + w^2$$

$$= \left(\frac{1}{m}\right)^2 c_0^2 \frac{\sin(\beta-\alpha)^2}{\sin\beta^2}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{t}\right)^2 \cdot c_0^2,$$

daher

$$\left(\frac{c_2}{c_0}\right)^2 = \left(\frac{1}{m}\,\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta}\,\frac{R_2}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{t}\right)^2.$$

Weiter ist nach Formel 8:

$$c_2^2 - c_1^2 = v_2^2 - v_1^2 + 2gH - c^2,$$

$$c_0^2\left\{\left(\frac{1}{m}\,\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta}\cdot\frac{R_2}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{t}\right)^2\right\} - c_0^2\left(\frac{1}{m}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{m}\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta}\,c_0\right)^2\left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 1\right] + c_0^2 - \left(\frac{c_0}{m}\right)^2,$$

daher

$$\left(\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta}\cdot\frac{R_2}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{t}\right)^2 - \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta}\right)^2\left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 1\right] + m^2 - 1$$

$$m^2\frac{t^2-1}{t^2} = 1 - \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^2 + \left(\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta}\right)^2 = 1 + \frac{\sin\beta\sin(\beta-2\alpha)}{\sin\beta^2}$$

$$= \frac{2\sin(\beta-\alpha)\cos\alpha}{\sin\beta} \quad \text{a)}$$

$$v_1^2 = c^2\left(\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta}\right)^2 = \left(\frac{c_0}{m}\right)^2 \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta}\cdot m^2\,\frac{t^2-1}{2t^2}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\left(\frac{v_1}{c_0}\right)^2 = \frac{t^2-1}{2t^2}\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta\cos\alpha} \quad \text{b)}$$

$$\left(\frac{v_2}{c_0}\right)^2 = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\cdot\frac{t^2-1}{2t^2}\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta\cos\alpha} \quad \text{c)}$$

$$c_1 = v_1\,\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$$

$$\left(\frac{c_1}{c_0}\right)^2 = \frac{t^2-1}{2t^2}\cdot\frac{\sin\alpha^2}{\sin\beta\cos\alpha\sin(\beta-\alpha)} \quad \text{d)}$$

$$\left(\frac{c_2}{c_0}\right)^2 = \frac{t^2-1}{2t^2} \cdot \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta\cos\alpha} \cdot \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{t}\right)^2 \quad \text{e)}$$

$$\cot g\,\delta^2 = \left(\frac{v_2}{w}\right)^2 = \left(\frac{v_2}{c_0}\right)^2 \cdot \left(\frac{c_0}{w}\right)^2 = \left(\frac{v_2}{c_0}\right)^2 \cdot t^2$$

$$= \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \frac{t^2-1}{2} \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta\cos\alpha} \quad \text{f)}$$

Die Geschwindigkeit c_1 des Wassers beim Durchfließen desselben durch die Turbine muß so klein als möglich gehalten werden, da die Reibung in quadratischem Verhältniß mit der Geschwindigkeit wächst. Der Werth von c_1 hängt aber nach Formel *d*, bei gegebenem t von dem Factor $\frac{\sin\alpha^2}{\sin\beta\cos\alpha\sin(\beta-\alpha)}$ ab. Für gegebenen Winkel α wird dieser Ausdruck und damit c_1 zu einem Minimum, wenn $\sin\beta\sin(\beta-\alpha)$ ein Maximum ist. Zur Bestimmung desselben ist $\sin\beta\sin(\beta-\alpha) =$

$$\sin\beta^2\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta\sin\alpha = \cos\alpha\frac{1-\cos 2\beta}{2} - \tfrac{1}{2}\sin 2\beta\sin\alpha$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{\cos\alpha - (\cos 2\beta\cos\alpha + \sin 2\beta\sin\alpha)\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{\cos\alpha - \cos(2\beta-\alpha)\right\}.$$

Dieser Ausdruck wird zu einem Maximum, wenn $\cos(2\beta-\alpha)$ gleich -1, $2\beta-\alpha$, also gleich 180^0 gesetzt wird. Die Bedingung der kleinsten Geschwindigkeit c_1 ist daher $2\beta-\alpha = 180$ oder

$$\beta = 90 + \frac{\alpha}{2} \quad \text{g)}$$

Außerdem nehme man α nahe an 30^0, $\frac{R_2}{R_1} = \frac{3}{2}$, $t^2 = 13$. Zur Bestimmung des inneren Turbinenhalbmessers erwäge man, daß derselbe etwas größer sein muß, wie der Halbmesser des Wasserzuführungsrohres. Da der Letztere aber durch die in einer Secunde zuzuführende Wassermenge Q bestimmt ist, so kann man den inneren Turbinenquerschnitt πR_1^2 dem Wasserverbrauch Q proportional setzen, und zwar mit Redtenbacher nehmen $\frac{Q}{\pi R_1^2} = 1{,}11$, d. h.

$$R_1 = \sqrt{\frac{2}{7}Q} \quad \text{h)}$$

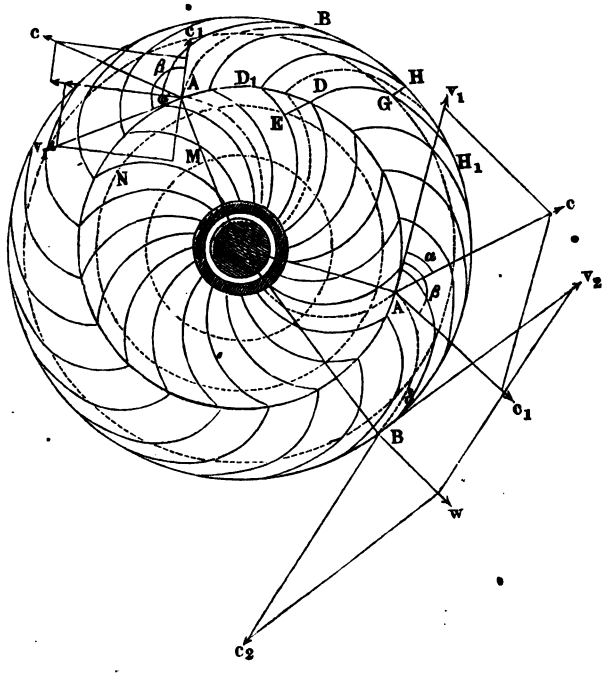
Die Anzahl n_1 der Turbinenschaufeln nimmt man nach Fourneyron zu 30 bis 36, oder bestimmt dieselbe nach Werner durch die empirische Formel

$$n_1 = 6\frac{R_1+R_2}{R_2-R_1} \quad \text{i)}$$

Die Anzahl n der Leitschaufeln nimmt man entweder gleich der der Turbinenschaufeln und macht die Kranzbreite des Leitbodens $= 0{,}6\ (R_2 - R_1)$, oder man setzt nach Fourneyron $n = 24$ bis 30 und kann dann die Kranzbreite verhältnißmäßig größer nehmen.

Die Dicke der Schaufeln wird für wachsende Durchmesser zu 3 bis 10^{mm} genommen. Mit Hülfe der letzten Angaben lassen sich die Radien R_1 und R_2 der Turbine berechnen, daher die betreffenden Kreise verzeichnen. Nachdem nun die Anzahl der Schaufeln bestimmt, der Winkel α angenommen, β nach Formel g, und δ nach Formel f berechnet, müssen die Schaufelcurven der Turbine und des Leitschaufel-Apparates verzeichnet werden. Hierfür lassen sich Kreisbogen benutzen, nur ist dafür zu sorgen, daß diese Bogen die entsprechenden Kreisumfänge unter den bestimmten Winkeln schneiden. Das Wasser strömt dem Leitboden in radialer Richtung zu, die Leitschaufeln müssen demnach die Peripherie der Eintrittsstelle unter einem Winkel von 90°, die der Austrittsstelle unter dem bestimmten Winkel α schneiden. Die Turbinenschaufeln bilden andererseits mit der Eintrittsperipherie den Winkel β, und mit der Austrittsperipherie den Winkel δ. In Fig. 166 sind die Leitschaufeln nach Kreis-

Fig. 166.



bogen geformt, deren Mittelpunkte sich auf dem Kreise M befinden. Die Turbinenschaufeln sind aus zwei Kreisbögen zusammengesetzt. Für den unteren, der mit den Leitschaufeln zusammenstößt, findet sich der Mittelpunkt auf dem Kreise N, und das Ende der Schaufeln ist nach einem Kreisbogen gekrümmt, deren Mittelpunkte zufälligerweise auf der äußeren Peripherie der Nabe liegen. Nachdem die Schaufeln verzeichnet, lassen sich die normalen Entfernungen a, a_1, a_2 (Formel 3) je zwei benachbarter Schaufeln genau messen, und nun kann man mit Benutzung von c gleich $\frac{1}{m} c_0$, nach Formel 2 und 3 die Höhe des Leitschaufelapparates und der Turbine berechnen, indem man $r = 1$ und $r_2 = 0{,}9$ setzt. Die Anzahl u der Umdrehungen pro Minute ergiebt sich aus der bekannten Gleichung $2 R_1 \pi u = 60 v_1$

$$u = 0{,}1047 \frac{v_1}{R_1}.$$

Nimmt man den Nutzeffect η dieser inneren Turbinen zu 0,70 bis 0,75, so erhält man die nutzbare Arbeitstärke aus Formel 1

$$L_n^{=} = \eta \, . \, L_a^{=},$$

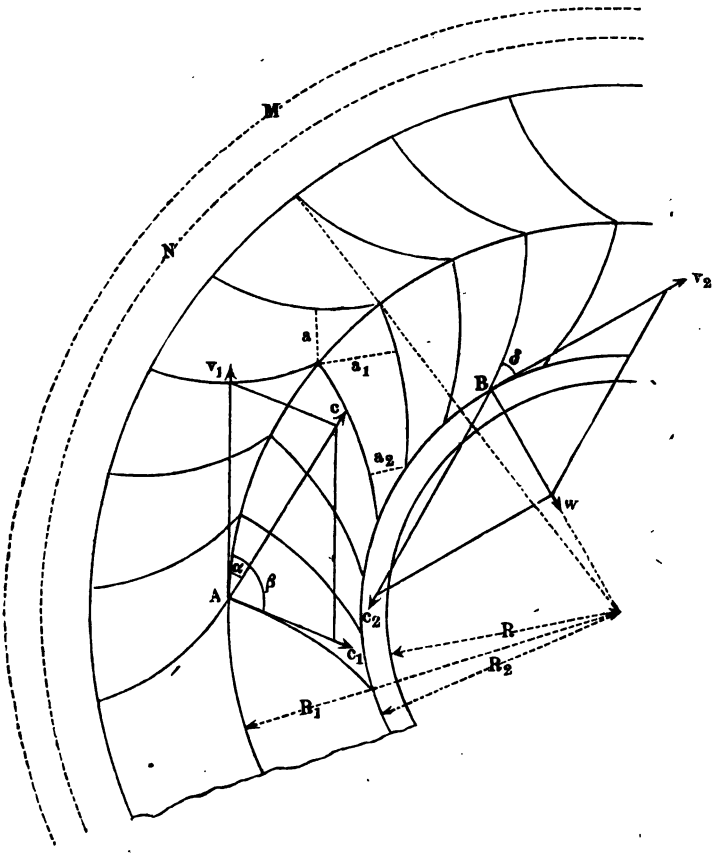
und die Anzahl N der nutzbar gemachten Pferdestärken

$$N = \frac{L_n^{=}}{75}.$$

31. Berechnung der äußeren Turbine mit Leitschaufel-Apparat. Die in Aufgabe 29 entwickelte Theorie der inneren Turbine ist in allen Resultaten auf die äußere Turbine in Anwendung zu bringen, in gleicher Weise lassen sich auch die in Aufgabe 30 gemachten Annahmen und praktischen Resultate auf die äußere Turbine mit der Aenderung übertragen, daß sich jetzt (Fig. 167), c_2, v_2, R_2 auf die innere, c_1, v_1, R_1 dagegen auf die äußere Begrenzung der Turbine beziehen, $\frac{R_2}{R_1}$ deshalb gleich $^2/_3$ zu nehmen ist. Vergleicht man mit Bezug hierauf die Geschwindigkeitsquotienten $\frac{v_2}{c_0}$ und $\frac{c_2}{c_0}$ bei den inneren und äußeren Turbinen mit einander, so erweisen sich diese Quotienten bei den äußeren Turbinen kleiner als bei den inneren, und das ist wegen der daraus resultirenden Reibung von Vortheil, so daß die äußeren Turbinen vor den inneren den Vorzug verdienen. Der innere Halbmesser R des Wasserabführungsrohres kann nach Formel h bestimmt werden, und da der Turbinenkörper allmälig in dieses Abflußrohr übergeführt wird, so wird für den inneren Halbmesser R_2 der Turbine ein etwas größerer Werth zu nehmen sein. Die Anzahl n_1 der Turbinenschaufeln bestimmt sich nach i, in welcher Formel R_1 und R_2 mit einander zu vertauschen sind und bei der gleichen Anzahl von Leitschaufeln ist die Breite des Leitschaufel-Apparates gleich 0,6 $(R_1 - R_2)$. Die Curven für die Schaufeln im Leitschaufel-Apparate und in der Turbine können wieder Kreisbogen werden, deren Mittelpunkte sich in der Figur 167 auf den punktirten

Kreisen M und N befinden. Denkt man für dieselben Werthe von R_1 und R_2 eine innere und äußere Turbine, Fig. 168 (a. f. S.), construirt, erhalten beide

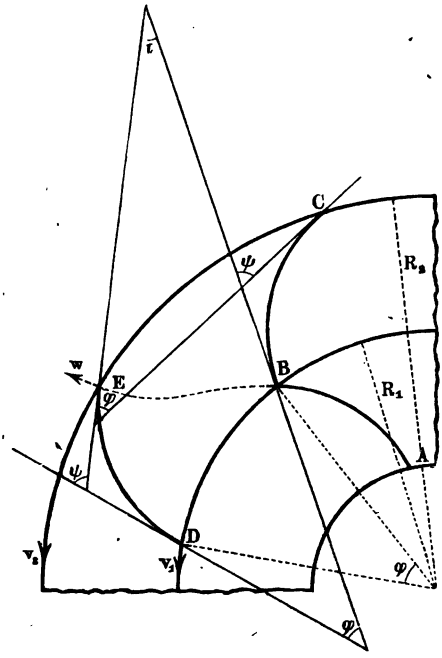
Fig. 167.

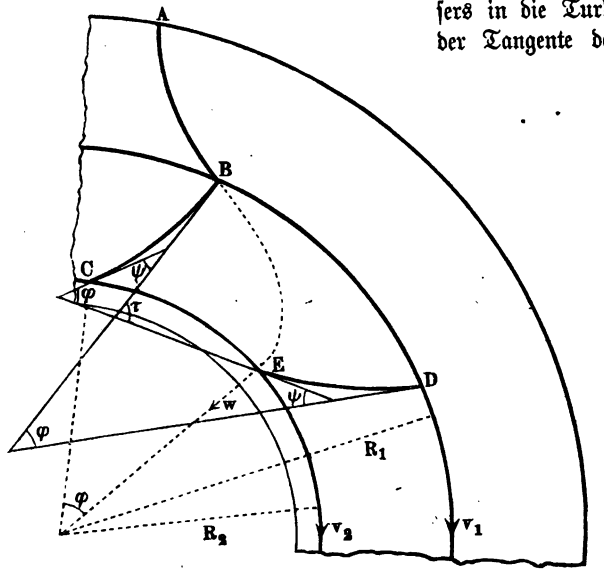


dieselbe Schaufelzahl, und bringt man für beide dieselben Winkel α und β in Anwendung, so ergiebt sich nach Formel f der Werth von $cotg\,\delta$ für die innere Turbine gleich $^3/_2\,k$, für die äußere Turbine gleich $^2/_3\,k$, unter k den Werth $\sqrt{\frac{t^2}{2}\frac{-1}{sin\,\beta\,cos\,\alpha}\,sin\,(\beta-\alpha)}$ verstanden. Es ist demnach der Winkel δ, den das Ausguß-Schaufelelement mit der entsprechenden Peripherie bildet, bei den inneren Turbinen kleiner als bei den äußeren, und es erhalten dadurch die äußeren Turbinen weniger gekrümmte, also flachere Schaufeln als die inneren Turbinen. Diese wichtige Eigenschaft der äußeren Turbinen, in Folge deren sie vor den inneren den Vorzug verdienen, da das Wasser beim Durchströmen durch

die Turbine eine geringere Ablenkung erfährt, alſo auch der dadurch verurſachte Arbeitsverluſt geringer iſt als bei den inneren Turbinen, läßt ſich bei Benutzung der Doppel-Fig. 168 direct beweiſen. Es ſtellen AB eine Leitſchaufel, BE den von einem Waſſerelement in Folge der Turbinenſchaufel zurückgelegten Weg durch das Turbinenrad, und BC und DE zwei Turbinenſchaufeln vor. Bezeichnet man den Drehwinkel der Schaufel während des Durchganges eines Waſſerelementes mit φ, den Krümmungswinkel einer Turbinenſchaufel mit ψ, d. i. der äußere Winkel, den die beiden für die Schaufelenden conſtruirten Tangenten mit einander bilden, und mit τ den Winkel, welchen die Tangente des erſten Schaufelelementes beim Einſtrömen des Waſſers in die Turbine, mit der Tangente des letzten

Fig. 168.

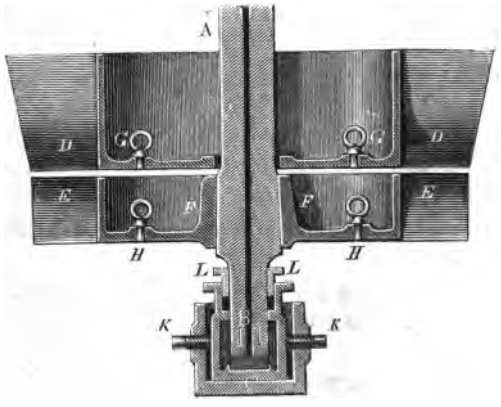




Schaufelelementes beim Ausströmen aus der Turbine bildet, den sogenannten Ablenkungswinkel des Wasserelementes, so ist für die innere Turbine: $\psi = \tau + \varphi$, und für die äußere Turbine: $\psi = \tau - \varphi$, d. h. aber für gleiche Dreh- und Ablenkungswinkel ist der Krümmungswinkel einer Turbinenschaufel bei den äußeren Turbinen kleiner als bei den inneren.

32. Berechnung der Axial-Turbine mit Leitschaufelapparat. Die Fig. 169 stellt den Durchschnitt einer Henschel'schen Turbine vor. DD ist der Leitschaufelapparat, EE die Turbine, G und H Ringe, mittelst welcher ein Herausheben und Einsenken der Turbine ermöglicht wird. Die Schaufeln bilden windschiefe Flächen, deren Erzeugungslinie rechtwinklig zur Achse des Rades bleibt und auf dem mit dem mittleren Halbmesser R construirten Cylindermantel eine beliebige oder gegebene Linie beschreibt. Denkt man diesen Cylindermantel abgewickelt, und zeichnet man in das sich dadurch bildende Rechteck krumme Linien, so können diese beim Wiederaufwickeln als Leitlinien für die Erzeugungslinie der windschiefen Flächen dienen. In der Figur 170 (a. f. S.) stellen AB, A_1B_1 ... die abgewickelten Leitlinien des Leitschaufel-Apparates, und BC, B_1C_1 ... die des Turbinenrades vor. Die Leitschaufel-Leitlinie hat an der Eintrittsstelle eine zur Achse des Rades parallele Tangente, mit der Einströmungsrichtung des Wassers übereinstimmend, und an der Austrittsstelle

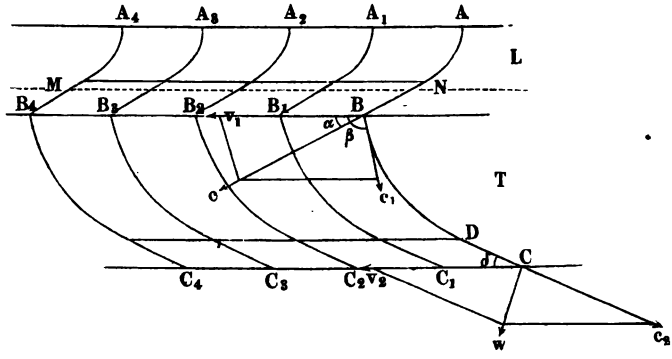
Fig. 169.



bilde die betreffende Tangente mit der Turbinenperipherie den Winkel α, ebenso seien, wie früher angenommen, β und δ die Winkel, welche das erste und letzte Element der Turbinenschaufel-Leitlinien mit der Turbinenperipherie bilden. Für diese Annahmen muß, um jeglichen Stoß des Wassers beim Uebergange desselben aus dem Leitschaufel-Apparate in die Turbine zu vermeiden, die Geschwindigkeit c des aus dem Leitschaufelapparat tretenden Wassers die Resultante aus der Peripheriegeschwindigkeit v_1 und der Wassergeschwindigkeit c_1 am ersten Turbinenschaufelelemente sein. Ferner muß, um den Arbeitsverlust beim Austritt des Wassers aus der Turbine möglichst gering zu erhalten, die Austritts-

geschwindigkeit w mit der Peripheriegeschwindigkeit v_2 einen rechten Winkel bilden, also parallel der Radachse gerichtet sein. Hiernach erhält man:

Fig. 170.



$$1.\quad \begin{cases} \dfrac{v_1}{c} = \dfrac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\beta} \\ \dfrac{c_1}{c} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} \\ c^2 = c_1^2 + v_1^2 + 2\,c_1\,v_1\cos\beta, \end{cases}$$

$$2.\quad \begin{cases} v_2 = c_2\cos\delta \\ w = c_2\sin\delta \\ c_2^2 = v_2^2 + w^2. \end{cases}$$

Dabei ist noch v_1 und v_2 auf denselben Halbmesser R bezogen, daher gleich groß, gleich v.

Bezeichnen wir wie früher mit Q die in einer Secunde zufließende Wassermasse in Kubikmetern, mit H das Gefälle, d. i. die Entfernung des Obervom Unterwasserspiegel, mit F die Summe der Querschnitte aller Zuflußöffnungen am Leitschaufelapparate, mit F_1 die Summe der Querschnitte der Radcanäle an der Einströmungsstelle, und mit F_2 die Summe dieser Querschnitte an der Ausströmungsstelle, so gelten unter der Voraussetzung der vollkommenen Anfüllung sämmtlicher Canäle mit Wasser, die folgenden Formeln auch für Axialturbinen.

$$3.\quad L_a = Q\,H\,\gamma$$

$$4.\quad Q = r\,F\,c = F_1\,c_1 = r_2\,F_2\,c_2.$$

Nehmen wir wieder n Leitschaufeln und n_1 Turbinenschaufeln von der Dicke ε und ε_1 an, sind ferner R_1 und R_2 der äußere und innere Halbmesser der Turbine, so ist für den Kreis vom mittleren Halbmesser R die Schaufel-

theilung des Leitrades $\frac{2R\pi}{n}$. Das untere Ende jeder Leitschaufel ist unter dem Winkel α gegen die untere Ebene geneigt, daher ist die normale Weite eines Canales des Leitschaufelapparates gleich $\frac{2R\pi}{n}\sin\alpha - \varepsilon$, und da die radiale Dimension desselben gleich $R_1 - R_2$ ist, so erhält man als Summe der Querschnitte im Leitschaufelapparate $n(R_1 - R_2)\left(\frac{2R\pi}{n}\sin\alpha - \varepsilon\right)$. Berücksichtigt man nun, daß die Turbinenschaufeln durch ihre Dicke ε_1 und radiale Abmessung $(R_1 - R_2)$ den Wasserausfluß hindern, so ist, da $\frac{\varepsilon_1}{\sin\beta}$ die auf den mittleren Kreis projicirte Schaufeldicke, und $\varepsilon_1\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ die den normalen Abstand zwischen zwei Leitschaufeln vermindernde Abmessung ausdrückt, von dem letzteren Ausdruck $n_1\varepsilon_1\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}(R_1 - R_2)$ in Abzug zu bringen, und wir erhalten deshalb

$$5.\quad \begin{cases} F = (R_1 - R_2)\left\{n\left(\frac{2R\pi}{n}\sin\alpha - \varepsilon\right) - n_1\varepsilon_1\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right\} \\ F_1 = rF\frac{c}{c_1} = rF\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \\ F_2 = \frac{r}{r_2}F\frac{c}{c_2} = \frac{r}{r_2}F\frac{c}{v}\cos\delta = \frac{r}{r_2}F\frac{\sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}\cos\delta. \end{cases}$$

Wir setzen für die Turbine eine mittlere Aufstellung zwischen Ober- und Unterwasserspiegel voraus, nehmen also an, daß das ausfließende Wasser durch ein in das Unterwasser einlaufendes Rohr von der Atmosphäre abgeschlossen ist. Bezeichnen wir die Entfernung der unteren Radebene vom Unterwasserspiegel mit h, den Druck der Wassertheilchen in der Ebene zwischen Leitschaufel-Apparat und Turbine mit p_x, den Druck der äußeren Atmosphäre mit q und den Druck der Wassertheilchen unmittelbar unter dem Turbinenrade mit q_x, diese drei Drucke in Kilogrammen bezogen auf den Quadratmeter, und nennen wir noch e_1 die Höhe des Turbinenrades, so ist

$$6.\quad \begin{cases} \frac{q}{1000} = \frac{q_x}{1000} + h \\ \frac{c_2^2}{2g} = \frac{c_1^2}{2g} + \frac{p_x}{1000} + e_1 - \frac{q_x}{1000}, \\ \frac{c^2}{2g} = H - h - e_1 + \frac{q}{1000} - \frac{p_x}{1000}. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen bestimmt die Höhe h der Wassersäule unterhalb der Turbine, die sogenannte Saughöhe, welche jederzeit so zu wählen ist, daß die Wassersäule $\frac{q_x}{1000}$ noch größer als Null bleibe. Die Verbindung der

ersten mit der dritten Gleichung liefert die Pressungsdifferenz an der Ein- und Austrittsstelle der Turbine.

$$7.\ \frac{p_x}{1000} + e_1 - \frac{q_x}{1000} = h_1 = H - \frac{c^2}{2g}.$$

Dieser Ausdruck zeigt, daß die Wirkung des Wassers in der Turbine von der Aufstellung, d. h. von der Saughöhe h ganz unabhängig ist und daß man die Turbine in beliebiger Höhe h über dem Unterwasserspiegel arbeiten lassen kann, vorausgesetzt $\frac{q_x}{1000} = \frac{q}{1000} - h$ sei größer als Null.

Benutzt man in der zweiten Gleichung unter 6) die unter 7) entwickelte Pressungsdifferenz, so erhält man

$$8)\ c_2^2 - c_1^2 = 2gh_1 = 2g\left(H - \frac{c^2}{2g}\right),$$

worin h_1 einen positiven Werth haben, c also $< \sqrt{2gH}$ sein muß, wenn, wie wir voraussetzen, eine Reactionsturbine der Beurtheilung unterliegt.

Es sei wieder die dem Gefälle H entsprechende Geschwindigkeit gleich c_0, und es werde $\frac{c_0}{c} = m$ und $\frac{c_0}{w} = t$ gesetzt, so erhalten wir wie in Nr. 30

$$a)\ m^2\frac{t^2-1}{t^2} = \frac{2\sin(\beta-\alpha)\cos\alpha}{\sin\beta}$$

$$b)\ \left(\frac{v}{c_0}\right)^2 = \frac{t^2-1}{2t^2}\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta\cos\alpha}$$

$$c)\ \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^2 = \frac{t^2-1}{2t^2}\cdot\frac{\sin\alpha^2}{\sin\beta\cos\alpha\sin(\beta-\alpha)}$$

$$d)\ \left(\frac{c_2}{c_0}\right)^2 = \frac{t^2-1}{2t^2}\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta\cos\alpha} + \left(\frac{1}{t}\right)^2$$

$$e)\ \operatorname{cotg}\delta^2 = \frac{t^2-1}{2}\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta\cos\alpha}$$

$$f)\ \beta = 90 + \frac{\alpha}{2}.$$

Ferner nehmen wir $r = 1$, $r_2 = 0{,}9$, α wieder nahe an 30^0, $t^2 = 13$, $\frac{R_1}{R_2} = \frac{3}{2}$, $R = \frac{R_1 + R_2}{2}$, die Radhöhe $e_1 = 0{,}5\,R$,

die Höhe e des Leitschaufel-Apparates gleich $0{,}6\,R$ und die Anzahl n_1 der Turbinenschaufeln nach der empirischen Formel von Werner

$$g)\ n_1 = 12 \cdot \frac{R}{e_1}.$$

Der äußere Halbmesser R_1 der Turbinen wird aus der Verbindung von Formel 4 und 5 erhalten

$$Q = Fc = c\,(R_1 - R_2)\left\{2\,Rn\,\sin\alpha - n\varepsilon - n_1\,\varepsilon_1\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right\}.$$

Wird hierin $R = \frac{R_1 + R_2}{2}$ gesetzt, so entsteht

h) $$Q = c\,R_1^2\left\{1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\right\}\pi\,\sin\alpha\,\left(1 - \frac{n}{2\,\pi\,\sin\alpha}\,\frac{\varepsilon}{R} - \frac{n_1}{2\,\pi\,\sin\beta}\,\frac{\varepsilon_1}{R}\right)$$

worin $\frac{\varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon_1}{R} = 0{,}025$ zu nehmen ist. Durch das Vorstehende sind alle nothwendigen Daten zur Construction einer Axialturbine bestimmt. Dieselben haben wegen ihrer einfachen Aufstellung und Bedienung die radialen Turbinen vielfach verdrängt, obgleich sie in Bezug auf die vortheilhafteste Geschwindigkeit c_1 und Schaufelkrümmung den äußeren Turbinen nachstehen.

32. Die Centrifugalpumpen sind umgekehrte Turbinen, insofern die Turbine durch das Wasser vermöge seiner Schwerkraft in Bewegung gesetzt wird, während die Centrifugalpumpen durch eine Kraftmaschine getrieben, das Wasser ansaugen und weiter schaffen, und zwar überwindet hier die Centrifugalkraft hauptsächlich die Schwerkraft des Wassers. Handelt es sich um das Heben bedeutender Wassermassen auf geringere Höhen, so sind die Centrifugalpumpen allen anderen Wasserhebvorrichtungen vorzuziehen, da sie bei billiger Anschaffung bessere Wirkungen entwickeln, und wegen ihrer Einfachheit Reparaturen nicht unterworfen sind.

Die Centrifugalpumpen bestehen aus einem schnell rotirenden Schaufelrade A (Fig. 171 a. f. S), welches in einem Gehäuse B eingeschlossen ist. Das Wasser tritt in der Nähe der Radachse aus dem Saugerohr C in das Rad, und verläßt dasselbe an der äußeren Peripherie. Das Gehäuse ist um das Schaufelrad herum spiralförmig erweitert und geht allmälig in das Druckrohr D über. Die Centrifugalkraft hat nicht allein während des Betriebes die Schwerkraft des Wassers zu überwinden, sondern auch bei Inbetriebsetzung der Pumpe die Bewegung des Wassers zu veranlassen. Zu dem Ende muß die Pumpe, nebst Druck- und Saugrohr, zuerst vollständig mit Wasser gefüllt werden, wobei das Saugrohr an seiner unteren Stelle mit einem Ventile versehen ist, oder man stellt die Pumpe im Unterwasser auf. In beiden Fällen ist das Schaufelrad mit dem zu hebenden Wasser in Berührung, und die einzelnen Wassertheilchen werden bei der Drehung des Rades durch die wachsende Geschwindigkeit desselben allmälig aus der kreisförmigen Bewegung in eine spiralförmige übergeführt und gelangen dadurch zum Austritt aus dem Rade. Das Wasser strömt dem Rade aus dem Saugrohre radial zu, der bei den Turbinen angenommene Winkel α ist hier also 90^0, gerade so wie bei den inneren Turbinen, welche mit keinem Leitschaufelapparate versehen sind. Unter β und δ verstehen wir wieder (Fig. 172 a. f. S.) die Winkel, welche das erste und letzte Schaufelelement mit den zugehörigen Radkreisen von den Halbmessern R_1 und R_2 bildet.

Es sei die in der Secunde zu hebende Wassermenge Q Kubikmeter, die

Fig. 171.

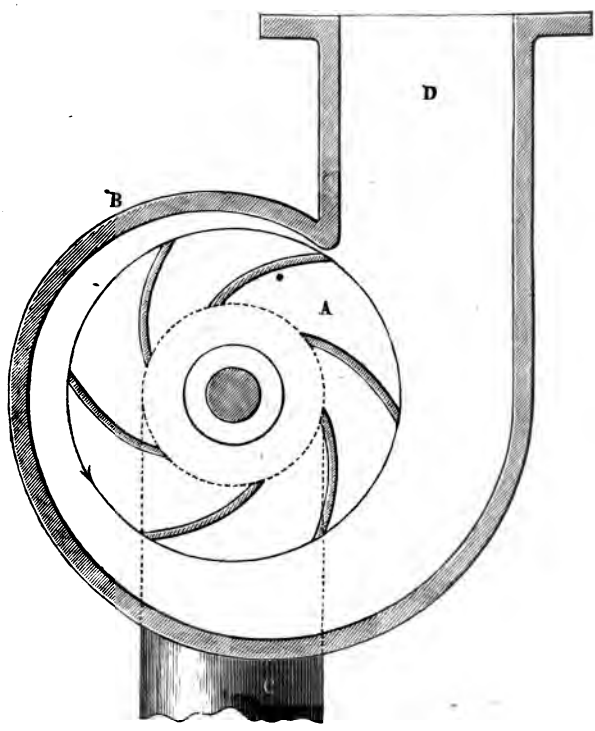
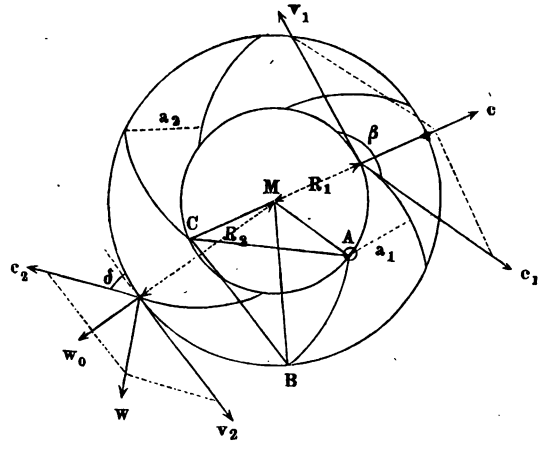


Fig. 172.



ganze Förderhöhe gleich H^m, welche aus der Saughöhe h_1 und der Druckhöhe h_2 besteht, c die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser in das Rad tritt, w die Wasseraustrittsgeschwindigkeit. Bezeichnen wir ferner die Wassergeschwindigkeit auf dem ersten und letzten Schaufelelemente mit c_1 und c_2, die betreffenden Peripheriegeschwindigkeiten aber mit v_1 und v_2, so ist, unter $L_a^{=}$ die an das Rad zu übertragende rohe Arbeitstärke verstanden:

1) $$L_a^{=} = Q\,\gamma\left(H + \frac{w^2}{2g}\right),$$

2) $$c = c_1 \sin\beta = -\,v_1 \operatorname{tang}\beta \text{ und } c_1^2 = c^2 + v_1^2.$$

Sind n_1 Schaufeln vorhanden und werden die normalen Entfernungen je zweier benachbarter Schaufeln an der Eintritts- und Austrittsstelle mit a_1 und a_2, die Radhöhen an diesen Stellen mit e_1 und e_2 bezeichnet, so ist unter F_1 die Summe der Querschnitte der Radkanäle an der Eintrittsstelle und unter F_2 die Summe dieser Querschnitte an der Austrittsstelle verstanden.

3) $$Q = F_1\,c_1 = r\,F_2\,c_2.$$

4) $$\begin{cases} F_1 = a_1\,e_1\,n_1 \\ F_2 = a_2\,e_2\,n_2. \end{cases}$$

Die Austrittgeschwindigkeit w ist die Resultante aus c_2 und v_2, d. h.

$$w^2 = c_2^2 + v_2^2 - 2\,c_2\,v_2\cos\delta.$$

Denken wir aber noch c_2 nach Richtung des Radius und normal dazu zerlegt, so entstehen die beiden Componenten $c_2 \sin\delta = w_0$ und $c_2\cos\delta$. Führen wir diesen Werth w_0 ein und berücksichtigen, daß $Q = F_1\,c_1 = F_2\,c_2$, und daß sich die Querschnitte F_1 und F_2 bei gleicher Radhöhe wie die Radien R_1 und R_2 verhalten, so ist

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{w_0 : \sin\delta}{c : \sin\beta}$$

und

$$w_0 = \frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{\sin\delta}{\sin\beta}\,c$$

oder annähernd

$$w_0 = \frac{R_1}{R_2}\,c.$$

Wir haben hiernach

$$w^2 = w_0^2 + (v_2 - w_0\,\operatorname{cotg}\delta)^2$$

5) $$w^2 = \left(c\,\frac{R_1}{R_2}\right)^2 + \left(v_2 - c\,\frac{R_1}{R_2}\operatorname{cotg}\delta\right)^2.$$

Nennen wir den gegenseitigen Druck der Wassertheilchen an der Eintrittsstelle p_x, an der Austrittsstelle q_x, sowie den Druck der äußeren Atmosphäre q, wobei sich sämmtliche Drucke auf den Quadratmeter beziehen und in Kilogrammen ausgedrückt sind, so bestimmt sich die Eintrittsgeschwindigkeit c des Wassers in das Schaufelrad durch:

6)
$$\begin{cases} \frac{c^2}{2g} = \frac{q - p_x}{1000} - h_1 \\ \frac{p_x}{1000} = \frac{q}{1000} - \frac{c^2}{2g} - h_1 \end{cases}$$

Da der Druck p_x jederzeit positiv, so ist die letzte der Gleichungen zur Bestimmung der Saughöhe h_1 zu benutzen, es muß nämlich jederzeit $\frac{q}{1000} - \frac{c^2}{2g} > h_1$ sein. Die Austrittsgeschwindigkeit w findet man aus der Gleichung:

7)
$$\begin{cases} \frac{w^2}{2g} = \frac{q}{1000} + h_2 - \frac{q_x}{1000} \\ \frac{q_x}{1000} = \frac{q}{1000} + h_2 - \frac{w^2}{2g} \end{cases}$$

Die Verbindung der Gleichungen (6) und (7) liefert den Ueberdruck an der Wasseraustrittsstelle über den an der Eintrittsstelle

8) $$\frac{q_x - p_x}{1000} = h_1 + h_2 - \frac{w^2 - c^2}{2g} = H - \frac{w^2 - c^2}{2g} = h'.$$

Die Beziehungen zwischen den Peripheriegeschwindigkeiten und den Wassergeschwindigkeiten an den Schaufelelementen finden sich endlich durch die Gleichung

9)
$$\begin{cases} {}^1/_2 m (v_2^2 - v_1^2) = {}^1/_2 m (c_2^2 - c_1^2) + mg h' \text{ oder} \\ v_2^2 - v_1^2 = 2g H - w^2 + c_1^2 + c_2^2 - c_1^2. \end{cases}$$

Beim Anlassen der Pumpe sind die Geschwindigkeiten c_1, c_2, c, w gleich Null, d. h. die Maximalförderhöhe *Max H* bestimmt sich durch die Gleichung

10)
$$Max\, H = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g}\left[1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right] = \frac{1}{1789} R_2^2 u^2 \left[1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right],$$

unter u die Anzahl der Umdrehungen pro Minute verstanden, welche das Schaufelrad während der Wasserförderung machen muß.

In die Gleichung 9) setze man die in den vorhergehenden Formeln gefundenen Werthe für c_2, c_1, w und v_1, so entsteht aus:

$$v_2^2 - v_1^2 + w^2 - c^2 - c_2^2 + c_1^2 = 2g H$$

$$v_2^2 - v_1^2 + \left(c\frac{R_1}{R_2}\right)^2 + v_2^2 - 2 v_2 c \frac{R_1}{R_2} cotg\,\delta + \left(c\frac{R_1}{R_2} cotg\,\delta\right)^2 - c^2$$

$$- \left(\frac{R_1}{R_2}\frac{c}{sin\,\delta}\right)^2 + \left(\frac{c}{sin\,\beta}\right)^2 = 2g H$$

$$2 v_2^2 - v_1^2 - 2 v_2 c \frac{R_1}{R_2} cotg\,\delta + c^2 \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \left\{1 + cotg\,\delta^2 - \frac{1}{sin\,\delta^2}\right\} + c^2\, cotg\,\beta^2 = 2gH,$$

oder da

$$c^2\, cotg\,\beta^2 = v_1^2,$$

so ist

$$2 v_2^2 - 2 v_2 c \frac{R_1}{R_2} cotg \delta = 2 g H$$

11) $$v_2 = \frac{c}{2} \frac{R_1}{R_2} cotg \delta + \sqrt{g H + \left(\frac{c}{2} \frac{R_1}{R_2} cotg \delta\right)^2}.$$

Aus diesem Werthe ergiebt sich, daß die Geschwindigkeit v_2 und also auch die Umdrehungen pro Minute wachsen müssen, je kleiner der Winkel δ angenommen wird, daß aber damit auch w um so kleiner wird und dadurch der der Geschwindigkeit w entsprechende Arbeitsverlust abnimmt. Andererseits vergrößert sich mit der Anzahl der Umdrehungen der durch die Zapfenreibung entstehende Arbeitsverlust, so daß für δ ein Werth gewählt werden muß, der beiden Arbeitsverlusten Genüge leistet.

Man nimmt $\delta = 20$ bis 25^0, $c < 3^m$ und $\frac{R_1}{R_2} = 1/2$ bis $1/3$.

Da Q und H gegeben, so findet sich aus der letzten Gleichung v_2, dann ist weiter

$$v_1 = \frac{R_1}{R_2} v_2, \; tang \beta = -\frac{c}{v_1}, \; c_1 = \frac{c}{sin \beta}, \; w_0 = \frac{R_1}{R_2} c, \; c_2 = \frac{w_0}{sin \delta}$$

bekannt. Nimmt man ferner die Anzahl u der Umdrehungen pro Minute zu 500 bis 800 an, so bestimmt sich aus v_2 und u der äußere Radhalbmesser

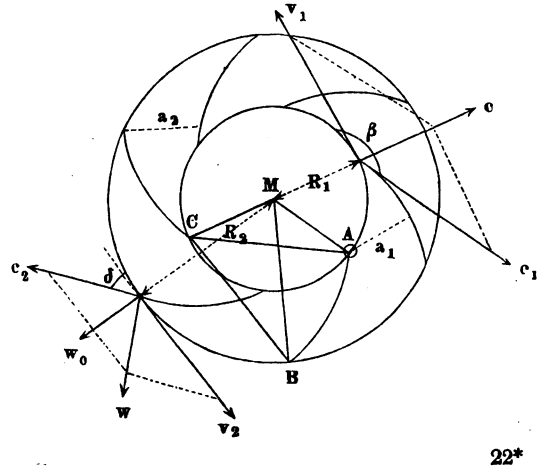
$$R_2 = \frac{2\pi}{60} \cdot \frac{v_2}{u} = 9{,}55 \frac{v_2}{u}.$$

Da nun auch R_1 bekannt, so lassen sich die beiden begrenzenden Kreise der Pumpe zeichnen, und es handelt sich weiter um die Anzahl n_1 der Schaufeln sowie um deren Form. Die erstere bestimmt sich nach der empirischen Formel

$$n_1 = \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1} = 8 \text{ bis } 12,$$

je nachdem man $\frac{R_1}{R_2} = 1/3$ oder gleich $1/2$ wählt. Die Krümmung der Schaufeln

Fig. 173.



geschieht nach einem Kreise vom Halbmesser ϱ, welcher sich Fig. 173 folgendermaßen bestimmt. Für C als Mittelpunkt der Schaufel AB und M als Radmittelpunkt ist:

$$MC^2 = R_1^2 + \varrho^2 - 2R_1\,\varrho\cos(180 - \beta) = R_2^2 + \varrho^2 - 2R_2\,\varrho\cos\delta,$$

daher

$$12)\qquad \varrho = {}^1/_2\,R_2\,\frac{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2}{\cos\delta + \frac{R_1}{R_2}\cos\beta}.$$

Nachdem die Schaufeln verzeichnet, lassen sich die Entfernungen a_1 und a_2 zweier Schaufeln an der Eintritts- und Austrittsstelle messen, und dann finden sich die Radhöhen e_1 und e_2 nach 3 und 4. Der Querschnitt F_0 des Saugrohres bestimmt sich, wenn man die Wassergeschwindigkeit zu 3^m annimmt, durch

$$F_0 = R_0^2\pi = {}^1/_3\,Q,$$

daher

$$R_0 = \sqrt{\frac{2}{19}Q}.$$

Nimmt man, wie es häufig der Fall ist, $R_0 = 0{,}96\,R_1$, so entspricht das einer Geschwindigkeit $c = 2{,}8^m$. In dem Druckrohre soll sich das Wasser mit einer Geschwindigkeit von $1{,}6^m$ bewegen, woraus sich die spiralförmige Erweiterung des Gehäuses bis zum Druckrohre hin berechnen läßt, wenn man die Höhe des Gehäuses in entsprechender Weise annimmt. Die zum Betriebe der Pumpe nothwendige Arbeitstärke findet sich ohne Berücksichtigung der Zapfen- und Wasserreibung nach (1). Will man jedoch diese ebenfalls in Rechnung ziehen, so setze man $H = {}^3/_2\,H$ bis ${}^7/_4\,H$ und hat dann

$$L_a^{=} = 1000\,Q\left({}^3/_2\,H + \frac{w^2}{2g}\right)^{\overline{=}}\text{bis}\,1000\,Q\left({}^7/_4\,H + \frac{w^2}{2g}\right)^{\overline{=}}.$$

Die nutzbare Arbeitstärke $L_n^{=}$ der Pumpe ist $1000\,Q\,H^{\overline{=}}$, daher der Nutzeffect

$$13)\qquad \eta = \frac{H}{({}^3/_2\text{ bis }{}^7/_4)\,H + \frac{w^2}{2g}}.$$

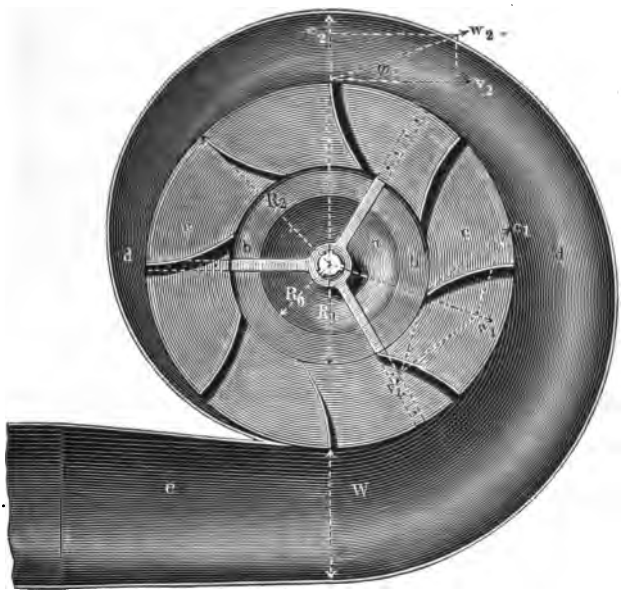
33. Ventilatoren. Der Centrifugalventilator besteht aus einem Systeme von vollkommen gleichen Canälen, die einen rechteckigen Querschnitt haben, an beiden Enden offen und gleichmäßig in radialer Richtung um eine Achse vertheilt sind. Diese Canäle können sich um diese gemeinschaftliche Achse drehen und bilden das eigentliche Flügelrad. Bei einer Umdrehung dieses Apparates wird die in den Canälen befindliche Luft in Rotation versetzt und dadurch zum Ausfluß an der äußeren Peripherie gebracht, während durch die anderen Canalöffnungen an der Achse neue Luft in die Canäle tritt, und auf die Weise ein continuirlicher Luftstrom in Richtung der Achse dieser Canäle erzeugt wird. Ein Ventilator hat entweder die Bestimmung, aus einem gegebenen Raume die Luft fortzuschaffen, herauszusaugen, oder in einen gewissen

Raum Luft hineinzudrücken. Hiernach unterscheidet man saugende und blasende Ventilatoren. Bei jedem Ventilator (Fig. 174) ist zu bemerken:

a. Der Raum, aus welchem die Luft in die Canäle strömt, der Saugraum.

b. Der Raum zwischen dem Saugraume und der inneren Oeffnung der Canäle, der Einlauf.

Fig. 174.



c. Der Flügelraum, d. i. der ringförmige Raum, welchen die Canäle während der rotirenden Bewegung einnehmen.

d. Der Raum, den die aus den Canälen austretende Luft zuerst erfüllt, der Auslauf.

e. Der Raum, welcher den Auslauf mit dem Orte verbindet, wo die gepreßte Luft wirksam sein soll, der Blaseraum.

Beim saugenden Ventilator fehlt der Blaseraum, da die Luft von dem Auslaufe oder oft sogar unmittelbar von den Canälen gleich in die Atmosphäre tritt.

Außerdem bringt man wohl noch einen Saug- und Blasehals in Form eines kurzen Röhrenstückes an, wodurch die unmittelbare Verbindung zwischen Saugraum und Einlauf und zwischen Auslauf und Blaseraum hergestellt wird. Was die Construction des Ventilators anbetrifft, so ist besonders für eine gehörige Ueberführung der Luft in die verschiedenen Räume zu sorgen, jede plötzliche Abweichung ist zu vermeiden. Den Einlauf muß man als sphäroidischen Kegel construiren, damit sich hier die Luft schon ringförmig vertheile und dieselbe allmälig in die Canäle geführt werde. Bei einem offenen Ventilator, wo die Luft an dem ganzen Umfange des Auslaufes in die Atmosphäre tritt, muß der Auslauf eine

ringförmige Gestalt erhalten, damit sich der Querschnitt der aus den Canälen tretenden Luft allmälig vergrößere und ihre Geschwindigkeit sich dadurch verringere. Zu dem Ende kann man die Seitenwände des Ventilators ringsherum gleichmäßig erweitern. Beim geschlossenen Ventilator dagegen wird man die Luft, sobald sie aus den Canälen ausströmt, in einen spiralförmig sich erweiternden Raum treten lassen, in welchem dieselbe ihre Geschwindigkeit beibehält. Von hieraus gelangt die Luft in den sich allmälig erweiternden Blasehals, wobei sich ihre Geschwindigkeit allmälig vermindert, bis sie die für den Blaseraum festgesetzte Geschwindigkeit angenommen hat. Wegen der leichteren praktischen Ausführbarkeit soll die Breite des Ventilators, d. i. der normale Abstand der beiden Seitenwände, überall dieselbe sein.

34. Zur Berechnung der Ventilatoren muß die Spannung und die Geschwindigkeit der Luft im Saug- und Blaseraum als bekannt vorausgesetzt werden.

Es seien der Druck in Kilogrammen pro Quadratmeter, die absolute Temperatur, die Geschwindigkeit und der betreffende Halbmesser in Metern:

Für den Saugraum p_0, T, w_0, R_0,
„ „ Einlauf p_1, T, w_1, R_1,
„ „ Austritt p_2, T, w_2, R_2,
„ „ Blaseraum p, T, w.

Ist das Gewicht der in jeder Secunde durch den Ventilator getriebenen Luftmenge $= G$ in Kilogrammen, so dienen als Ausgangspunkt das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz $p\,v = RT$ (§. 11) und die Bedingung, daß während des Beharrungszustandes jederzeit dasselbe Luftgewicht G durch die einzelnen Querschnitte der Leitung geschafft werden muß, d. h. $G = Fv\,\frac{p}{RT}$, unter F einen beliebigen Querschnitt, unter v die in demselben bestehende Geschwindigkeit verstanden. Es sei F_1 die Summe aller Querschnitte an der Eintrittsstelle der Luft, F_2 die Summe dieser Querschnitte an der Austrittsstelle, dann ist, wenn wir mit a_1 und a_2 die normalen Entfernungen zweier Schaufeln, mit e_1 und e_2 die Radhöhen an der Eintritts- und Austrittsstelle bezeichnen und n Schaufeln annehmen:

1) $$\begin{cases} F_1 = a_1\,e_1\,n \\ F_2 = a_2\,e_2\,n \end{cases}$$

2) $$G = \pi\,R_0^2\,w_0\,\frac{p_0}{RT} = Fw\,\frac{p}{RT},$$

unter F den Querschnitt der Windleitung am Ende des spiralförmigen Auslaufes verstanden.

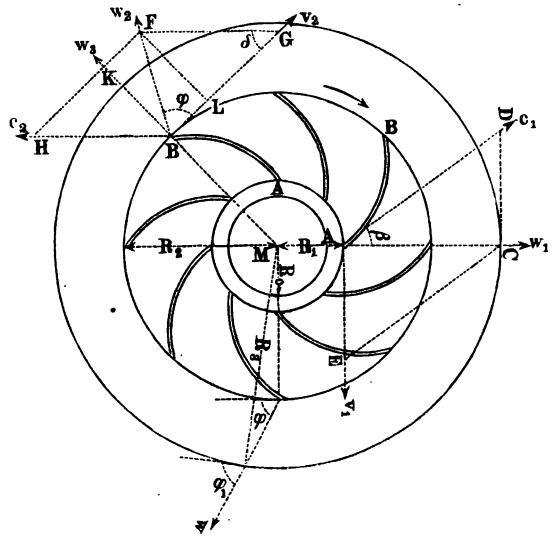
Es stelle AB, Fig. 175, die Längenbegrenzung eines Canals vor, in welchen die in Richtung von MA strömende Luft eintritt, wenn der Ventilator sich nach Richtung des Pfeiles bewegt. Durch die Umdrehung des Ventilators besitzt der Punkt A eine bestimmte Peripheriegeschwindigkeit v, welche von der Anzahl u der Umdrehungen pro Minute und von dem Halbmesser R_1 abhängig ist. Nehmen wir an, daß die Luft vermöge des in voriger Nummer angegebenen

sphärodischen Kegels allmälig in die Canäle übergeführt wird, daß also die radiale Geschwindigkeit w_1 der Luft weder der Größe noch der Richtung nach geändert werden soll, so muß w_1 die Resultante aus v_1 und der auf dem ersten Curvenelemente stattfindenden Geschwindigkeit c_1 sein. Wir haben dann, mit β den Winkel zwischen v_1 und c_1 bezeichnend:

3) $$w_1 = c_1 \sin\beta = -v_1 \operatorname{tang}\beta \text{ und } c_1^2 = w_1^2 + v_1^2.$$

Während der Bewegung der Luft durch die Canäle wirken die Flügel beständig auf die einzelnen Lufttheilchen und ertheilen denselben eine beschleunigte Bewegung.

Fig. 175.



Für den Austrittspunkt B der Luft aus dem Canale AB sei w_2 die Geschwindigkeit der austretenden Luft, v_2 die entsprechende Peripheriegeschwindigkeit und c_2 die Geschwindigkeit der Luft auf dem letzten Schaufelelemente, welche mit v_2 den spitzen Winkel δ bildet:

$$w_2^2 = c_2^2 + v_2^2 - 2 c_2 v_2 \cos\delta.$$

Zerlegen wir noch c_2 nach Richtung des Radius und normal dazu, so entstehen die beiden Componenten $c_2 \sin\delta = w_3$ und $c_2 \cos\delta$ und dann ist:

$$w_2^2 = w_3^2 + (v_2 - w_3 \operatorname{cotg}\delta)^2.$$

Ferner ist:

$$G = F_1 c_1 \frac{p_1}{RT} = F_2 c_2 \frac{p_2}{RT},$$

daher

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{p_2}{p_1} = \frac{w_3 : \sin\delta}{w_1 : \sin\beta} \cdot \frac{p_2}{p_1}.$$

Bei Voraussetzung derselben Radhöhe von der Eintritts- bis zur Austrittsstelle und desselben specifischen Gewichtes der Luft $\frac{p_1}{RT} = \frac{p_2}{RT}$ verhalten sich

die Eintritts- und Austrittsquerschnitte F_1 und F_2 wie die Radien R_1 und R_2 des Flügelrades, so daß sich ergiebt:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{w_3 \sin\beta}{w_1 \sin\delta}$$

oder annähernd

$$w_3 = w_1 \frac{R_1}{R_2}.$$

Benutzen wir diesen Werth und substituiren denselben in der letzten Gleichung von w_2^2, so entsteht:

4) $$w_2^2 = \left(w_1 \frac{R_1}{R_2}\right)^2 + \left(v_2 - w_1 \frac{R_1}{R_2} \operatorname{cotg} \delta\right)^2.$$

Die Geschwindigkeit w_2 wächst mit der Zunahme von δ und erreicht ihren größten Werth für $\delta = 90^0$. Dieser Maximalwerth von w_2 ist bei der Fortschaffung der Luft sehr wohl brauchbar und giebt für die Construction der Schaufel die Bedingung, daß das letzte Element derselben radial gerichtet sein muß. Es ist daher

4a) $$w_2^2 = \left(w_1 \frac{R_1}{R_2}\right)^2 + v_2^2$$

und

$$w_2 \sin\varphi = c_2 = w_3 = w_1 \frac{R_1}{R_2},$$

unter φ den Winkel zwischen w_2 und v_2 verstanden.

Die Eintrittsgeschwindigkeit w_1 in das Schaufelrad bestimmt sich bei Annahme constanter Temperatur durch die Gleichung:

5) $$\frac{1}{2g}(w_1^2 - w_0^2) = RT \ln \frac{p_0}{p_1} \text{ (§. 30).}$$

Es ändern sich hiernach Druck und Geschwindigkeit gleichzeitig, d. h. mit der Zunahme von w ist eine Abnahme von p verbunden. Für den vorliegenden Fall ist w_1 größer als w_0, daher die Spannung p_1 im Einlaufe stets kleiner als die Spannung p_0 im Saugraume.

Die Zunahme an lebendiger Kraft für jedes Kilogramm geförderter Luft von der Eintritts- bis zur Austrittsstelle ist $\frac{1}{2g}(c_2^2 - c_1^2)$. Diese muß durch die Arbeit der Centrifugalkraft und die der Expansivkraft der Luft erzeugt werden. Es ist demnach:

$$\frac{1}{2g}(c_2^2 - c_1^2) = \frac{1}{2g}(v_2^2 - v_1^2) + RT \ln \frac{p_1}{p_2}$$

oder

$$2g RT \ln \frac{p_1}{p_2} = c_2^2 - c_1^2 - (v_2^2 - v_1^2)$$
$$= \left(w_1 \frac{R_1}{R_2}\right)^2 - \left(\frac{w_1}{\sin\beta}\right)^2 - v_2^2 \left[1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right].$$

Die rechte Seite der Gleichung ist jederzeit negativ, d. h. die Expansivkraft der Luft bei dem Austritte aus dem Rade ist größer als die Spannung p_1 beim Eintritt in das Rad, oder die Spannung der Luft wächst bei dem Durchlaufen des Rades zugleich mit der Geschwindigkeit. Wir haben daher:

$$6)\quad 2g\,RT\ln\frac{p_2}{p_1} = v_2^2\left[1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right] + w_1^2\left[\left(\frac{1}{\sin\beta}\right)^2 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right].$$

Nachdem die Luft die Canäle passirt, gelangt sie in den Auslauf, beginnt hier ihre Bewegung mit der Geschwindigkeit w_2 und der Pressung p_2 und vollendet dieselbe mit der Geschwindigkeit w und der Spannung p. Bei einem offenen Ventilator, wo der Auslauf nur durch die Erweiterung der Seitenwände gebildet wird, hat die Luft auch weiter keine Arbeit zu verrichten, als die Geschwindigkeit entsprechend umzuändern. Wir haben daher:

$$2g\,RT\ln\frac{p_2}{p} = w^2 - w_2^2 = w^2 - v_2^2 - \left(w_1\frac{R_1}{R_2}\right)^2.$$

Die Spannung p ist geringer als die Spannung p_2, weshalb sich ergiebt:

$$7)\quad 2g\,RT\ln\frac{p}{p_2} = v_2^2 + \left(w_1\frac{R_1}{R_2}\right)^2 - w^2.$$

Die Addition der Gleichungen (6) und (7) liefert, nachdem Gleichung (5) subtrahirt worden:

$$2g\,RT\ln\frac{p}{p_0} = 2v_2^2 - w^2 + w_0^2$$

$$8)\quad v_2 = \sqrt{g\,RT\ln\frac{p}{p_0} + \frac{w^2 - w_0^2}{2}}$$

und

$$u = 9{,}55\,\frac{v_2}{R_2}.$$

Wird bei einem geschlossenen Ventilator dem Auslaufe die oben angegebene spiralförmige Gestalt gegeben, so hat auch hier die Luft weiter keine Arbeit zu verrichten und es ist daher ebenfalls Formel (7) und (8) auf die Blaseventilatoren in Anwendung zu bringen.

Die von der Luft beim Passiren des Ventilators vom Saug- bis zum Ende des Blasraums verrichtete Arbeitstärke $L_n^=$ ist, wenn man mit q die Spannung der äußeren Luft bezeichnet:

$$9)\quad L_n^= = G\left(\frac{1}{2g}w^2 + RT\ln\frac{p}{q} - \frac{1}{2g}w_0^2 - RT\ln\frac{p_0}{q}\right)$$

$$= \frac{G}{g}\left(g\,RT\ln\frac{p}{p_0} + \frac{w^2 - w_0^2}{2}\right) = \frac{G}{g}v_2^2.$$

Die an den Ventilator zu übertragende rohe Arbeitstärke $L_a^=$ ist daher, wenn η den Nutzeffect der Maschine bezeichnet:

10) $$L_a^{=} = \frac{1}{\eta} L_n^{=}.$$

35. Die aus praktischen Versuchen entnommenen Größen, welche bei Berechnung der Ventilatoren zur Vervollständigung der hier vorgetragenen Theorie benutzt werden müssen, sind folgende:

Die Anzahl n der Radschaufeln bestimmt man nach der empirischen Formel:

$$n = 8 \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1},$$

das Verhältniß $\frac{R_1}{R_2}$ nimmt man $= 1/2$ bis $1/3$ und der Nutzeffect η liegt in den Grenzen 0,25 bis 0,50.

In Bezug auf weitere Angaben müssen wir die beiden verschiedenen Anwendungen eines Ventilators in Betracht ziehen.

a. Saugender Ventilator, Exhaustor, Wetterrad.

Diese Art von Ventilatoren sind hauptsächlich in Bergwerken in Anwendung und werden hier benutzt, eine Grubenstrecke mit frischer Luft zu versorgen, indem sie durch das Fortsaugen der schlechten Luft an dem einen Ende der Strecke ein Nachrücken der äußeren atmosphärischen Luft an dem anderen Ende bewirken. Es ist hier also der Saugraum geschlossen und der Druckraum ist die äußere Atmosphäre. Die Spannung p_0 ist deshalb geringer als die der äußeren Luft und wird durch eine Quecksilber- oder Wassersäule bestimmt, welche den vorhandenen Minderdruck, die Depression, angiebt. Dieselbe beträgt 0,0327 bis 0,0654^m am Wassermanometer, während die dem äußeren Luftdruck entsprechende Wassersäule 10,334^m beträgt. Es ist, diese Werthe allgemein mit h und b bezeichnend,

$$ln \frac{p}{p_0} = ln \frac{b}{b - h} = \frac{2h}{2b - h}$$

annähernd. Die Geschwindigkeit w_0 im Saugraume ist immer gleich der Geschwindigkeit w_1 im Einlaufe zu nehmen und zwar ist zweckmäßig $w_0 = w_1 = 0{,}8^m$, welche Geschwindigkeit eine gehörige Erneuerung der Luft gestattet und andererseits ein Verlöschen der Grubenlichter nicht befürchten läßt. Die Geschwindigkeit w der austretenden Luft muß möglichst klein gehalten werden, um einen zu großen Arbeitsverlust zu vermeiden. Wir setzen $w = 3{,}5^m$ und können dann nach Formel (8) die äußere Peripheriegeschwindigkeit v_2 berechnen. Der äußere Radhalbmesser R_2 liegt in den Grenzen von 0,6 bis 1,3^m, wonach im Verein mit v_2 die Anzahl u der Umdrehungen bestimmt sind. Nachdem die beiden Kreise mit R_1 und R_2 verzeichnet, v_1 und die Anzahl n der Schaufeln berechnet sind, handelt es sich um Verzeichnung der letzteren. Der Winkel β ist durch die Gleichung $tang\, \beta = -\frac{w_1}{v_1}$ bestimmt und der Radius ϱ der für die Schaufel in Anwendung zu bringenden Kreisbogen findet sich wie bei den Centrifugalpumpen nach der Formel:

$$\varrho = {}^1/_2 \, R_2 \, \frac{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2}{\frac{R_1}{R_2} \cos\beta}.$$

Nach Verzeichnung der Schaufeln lassen sich die normalen Entfernungen a_1 und a_2 messen, und nach Annahme der Radhöhe $e_1 = e_2 = e = R_1$ findet sich nach (1) und (2) die Summe der Eintritts- und Austrittsöffnungen F_1 und F_2 sowie das in jeder Secunde fortgeschaffte Luftgewicht G. Mit diesem läßt sich dann die nutzbare und rohe Arbeitstärke nach Formel (9) und (10) berechnen, sowie der Querschnitt F des Saugrohres.

Den Halbmesser R_3 des concentrischen Auslaufes nimmt man gleich 2,25 R_2 oder es läßt sich derselbe auch wie folgt berechnen. Es war φ der Winkel zwischen w_2 und v_2, ebenso sei φ_1 der Winkel zwischen w und der Peripherie der äußeren Begrenzung des Auslaufes, dann ist unter der Voraussetzung, daß das Luftvolumen sich innerhalb des Auslaufes nicht ändert:

$$2\pi R_2 \, e \sin\varphi \, w_2 = 2\pi R_3 \, e \sin\varphi_1 \, w$$

und

$$R_3 = R_2 \, \frac{w_2}{w} \, \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_1}.$$

Es ist aber weiter

$$\frac{R_2}{R_3} = \frac{\sin(90 - \varphi_1)}{\sin(90 + \varphi)} = \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi},$$

daher

$$\cos\varphi_1 = \frac{R_2}{R_3} \cos\varphi$$

und

$$\sin\varphi_1^2 = 1 - \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^2 \cos\varphi^2.$$

Da der Winkel φ nach Formel (4 a) bekannt ist, so läßt sich $\sin\varphi_1$ und dann nach der obigen Formel R_3 berechnen, womit nun sämmtliche constructiven Elemente das Exhaustors bestimmt sind.

b. Blasender Ventilator. Diese saugen die Luft unmittelbar aus der Atmosphäre, welche wir als ruhend voraussetzen dürfen und demnach $w_0 = 0$ und p_0 gleich dem Druck der äußeren Luft, gemessen durch eine Wassersäule von der Höhe $b = 10{,}334^m$ haben. Der Druckraum ist dagegen geschlossen und hier findet ein Ueberdruck, eine Pression über die äußere Atmosphäre statt, welche wieder durch eine Wassersäule von der Höhe h^m gemessen wird. Bei Winderzeugung für Schmelzprocesse ist $h = 0{,}157$ bis $0{,}471^m$ und dann $ln \frac{p}{p_0} = ln \frac{b+h}{b} = \frac{2h}{2b+h}$ annähernd, v_2 liegt in den Grenzen 50 bis 80 Meter und w_1 nimmt man zu 9 bis 18 Meter. Bei Annahme von $\frac{R_1}{R_2}$ ist nun auch

v_1 und *tang* β bestimmt, und nimmt man noch $R_2 = 0{,}5$ bis $0{,}63$ Meter, so kann man das Rad verzeichnen und die Schaufeln lassen sich in gleicher Weise wie beim Exhaustor construiren. Die Radhöhen werden wieder gleich groß gleich $e = R_1$ genommen. Nachdem nun a_1 und a_2 gemessen, F_1, F_2 und G berechnet, sind die Arbeitstärken $L_n^{=}$ und $L_a^{=}$ bestimmt. Aus Formel (8) ergiebt sich die Geschwindigkeit w und dadurch läßt sich der Querschnitt F des Druckrohres berechnen, an welches sich der spiralförmig construirte Auslauf gehörig anzuschließen hat. Die bei dem Exhaustor abgeleiteten Formeln für R_3 und $\sin \varphi_1$ können für jeden Punkt der Begrenzung des spiralförmigen Auslaufes in Anwendung gebracht werden, und ist damit die Construction desselben bestimmt.

36. Nachdem in dem Vorigen die Arbeitstärke von comprimirter Luft, Dampf und Wasser behandelt sowie auch die für diese Naturkräfte benutzten Maschinen im Allgemeinen erläutert worden sind, bleibt noch schließlich die Arbeitstärke der bewegten atmosphärischen Luft, des Windes, zu untersuchen übrig. Die geringere oder größere Geschwindigkeit der bewegten Luft bestimmt die Stärke des Windes, der damit auch verschiedene Bezeichnungen erhält. In der folgenden Tabelle sind die Namen des Windes mit den zugehörigen Geschwindigkeiten zusammengestellt.

Bezeichnung für die Stärke des Windes	Geschwindigkeit des Windes pro Secunde
Mäßig	2,5 Meter
Frisch	4,7 „
Lebhaft, zum Betriebe von Windmühlen geeignet . .	6,9 „
Heftig	12,6 „
Sturm	25,1 „
Orkan	40,8 „

Zur Berechnung der rohen Arbeitstärke $L_a^{=}$ des Windes sei c die Geschwindigkeit des Windes in Metern, γ das specifische Gewicht der Luft in Kilogrammen pro Kubikmeter und Q das in einer Secunde zuströmende Luftquantum in Kubikmetern. Die in einem Körper enthaltene Arbeit ist gleich seiner lebendigen Kraft, d. h.

$$L_a^{=} = {}^1/_2 \frac{Q\gamma}{2g} c^{2\,\mathrm{km}}_{=}.$$

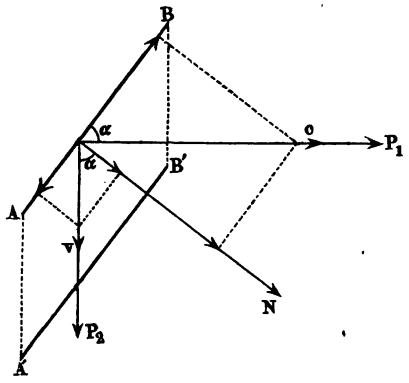
Kennt man den Querschnitt des Windstromes gleich F Quadratmeter, so ist $Q = Fc$ und deshalb

$$1)\quad L_a^{=} = \frac{\gamma}{2g} F c^{3\,\mathrm{km}}_{=} = 0{,}0659\ F c^{3\,\mathrm{km}}_{=},$$

wenn man $\gamma = 1{,}29318$ Kilogramm annimmt.

Es sei, Fig. 176, AB die Fläche, gegen welche der Wind mit der Geschwindigkeit c stößt, v dagegen die Geschwindigkeit der in Bewegung befindlichen Fläche und es bilde AB mit c den Winkel α, während c und v auf einander rechtwinkelig stehen. Wir zerlegen c und v nach Richtung der Fläche AB und normal dazu, dann ersieht sich, daß die Geschwindigkeit $c \sin\alpha$ auf die Geschwindigkeit $v \cos\alpha$ gebracht werden muß und daß wenn Q Kubikmeter Luft in jeder Secunde zuströmen, die an die Fläche übertragene Arbeitstärke gleich

Fig. 176.



$$\tfrac{1}{2}\frac{Q\gamma}{g}(c^2 \sin\alpha^2 - v^2 \cos\alpha^2)$$

ist. Durch die plötzliche Geschwindigkeitsänderung findet aber ein Verlust an lebendiger Kraft statt, welcher mit Rücksicht auf Nr. 20 der Uebungen dieses Capitels gleich $\tfrac{1}{2}\frac{Q\gamma}{g}(c \sin\alpha - v \cos\alpha)^2$ ist. Die an die Fläche übertragene Arbeitstärke $L^=$ ist deshalb:

$$L^= = \tfrac{1}{2}\frac{Q\gamma}{g}(c^2 \sin\alpha^2 - v^2 \cos\alpha^2 - c^2 \sin\alpha^2 + 2cv \sin\alpha \cos\alpha - v^2 \cos\alpha^2)$$

$$= \frac{Q\gamma}{g} v \cos\alpha\,(c \sin\alpha - v \cos\alpha).$$

Bezeichnen wir den Inhalt der Fläche AB mit f, so wäre Q im ruhenden Zustande derselben gleich $fc \sin\alpha$, da die Fläche jedoch mit der Geschwindigkeit $v \cos\alpha$ ausweicht, so ist die in der Secunde zufließende Windmenge $Q = f(c \sin\alpha - v \cos\alpha)$ und daher:

$$L^= = \frac{f\gamma}{g}(c \sin\alpha - v \cos\alpha)^2 v \cos\alpha,$$

welchen Werth wir jedoch den angestellten Versuchen gemäß, $3/2$ mal so groß zu nehmen haben. Es ist daher für $\gamma = 1{,}29318$ Kilogramm

2) $$L^= = 0{,}1977\, f(c \sin\alpha - v \cos\alpha)^2 v \cos\alpha.$$

Hieraus findet sich der Normaldruck N gegen die Fläche f

3) $$N = 0{,}1977\, f(c \sin\alpha - v \cos\alpha)^2,$$

der Druck P_1 in Richtung des Windes

4) $$P_1 = 0{,}1977\, f(c \sin\alpha - v \cos\alpha)^2 \sin\alpha,$$

der Druck P_2 in Richtung der Bewegung:

5) $$P_2 = 0{,}1977\, f(c \sin\alpha - v \cos\alpha)^2 \cos\alpha.$$

37. Werden die in voriger Nummer entwickelten Formeln auf die Flügel einer Windmühle in Anwendung gebracht, so bedeutet f ein Element des Flügels,

welches sich in der Entfernung r von der Wellenachse befinden mag, so daß $v = r \cdot \omega$ gesetzt werden muß, unter ω die Winkelgeschwindigkeit der Flügel verstanden. In dem Ausdruck für die Arbeitstärke $L^{=}$ ist demnach bei dieser Anwendung v und α veränderlich, $L^{=}$ wird zu Null, wenn 1) $\cos\alpha = 0$, d. h. $\alpha = 90^0$. 2) $c \sin\alpha - v\cos\alpha = 0$, d. h. $tang\,\alpha = \frac{v}{c}$. Es muß demnach zwischen den hierdurch erhaltenen Grenzen von α einen Werth geben, für den L zu einem relativen Maximum wird. Nimmt man α als constant an, so findet sich das Maximum der Arbeitstärke $L^{=}$ in dem Maximalwerthe von $(c \sin\alpha - v\cos\alpha)^2 v$. Es ist:

$$(c \sin\alpha - v\cos\alpha)^2 v = (c \sin\alpha - v_1 \cos\alpha^2) v_1$$

$$c^2 v \sin\alpha^2 - 2 c v^2 \sin\alpha \cos\alpha + v^3 \cos\alpha^2$$

$$= c^2 v_1 \sin\alpha^2 - 2 c v_1^2 \sin\alpha \cos\alpha + v_1^3 \cos\alpha^2.$$

$$c^2 \sin\alpha^2 (v - v_1) - 2 c \sin\alpha \cos\alpha (v^2 - v_1^2) + \cos\alpha^2 (v^3 - v_1^3) = 0.$$

Wir dividiren durch $v - v_1$ und gehen dann zur Grenze über, indem wir $v = v_1$ setzen, so entsteht:

$$c^2 \sin\alpha^2 - 4 c \sin\alpha \cos\alpha \cdot v + 3 \cos\alpha^2 v^2 = 0$$

$$(c \sin\alpha - 2 v \cos\alpha)^2 - v^2 \cos\alpha^2 = 0$$

oder

$$c \sin\alpha = 3 v \cos\alpha,$$

d. h.

1) $$v = \frac{c}{3} tang\,\alpha.$$

Substituiren wir diesen Werth in dem erhaltenen Ausdruck für die Arbeitstärke $L^{=}$, so erhält man

2) $$L_1^{=} = \frac{4}{27} \cdot 0{,}1977 \, c^3 \sin\alpha^3.$$

Mit der Zunahme von α wächst L_1 und zwar wird L_1 am größten für $\alpha = 90^0$, wozu aber eine Geschwindigkeit $v = \infty$ gehören würde. Es ist demnach dieses Maximum unbrauchbar, und wir lernen nur aus der Untersuchung, daß die Arbeitstärke mit v, d. i. mit der Anzahl u der Umdrehungen pro Minute wächst. Da aber mit diesen zugleich der Arbeitsverlust und die Zapfenreibung entsprechend zunimmt, so muß man für einige Umdrehungszahlen den Werth von L berechnen, um dadurch den Maximalwerth zu finden.

Nehmen wir andererseits v als constant an, und suchen den Maximalwerth von L in Bezug auf α, so handelt es sich um das Maximum von $(c \sin\alpha - v\cos\alpha)^2 \cos\alpha$.

Es ist:

$$(c \sin\alpha - v\cos\alpha)^2 \cos\alpha = (c \sin a_1 - v\cos\alpha_1)^2 \cos\alpha_1$$

$$c^2 \sin\alpha^2 \cos\alpha - 2 c v \sin\alpha \cos\alpha^2 + v^2 \cos\alpha^3 = c^2 \sin\alpha_1^2 \cos\alpha_1$$

$$- 2 c v \sin\alpha_1 \cos\alpha_1^2 + v^2 \cos\alpha_1^3$$

$$c^2 (\sin\alpha^2 \cos\alpha - \sin\alpha_1^2 \cos\alpha_1) - 2 c v (\sin\alpha \cos\alpha^2 - \sin\alpha_1 \cos\alpha_1^2)$$

$$+ v^2 (\cos\alpha^3 - \cos\alpha_1^3) = 0$$

$$c^2 (\cos\alpha - \cos\alpha^3 - \cos\alpha_1 + \cos\alpha_1^3) - 2cv (\sin\alpha - \sin\alpha^3 - \sin\alpha_1 + \sin\alpha_1^3) + v^2 (\cos\alpha^3 - \cos\alpha_1^3) = 0$$

$$c^2 (\cos\alpha - \cos\alpha_1) + (v^2 - c^2) (\cos\alpha^3 - \cos\alpha_1^3) - 2cv (\sin\alpha - \sin\alpha_1) + 2cv (\sin\alpha^3 - \sin\alpha_1^3) = 0$$

$$2\sin\frac{\alpha+\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_1-\alpha}{2}\{c^2 + (v^2 - c^2)(\cos\alpha^2 + \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\alpha_1^2)\}$$

$$- 2\cos\frac{\alpha+\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha-\alpha_1}{2}\{2cv - 2cv(\sin\alpha^2 + \sin\alpha\sin\alpha_1 + \sin\alpha_1^2)\} = 0.$$

Wir dividiren durch $\alpha - \alpha_1$, indem wir berücksichtigen, daß $lim \frac{\sin\alpha}{arc\,\alpha} = 1$ ist, gehen zur Grenze über und setzen $\alpha = \alpha_1$, so entsteht

$$-\sin\alpha\{c^2 + (v^2 - c^2)\, 3\cos\alpha^2\} - \cos\alpha\{2cv - 2cv\, 3\sin\alpha^2\} = 0.$$

Bevor wir aus dieser Gleichung α entwickeln, werde dieselbe in folgender Weise umgeformt. Aus:

$$-3v^2\cos\alpha^2\sin\alpha - c^2\sin\alpha + 3c^2\cos\alpha^2\sin\alpha - 2cv\cos\alpha + 6cv\sin\alpha^2\cos\alpha = 0 \text{ folgt:}$$

$$-2v^2\cos\alpha^2\sin\alpha + 2c^2\sin\alpha\cos\alpha^2 + 2vc\sin\alpha^2\cos\alpha - 2vc\cos\alpha^3$$

$$= v^2\cos\alpha^2\sin\alpha + c^2\sin\alpha^3 - 2vc\sin\alpha^2\cos\alpha$$

$$2\cos\alpha\,(c\sin\alpha - v\cos\alpha)(c\cos\alpha + v\sin\alpha) = \sin\alpha\,(c\sin\alpha - v\cos\alpha)^2$$

$$2\cos\alpha\,(c\cos\alpha + v\sin\alpha) = \sin\alpha\,(c\sin\alpha - v\cos\alpha)$$

$$2\,(c + v\,tang\,\alpha) = tang\,\alpha\,(c\,tang\,\alpha - v)$$

$$tang\,\alpha^2 - 3\frac{v}{c}\,tang\,\alpha = 2$$

3) $$tang\,\alpha = \frac{3v}{2c} + \sqrt{\left(\frac{3v}{2c}\right)^2 + 2}.$$

Da die Geschwindigkeit v des Flügelelementes mit der Entfernung r desselben von der Drehachse zunimmt, so folgt aus der letzten Gleichung, daß die Winkel α mit dieser Entfernung wachsen, daß also zur Erhaltung einer möglichst großen Leistung die Flügel nicht eben, sondern windschief herzustellen sind, und zwar in der Weise, daß die äußeren Flügelelemente weniger als die inneren von der Umdrehungsebene abweichen.

Formen wir, mit Benutzung des aus der letzten Formel bestimmten Werthes von α, den für die Arbeitstärke $L^=$ entwickelten Ausdruck um, so erhalten wir als relatives Maximum

$$L_2^= = 0{,}1977\, f\, c^3 \left(\sin\alpha - \frac{tg\,\alpha^2 - 2}{3\,tg\,\alpha}\cos\alpha\right)^2 \frac{tg\,\alpha^2 - 2}{3\,tg\,\alpha}\cos\alpha.$$

4) $$L_2^= = \frac{4}{27}\, 0{,}1977\, f\, c^3\, \frac{3\sin\alpha^2 - 2}{\sin\alpha^3}.$$

Bei der Berechnung der durch den Wind auf einen Windmühlenflügel übertragenen Arbeitstärke theilt man die Flügellänge l in 7 gleiche Theile, und läßt den ersten an der Welle gelegenen Theil frei, benutzt also nur $^6/_7$ der Flügellänge zur eigentlichen Flügelconstruction. Die zweckmäßige Anzahl u der Umdrehungen pro Minute wird angenommen, und bestimmt sich daraus die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 0{,}1047\ u$. Die in den einzelnen Theilpunkten des Flügels stattfindenden Peripheriegeschwindigkeiten, welche ebenso wie die zugehörigen Winkel α für ein zwischen zwei Theilpunkten liegendes Flügelfeld gleich groß angenommen werden, sind nun durch die Gleichungen $v_1 = \omega \frac{l}{7}$, $v_2 = \omega \frac{2l}{7}$ bis $v_7 = \omega l$ gegeben. Mit Hülfe dieser Werthe lassen sich die entsprechenden Winkel α_1 bis α_7 nach Formel (3) berechnen und dann die Arbeitstärken für die einzelnen Flügelfelder nach Formel (4), deren Summation die Arbeitstärke für einen Flügel ergiebt.

Bezeichnet man die bespannte Flügelfläche mit F, so kann man nach Versuchen von Coulomb als Mittelwerth die von einem Flügel übertragene Arbeitstärke $= 0{,}03\ F\ c^3$ nehmen, woraus sich dann die Totalleistung der Windmühle mit n Flügeln zu

5) $$L^{=} = 0{,}03\ n F c^3 \tfrac{\text{km}}{\text{sec}}$$

ergiebt, wobei $\frac{c}{u} = 0{,}52088$ im Mittel zu nehmen ist.

Von der berechneten Arbeitstärke ist die der Reibung am Halszapfen in Abzug zu bringen. Ist G das Gewicht der Flügelwelle mit Zubehör, r der Halbmesser des Zapfens, μ_1 der Reibungscofficient, so ist das Moment der Zapfenreibung gleich $\mu_1 G r$ und die von der Reibung verbrauchte Arbeitstärke gleich $\mu_1 G r \frac{\pi u}{30}$, daher die von der Flügelwelle übertragene nutzbare Arbeitstärke

6) $$L_n^{=} = 0{,}03\ n F c^3 - 0{,}1047\ \mu_1 G r u.$$

38. In Fig. 177 stellen AB und $A'B'$ auf einander folgende Lagen eines Schiffssegels von F Quadratmeter Inhalt vor. Ist die Geschwindigkeit des Windes c die des Schiffes v und bilden die Geschwindigkeitsrichtungen mit AB die Winkel β und α, so sind die Normal-Componenten dieser Geschwindigkeiten $c \sin\beta$ und $v \sin\alpha$. Fließen in jeder Secunde Q Kubikmeter Luft gegen das Segel, so ist die von der Luft an das Segel übertragene Arbeitstärke in gleicher Weise wie in Nummer (36):

$$L^{=} = \frac{Q\gamma}{2g}(c^2 \sin\beta^2 - v^2 \sin\alpha^2) - \frac{Q\gamma}{2g}(c \sin\beta - v \sin\alpha)^2.$$

Nach vorgenommener Reduction erhält man, wenn $Q = F(c \sin\beta - v \sin\alpha)$ gesetzt wird:

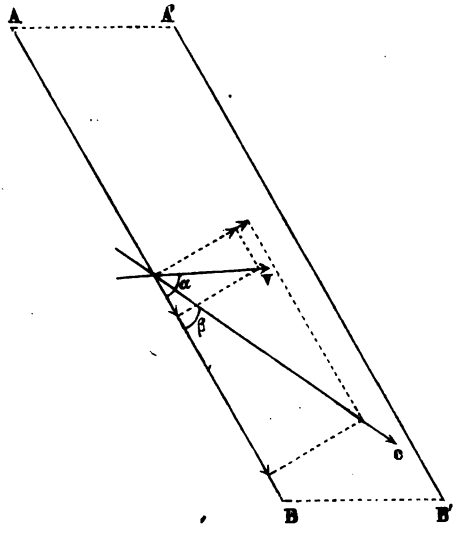
$$L^{=} = \frac{F\gamma}{g}(c \sin\beta - v \sin\alpha)^2\ v \sin\alpha,$$

wofür wir wieder den anderthalbfachen Werth in Rechnung bringen, darnach ist:

1) $$L^{=} = 0{,}1977\ F(c \sin\beta - v \sin\alpha)^2\ v \sin\alpha.$$

In dem vorstehenden Ausdruck sind v, α und β veränderlich, um deren zweckmäßige Wahl es sich handelt, wenn $L^{=}$ zu einem Maximum werden soll:

Fig. 177.



a) Es sei α und β constant, so ist $L^{=}$ ein Maximum für $v = \frac{c}{3}\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

b) Es sei α und v constant, so ist $L^{=}$ ein Maximum für $\beta = 90^0$.

c) Es sei β und v constant, so ist $L^{=}$ ein Maximum für $\sin\alpha = \frac{c}{3\,v}\sin\beta$.

Die letzte Bedingung stimmt mit der ersten überein, so daß für das absolute Maximum $\beta = 90^0$ und $v = {}^1/_3\,\frac{c}{\sin\alpha}$ gesetzt werden muß:

2) $$Max\ L^{=} = \frac{4}{27}\,0{,}1977\ Fc^3.$$

Der Werth für den Winkel α ist dabei unbestimmt geblieben, dessen Größe hauptsächlich auf die Schiffsgeschwindigkeit Einfluß hat.

Aus $v = {}^1/_3\,\frac{c}{\sin\alpha}$ folgt, daß das Schiff um so langsamer segelt, je mehr sich α einem rechten Winkel nähert, je mehr also die Richtung der Schiffsgeschwindigkeit v mit der Richtung der Windgeschwindigkeit c zusammenfällt. Der Widerstand, welchen das Wasser der Fortbewegung des Schiffes entgegenstellt, ist von der Form desselben abhängig. Je leichter das Wasser von dem vorderen Theil des Schiffes zur Seite geschoben wird, um so geringer ist die wirbelnde Bewegung des Wassers am hinteren Theil des Schiffes. Die dieser wirbelnden Bewegung entsprechende lebendige Kraft ist für die Fortbewegung des Schiffes jedenfalls verloren. Ein weiterer Widerstand entspringt aus der Reibung des Wassers an den Schiffswandungen des eingetauchten Theiles, und

dieser Widerstand ist bei der jetzigen Construction der Schiffe jedenfalls der größere. Bezeichnet man mit O den eingetauchten Theil der Schiffsoberfläche in Quadratmetern, so ist der Gesammtwiderstand W dem Ausdruck $1000 . O . \frac{v^2}{2g}$ proportional zu setzen. Hiernach haben wir unter ξ einen Erfahrungscoefficienten verstanden $W = \xi\ 1000 . O . \frac{v^2}{2g}$ und die von diesem Widerstande verbrauchte Arbeitstärke

$$Wv = \xi . 1000 . O . \frac{v^3}{2g} .$$

Bezeichnet man mit b, l und t Breite, Länge und Eintauchungstiefe des Schiffes, so ist annähernd

$$O = {}^2/_3\ bl + 2lt = bt \left({}^2/_3 \frac{l}{t} + 2 \frac{l}{b} \right)$$

und

3) $$Wv = \xi . 1000 . \frac{v^3}{2g}\ bt \left({}^2/_3 \frac{l}{t} + 2 \frac{l}{b} \right) .$$

Für den Gleichgewichtszustand ist die von dem Winde übertragene Arbeitstärke gleich der von dem Widerstande W verbrauchten. Benutzen wir für die erstere den Maximalwerth unter 2), setzen den ideellen Eintauchungsquerschnitt $bt = f$ und nehmen an, daß Wind- und Bewegungsrichtung zur Segelebene rechtwinklig stehen, so ist $v = \frac{c}{3}$ und

$$\frac{4}{27} . 0{,}1977 . F c^3 = \xi . 1000 . \frac{c^3}{27 . 2g} f \left({}^2/_3 \frac{l}{t} + 2 \frac{l}{b} \right) ,$$

daher

$$\frac{F}{f} = \xi \frac{1000}{0{,}1977 . 2g . 4} \left({}^2/_3 \frac{l}{t} + 2 \frac{l}{b} \right) .$$

Nehmen wir $\frac{l}{b} = 6$, $\frac{l}{t} = 16$ und $\frac{1000\,\xi}{2g} = 0{,}24$ als Mittelwerth für große ältere Segelschiffe, so ergiebt sich:

$$F = 7f \text{ circa},$$

d. h. die Segelfläche F ist circa 7mal so groß als der ideelle Eintauchungsquerschnitt f.

Anhang.

Elemente der graphischen Statik.

1. Zur Lösung einer Aufgabe aus der Planimetrie schlägt man entweder den rein constructiven Weg ein oder man versucht durch Rechnung das Maß x einer unbekannten Linie zu bestimmen, deren Kenntniß die Lösung der Aufgabe zur Folge hat. In dem letzteren Falle läßt sich das Resultat wieder auf eine zweifache Weise erhalten, je nachdem man die Rechnung mit den bestimmten Maßen der bekannten Linie bis zu Ende durchführt und für die unbekannte Linie das Maß x erhält, welches auf dem zu Grunde gelegten Maßstabe abgenommen werden kann, oder man ersetzt die letzte Rechnung durch eine geometrische Construction, welche die gesuchte Linie durch Zeichnung, d. i. auf geometrischem Wege ergiebt. Verstehen wir unter a, b, x Maße von Linien, und ist z. B. $x = \sqrt{a\,b}$, so läßt sich x dadurch berechnen, daß nach der Multiplication der Maße a und b die Quadratwurzel aus dem Producte gezogen wird, oder es ergiebt sich x auf constructivem Wege als mittlere Proportionale zwischen a und b. Geschieht die Lösung in der letzteren Weise, so sagt man, der algebraische Ausdruck $\sqrt{a\,b}$ ist construirt, oder die Rechnung ist durch eine Zeichnung ersetzt worden. Die einfachsten algebraischen Ausdrücke, deren Construction sich unmittelbar ergiebt, sind, unter a, b, c Linien verstanden, folgende:

$$a + b;\ a - b;\ \frac{a\,b}{c};\ \sqrt{a^2 + b^2};\ \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma};$$

$$\sqrt{c^2 - a^2};\ c\sin\beta;\ a\,\mathrm{tang}\,\beta.$$

2. Die in dem Vorstehenden vorgelegten algebraischen Ausdrücke, deren Construction auf den einfachsten Sätzen der ebenen Geometrie beruht, lassen sich in großer Zahl vermehren, wenn man die Einheit des den Zeichnungen zu Grunde gelegten Maßstabes, gleich 1, bei den Constructionen zu Hülfe nimmt.

Es seien unter a und b gerade Linien verstanden, der Ausdruck $a\,b$ zur Construction vorgelegt. Setzen wir $a\,b = \frac{a\,b}{1}$, so ist die Aufgabe gelöst, so-

bald wir zu 1, a und b die vierte Proportionale bestimmt haben, und es ist dadurch zugleich gezeigt, in welcher Weise die Multiplication zweier Linien auf graphischem Wege erfolgen kann. Dehnt man das Verfahren auf ein Product von mehr als zwei Factoren aus, so ist nicht allein das Product $a\,b\,c\,\ldots$ construirbar, sondern auch der specielle Fall der Multiplication, die Potenz a^n mit einer absoluten ganzen Zahl als Exponent, ist durch eine Zeichnung darstellbar. Da der Ausdruck $a\,b$ als das Maß des Inhaltes eines Rechteckes von den Seiten a und b angesehen werden kann, so ist durch das vorstehende Verfahren zugleich gezeigt, in welcher Weise der Flächeninhalt eines Rechtecks, Parallelogramms und Dreiecks auf graphischem Wege berechnet wird. Benutzt man ferner die in der ebenen Geometrie gelehrten Verwandlungen der Polygone in Dreiecke, so ist auch der Flächeninhalt jedes Polygons durch eine Linie darzustellen, sobald man die Einheit des Maßstabes zu den Constructionen heranzieht. Die Division zweier Linien a und b, d. h. die Construction des Quotienten $\frac{a}{b}$ ergiebt sich jetzt ebenfalls auf leichte Weise, da $\frac{a}{b} = \frac{a\,.\,1}{b}$ die vierte Proportionale zu b, a und 1 vorstellt, und ist hierdurch die Multiplication sowie die Division von Brüchen auf graphischem Wege erledigt. Auch das Potenziren von Brüchen mit absoluten ganzen Zahlen bietet für die Zeichnung weiter keine Schwierigkeiten und sind hiernach Potenzen von trigonometrischen Functionen auf graphischem Wege ebenfalls darstellbar.

Bei der Addition und Subtraction von Brüchen muß man zuerst sämmtliche Brüche auf denselben Nenner bringen, was wiederum durch Construction der vierten Proportionale geschieht. Soll z. B. der Bruch $\frac{a}{b}$ den Nenner n erhalten, so ist $\frac{a}{b} = \frac{x}{n}$ zu setzen, woraus sich x als die vierte Proportionale zu b, a und n ergiebt. Dabei ist die Wahl des gemeinschaftlichen Nenners n ganz beliebig, derselbe kann also auch gleich der Einheit genommen werden. Die algebraische Summe der neuen Zähler liefert dann die dem angenommenen Nenner zugehörige Linie, welche die algebraische Summe der vorgelegten Brüche bestimmt.

Sowie $\sqrt{a\,b}$ die mittlere Proportionale zu a und b vorstellt, ist $\sqrt{a} = \sqrt{a\,.\,1}$ als die mittlere Proportionale zu a und der Einheit anzusehen, und ist hierdurch das Quadratwurzel-Ausziehen auf graphischem Wege gezeigt. Das Ausziehen der vierten Wurzel kann durch zweimalige Ausziehung der Quadratwurzel geschehen, überhaupt ist durch Wiederholung dieses Verfahrens $\sqrt[2n]{a}$ geometrisch darstellbar. Die Construction der dritten und fünften Wurzel, allgemein des Ausdrucks $\sqrt[2n+1]{a}$ ist dagegen mit Hilfe niederer Mathematik nicht mehr möglich, vielmehr muß man andere Curven als den Kreis dazu heranziehen.

3. Von besonderem Nutzen hierzu ist die logarithmische Spirale, eine Linie, welche in unendlich vielen Windungen um einen festen Punkt O läuft und die

Eigenschaft hat, daß die von O aus gezogenen veränderlichen Radien eine geometrische Reihe bilden, wenn die von ihnen eingeschlossenen auf einander folgenden Winkel gleich groß sind.

Es sei, Fig. 178, O der feste Punkt und OX eine feste Linie, von der aus die Winkel gezählt werden, welche die Lage der veränderlichen Radien $OB, OC \ldots$ bestimmen. Denken wir dabei die Punkte der Spirale durch Drehung des veränderlichen Radius bestimmt, so werde die Drehung, dem Zeiger einer Uhr analog, mit positiv, die entgegengesetzte mit negativ bezeichnet, und demgemäß bilden die veränderlichen Radien mit OX positive oder negative Winkel, je nachdem sie größer oder kleiner als OA sind. Diese Winkel heißen die Abweichung und werden mit ω bezeichnet. Nach der obigen Erklärung für die logarithmische Spirale sollen die von den veränderlichen Radien eingeschlossenen auf einander folgenden Winkel gleich groß sein, die Abweichungen müssen bei dieser Curve deshalb eine arithmetische Reihe erster Ordnung bilden. Es sei α die Differenz dieser arithmetischen Reihe, sowie q der Quotient der von den veränderlichen Radien gebildeten geometrischen Reihe; ferner sei die Länge OA des veränderlichen Radius für die Abweichung 0 gleich r, dann gehören zu den Abweichungen:

$$\ldots -3\alpha, -2\alpha, -\alpha, 0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha \ldots$$

Die veränderlichen Radien:

$$\ldots rq^{-3}, rq^{-2}, rq^{-1}, r, rq, rq^2, rq^3 \ldots,$$

und wir erhalten für die logarithmische Spirale bei dem Winkel $n\alpha = \omega$ und dem veränderlichen Radius ϱ, die Polargleichung

$$\varrho = rq^n = rq^{\frac{\omega}{\alpha}}.$$

Zur Construction einer logarithmischen Spirale nehme man r gleich der Einheit des Maßstabes $= 1$, wähle q beliebig, aber größer als 1, mache OA,

Fig. 178.

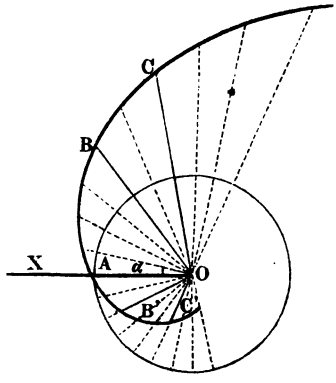


Fig. 179.

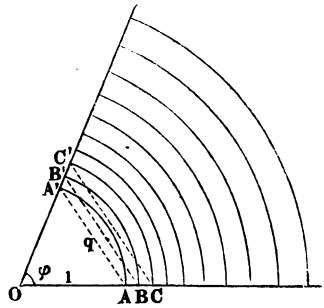


Fig. 179, gleich 1, schlage mit OA von O einen Kreis und trage von A aus die Sehne $AA' = q$ ein. Man ziehe die Verbindungslinie OA', schlage mit AA' von O einen zweiten Kreis und ziehe die durch den Winkel $A'OA = \varphi$ bestimmte Sehne BB', so ist diese gleich q^2, denn es ist $\frac{BB'}{AA'} = \frac{OB}{OA}$ oder $\frac{BB'}{q} = \frac{q}{1}$, d. h. $BB' = q^2$. Schlägt man jetzt mit BB' von O einen Kreis, so ist die durch den Winkel φ bestimmte Sehne CC' desselben gleich q^3 und man kann auf diese Weise beliebig viele veränderliche Radien der logarithmischen Spirale erhalten, welche größer als 1 sind. Zur Bestimmung der Radien unterhalb 1 nehme man, Fig. 180, $OA = q$, schlage mit OA von A einen Kreis, trage in denselben von A aus die Sehne $AA'' = 1$ ein und ziehe die Verbindungslinie OA''. Schlägt man jetzt mit AA'' von O einen Kreis, so ist die durch den Winkel φ bestimmte Sehne BB'' dieses Kreises gleich q^{-1}, denn man hat $\frac{BB''}{AA''} = \frac{OB}{OA}$ oder $\frac{BB''}{1} = \frac{1}{q}$, d. h. $BB'' = q^{-1}$. In gleicher Weise liefert der von O aus mit BB'' geschlagene Kreis in der Sehne CC'' den Werth q^{-2}, so daß auch die veränderlichen Radien, welche kleiner als 1 sind, in beliebiger Anzahl construirt werden können. Nachdem auf die eben angegebene Weise die veränderlichen Radien in beliebiger Anzahl gefunden worden sind, wähle man den Winkel α möglichst klein und trage sowohl ober- als auch unterhalb der festen Linie OX, Fig. 178, die Winkel

Fig. 180.

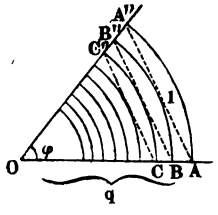
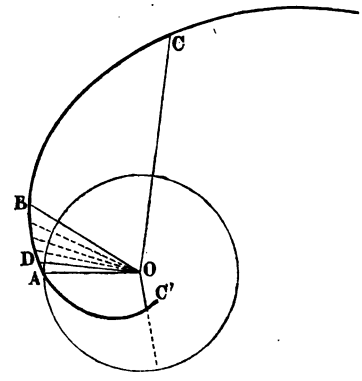


Fig. 181.



α, 2α, 3α, 4α... an. Macht man nun die auf einander folgenden Schenkel dieser Winkel oberhalb OX gleich $q, q^2 q^3 \ldots$, unterhalb derselben aber gleich q^{-1}, q^{-2}, q^{-3}..., so erhält man Punkte der zu construirenden logarithmischen Spirale, welche gehörig verbunden die Curve in beliebiger Ausdehnung liefern.

Mit Hilfe einer derartigen Curve läßt sich jede beliebige Potenz einer

Linie a leicht graphisch darstellen, vorausgesetzt, daß die Curve mit größter Genauigkeit und in gehöriger Ausdehnung verzeichnet ist. Zur Construction von a^n, unter n eine ganze absolute Zahl verstanden, schneide man die vorhandene Spirale, Fig. 181, von O aus mit den Radien 1 und a in den Punkten A und B, ziehe die Verbindungslinien OA und AB, und mache den Winkel AOC gleich dem $n$fachen des Winkels AOB, dann ist $OC = a^n$. Will man a^{-n} graphisch darstellen, so trage man den Winkel AOC auf die entgegengesetzte Seite von OA an und erhält dann in OC' den verlangten Werth. Ist endlich $a^{\frac{1}{n}}$ zu construiren, so theile man den Winkel AOB in n gleiche Theile, ziehe die zugehörigen Radien, so ist der dem Radius OA zunächst liegende Radius OD gleich $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

4. In dem Vorstehenden ist gezeigt worden, daß die am häufigsten vorkommenden Rechenoperationen mit den Maßen von Linien, durch eine Zeichnung mit den Linien selbst ersetzt werden können, und es ist leicht einzusehen, daß diese Methode in all den Fällen den Vorzug vor der Rechnung verdienen wird, in welcher die zu ermittelnden Größen geometrische sind und verzeichnet werden müssen. Die hierbei anzuwendenden Constructionen, in dem Vorstehenden nur angedeutet, bilden methodisch geordnet eine eigene Disciplin, welche den Namen **graphisches Rechnen**, **graphische Arithmetik**, **Arithmographie** erhalten hat.

5. Das graphische Rechnen ist bei allen denjenigen Größen in Anwendung zu bringen, welche sich durch gerade Linien darstellen lassen. In der reinen Mathematik beschäftigen wir uns mit „Zahlen und Raumgrößen“, auf beide ist die graphische Methode anwendbar. In der Mechanik treten „Zeit und Kraft“ als Größen hinzu, deren jede für sich wiederum graphisch darstellbar ist. In Bezug auf die letztere Größe, die Kraft, tritt aber noch ein eigenthümlicher Umstand hinzu, welcher bei der graphischen Lösung in gleicher Weise wie bei der Rechnung berücksichtigt werden muß, d. i. die Lage und Richtung der Kraft zu festen Linien in der Ebene oder im Raume. Sieht man hierbei von der Zeit ab, zieht man allein Größe, Lage und Richtung der Kräfte in Betracht, so beschränken sich die hier gestellten Aufgaben auf die Zusammensetzung und Zerlegung der auf einen Körper wirkenden Kräfte, sowie auf die Bestimmung der Gleichgewichtsbedingungen derselben.

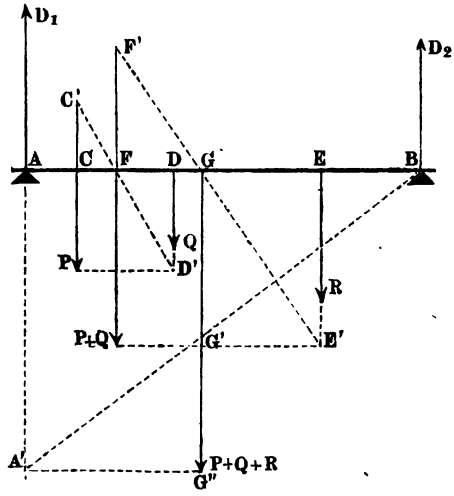
In dem vorliegenden Buche ist an verschiedenen Stellen von der constructiven Methode Gebrauch gemacht worden. In der Lehre vom Schwerpunkte wurden die Lösungen theils ganz ohne Rechnung, theils durch kleine Nebenrechnungen mit Hilfe von Schwerlinien und Schwerebenen ermöglicht. Ein weiteres Beispiel der graphischen Lösung bieten die Dachbinder S. 206, I., bei welchen die durch umfangreiche Rechnungen erlangten Resultate an der Figur selbst, unter Annahme einer passenden Einheit, durch Linien dargestellt worden sind. Auch in der Festigkeitslehre §. 70, Nro. 3 und 4, sind die Momente der biegenden Kräfte für die einzelnen Querschnitte des Balkens graphisch

dargestellt und dadurch ihre Veränderung anschaulich gemacht worden. Für andere Aufgaben würde sich die graphische Lösung mit Leichtigkeit unter Benutzung der vorgeführten Methoden durchführen lassen. So ist bei Aufgabe 8, S. 120, I., der Druck D_1 auf einen der Unterstützungspunkte

$$D_1 = \frac{P(a-b)+Q(d+e)+Re}{a} = P\frac{a-b}{a} + Q\frac{d+e}{a} + R\frac{e}{a}.$$

Benutzt man für die Belastungen und Längen passende Einheiten, so hätte man zu $P\frac{a-b}{a}$, $Q\frac{d+c}{a}$ und $R\frac{e}{a}$ die vierten Proportionalen zu construiren, diese zu addiren und die erlangte Linie auf dem Kräftemaßstab abzunehmen. Will man dagegen in diesem Falle ohne vorhergegangene Rechnung die Drucke D_1 und D_2 bestimmen, so verfahre man wie folgt: Es sei, Fig. 182, $AB = a$

Fig. 182.



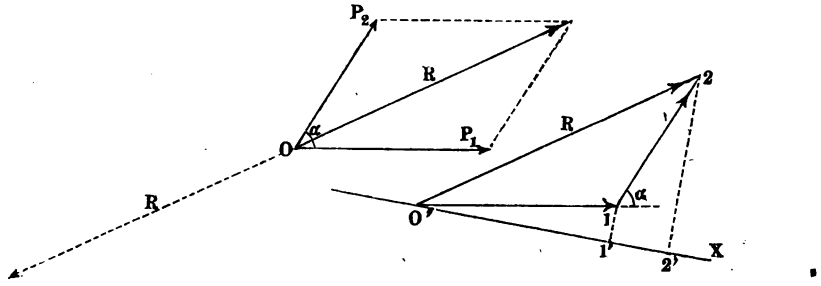
der vorgelegte Stab, AC, CD, DE, EB seien die gegebenen Abschnitte b, c, d, e sowie CP, DQ und ER die gegebenen Belastungen. Man verlängere PC bis C', so daß $CC' = DQ$, und mache $DD' = CP$, ziehe die Verbindungslinie CD', so ist F der Angriffspunkt der Resultante aus P und Q. Nachdem die Verlängerung FF' der Kraftrichtung von $P + Q$ gleich ER und EE' gleich $P + Q$ gemacht worden, ziehe man $F'E'$, so ist G der Angriffspunkt der Mittelkraft aus den drei gegebenen Belastungen. Macht man jetzt die in A errichtete Normale $AA' = P + Q + R$, und zieht $A'B$, so schneidet diese Linie die Kraftrichtung $P + Q + R$ in G', und es ist GG' = der Reaction D_1 und $G'G''$ gleich der Reaction D_2.

Diese herangezogenen Beispiele zeigen zwar die Verwendung der graphischen Methode in der Statik, jedoch ist darin ein allgemeines Princip der Lösung nicht zu erkennen.

Die in ein System gebrachten Methoden, derartige Aufgaben auf constructivem Wege zu lösen, bilden die graphische Statik, die Graphostatik, welche Disciplin von Professor Cullmann im Jahre 1866 geschaffen worden ist und deren Grundzüge hier vorgeführt werden sollen.

6. Als Ausgangspunkt benutzen wir den Satz vom Parallelogramm der Kräfte (§. 23, 2. I.), nach welchem die Resultante von zwei gleichartigen, auf einen Punkt wirksamen Kräften gefunden werden kann, und durch welchen zugleich die Zerlegung einer Kraft in zwei der Richtung nach gegebene Componenten bestimmt ist. Wirken auf den Punkt O (Fig. 183) zwei Kräfte P_1

Fig. 183.



und P_2 unter dem Winkel α, so findet sich die Resultante $R = O\,2$, wenn man an den Endpunkt von P_1 die Kraft P_2 der Größe und Richtung nach anträgt und den Endpunkt der letzteren mit O verbindet. In der Figur sind, wie es in der graphischen Statik üblich ist, nur die Zahlen 1, 2 sowie die Pfeile, welche die Richtung der Kräfte bestimmen, angegeben, und es bilden die drei Kräfte einen zusammenhängenden Linienzug O, 1, 2, O. Die Richtung der Resultante ist dem Pfeilzuge der angetragenen Kräfte entgegengesetzt, was durch den angebrachten Pfeil auch kenntlich gemacht ist.

Ist $\alpha = 0$ (Fig. 184) oder $\alpha = 180^0$ (Fig. 185), so erhält man nach demselben Verfahren in $O\,2$ die gesuchte Resultante. Fällt in dem letzteren

Fig. 184.

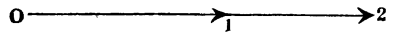
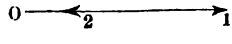


Fig. 185.



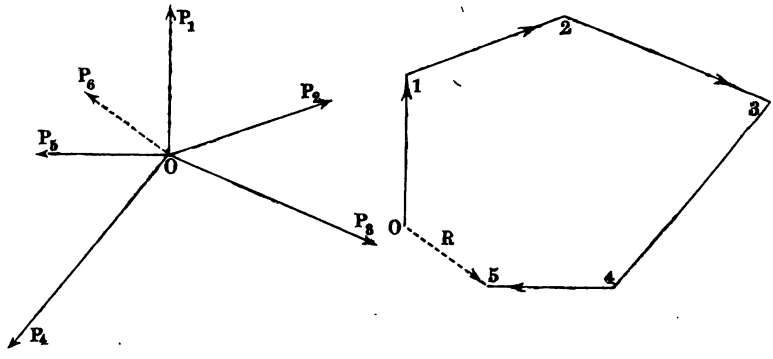
Falle der Endpunkt 2 der zweiten Kraft mit O zusammen, so halten sich die beiden in O wirksamen Kräfte das Gleichgewicht.

Denkt man durch O (Fig. 183) eine beliebige Linie OX gezogen, und die drei Kräfte P_1, P_2 und R darauf projicirt, so zeigt sich, daß die algebraische Summe der Projectionen der gegebenen Kräfte gleich der Projection $O2'$ der Resultante ist. Bei der Bildung der Resultante $O2$ auf die oben angegebene Weise ist damit zugleich die algebraische Addition der Kräfte-Projectionen auf eine beliebige Linie ausgeführt worden, und deshalb nennt man das Verfahren das graphische Addiren von Kräften.

Eine in O wirksame Kraft, welche der Resultante R gleich ist, jedoch nach der gerade entgegengesetzten Richtung wirkt, hält den Kräften P_1 und P_2 das Gleichgewicht. In dem Linienzuge O, 1, 2, O ist hiernach zur Herstellung des Gleichgewichts nur der Pfeil der Kraft $O2$ umzukehren.

7. Die angegebene graphische Addition von zwei Kräften läßt sich auf beliebig viele Kräfte, die in derselben Ebene liegen und den Punkt O angreifen, übertragen. Für den in Fig. 186 vorgelegten Fall zieht man hiernach $O1$

Fig. 186.



parallel und gleich der Kraft P_1, trägt an 1 der Größe und Richtung nach die Kraft P_2 bis 2 an, setzt daran die Kraft P_3 bis 3 und fährt in dieser Weise bis 5 fort, dann ist $O5$ die verlangte Resultante der gegebenen Kräfte. Die Richtung derselben ist dem Pfeilzuge der angetragenen Kräfte entgegengesetzt, also ist nicht $5O$, sondern $O5$ die Resultante in Bezug auf Größe und Richtung. Dieser Linienzug O, 1, 2, 3, 4, 5 heißt ein Kräftepolygon, und kann dasselbe, wie in dem vorliegenden Falle, offen sein; dagegen wird es sich schließen, also der Endpunkt der zuletzt angegebenen Kraft mit O zusammenfallen, wenn die Kräfte unter sich im Gleichgewicht waren. In dem vorliegenden Falle ist das Gleichgewicht dadurch herzustellen, daß man in O noch eine sechste Kraft

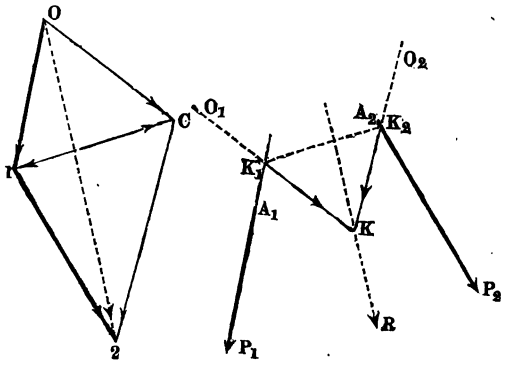
anbringt, die der Größe und Lage nach mit $O\,5$ übereinstimmt, mit derselben aber entgegengesetzte Richtung hat. Hieraus folgt, daß im geschlossenen Kräftepolygone jede Kraft, mit entgegengesetztem Pfeile versehen, zur Resultante der übrigen Kräfte wird. Die Reihenfolge der zu benutzenden Kräfte bei der Bildung des Kräftepolygons ist ganz beliebig, nur ist darauf zu achten, daß ein den Pfeilrichtungen folgender Punkt alle Seiten beschreibt, ohne eine derselben mehr als einmal zu durchlaufen. Liegen die in O angreifenden Kräfte nicht in derselben Ebene, so denken wir dieselben durch zwei ihrer Projectionen gegeben und bilden in jeder Projectionsebene das zugehörige Kräftepolygon, wodurch wir die Projectionen der Resultante in den beiden Projectionsebenen erhalten.

8. Soll umgekehrt eine Kraft R in zwei oder mehrere Componenten zerlegt werden, welche denselben Angriffspunkt O wie die gegebene Kraft R haben, so müssen diese Componenten, so aneinander gereiht daß der Anfangspunkt jeder folgenden Componente mit dem Ende der vorhergehenden zusammenfällt, einen Linienzug O, 1, 2 (Fig. 183) oder $O, 1, 2, 3, 4, 5$ (Fig. 186) bilden, dessen Anfangspunkt in den Anfangspunkt O der Kraft R und dessen Ende auf den Endpunkt R derselben Kraft zu liegen kommt. Im Uebrigen ist dieser Linienzug willkürlich und vermehrt sich dabei die Anzahl der nach Richtung und Größe beliebig anzunehmenden Stücke mit der Anzahl der Componenten. Die Pfeilrichtung der zu zerlegenden Kraft ist der in dem Linienzuge entgegengesetzt.

9. Für zwei in derselben Ebene gelegene Kräfte P_1 und P_2, welche der Größe, Lage und Richtung nach gegeben sind und welche die gegebenen Punkte A_1 und A_2 angreifen, ist die Resultante graphisch zu bestimmen.

Die Größe und Richtung der Resultante ist nach dem Vorigen durch das

Fig. 187.



Kräftepolygon O, 1, 2 in der Linie $O\,2$ (Fig. 187) gefunden, worin also $O\,1$ parallel und gleich der Kraft $A_1 P_1$ sowie $1 - 2$ parallel und gleich der Kraft

P_2 gemacht worden ist. Es handelt sich daher nur noch um irgend einen Punkt in der Ebene, durch welchen die Resultante geht. Man wähle den Punkt C beliebig und verbinde denselben mit O, 1 und 2, so läßt sich $O1$ als die Resultante zu den Componenten OC und $C1$ ansehen, sowie denn auch $1 - 2$ als die Resultante zu den Componenten $1C$ und $C2$ erscheint. Die beiden gegebenen Kräfte $O1$ und $1 - 2$ sind vermöge dieser Zerlegung durch die vier Kräfte OC, $C1$, $1C$, $C2$ ersetzt worden, von denen sich die Kräfte $C1$ und $1C$ aufheben, so daß allein die beiden Kräfte OC und $C2$ anstatt der gegebenen übrig bleiben, deren Resultante deshalb mit der der gegebenen Kräfte P_1 und P_2 in Größe, Lage und Richtung übereinstimmen muß. Nimmt man diese Zerlegung an der ursprünglichen Figur vor, indem man durch einen beliebigen Punkt K_1 der Kraft P_1 die beiden Linien O_1K_1 und K_1K_2 parallel mit OC und $C1$ zieht und durch K_2 die Linie K_2O_2 mit $C2$ parallel legt, so werden in den Linien O_1K_1 und O_2K_2 diejenigen Kräfte liegen, welche die Kräfte P_1 und P_2 vollständig ersetzen, da die in K_1K_2 gelegenen Componenten $C1$ und $1C$ gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind, sich also aufheben. Die beiden übrig gebliebenen Kräfte sind der Größe nach gleich OC und $C2$, sie wirken in den Linien O_1K_1 und O_2K_2, welche sich in dem Punkte K schneiden, der also der Resultante aus OC und $C2$ oder auch der von P_1 und P_2 angehören muß. Die Resultante selbst aber ist der Größe und Richtung nach durch $O2$ gegeben. Das

Fig. 188.

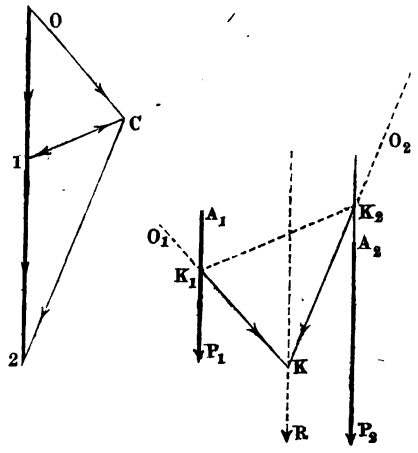
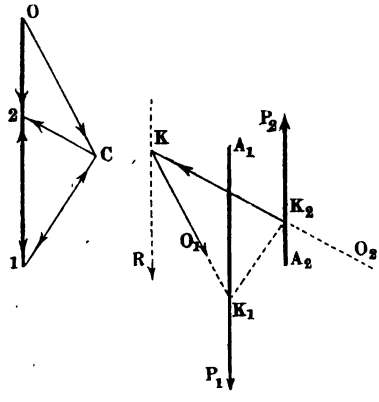


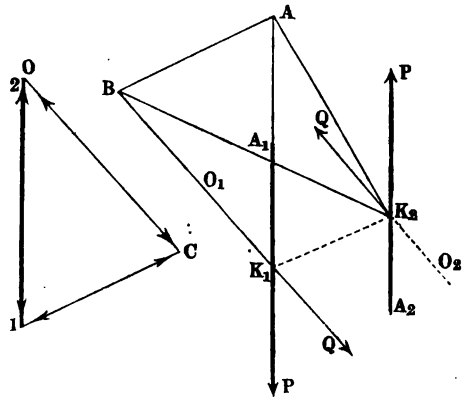
Fig. 189.



Verfahren ist vollständig anwendbar auf den Fall, wenn die beiden gegebenen **Kräfte** P_1 und P_2 parallel wirken; das Kräftepolygon O, 1, 2, O wird dabei **nur zu einer** geraden Linie (Fig. 188 und Fig. 189).

Haben in dem letzteren Falle die beiden parallelen Kräfte von entgegengesetzter **Richtung** gleiche Größe, so liegt in dem Kräftepolygon der Punkt 2 in O (**Fig. 190**), d. h. die Resultante ist Null, und der Punkt K rückt in die

Fig. 190.



Unendlichkeit, woraus folgt, daß es in diesem Falle keine endliche in endlicher Entfernung gelegene Resultante giebt. Zwei derartige, fest mit einander verbundene, gleich große, parallel aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte bilden aber ein **Kräftepaar**, welches das Bestreben hat, die Ebene um einen ihrer Punkte zu drehen, und welches deshalb als neues Element neben der Kraft in die Mechanik eingeführt worden ist. Man unterscheidet rechts- und linksdrehende Kräftepaare (§. 34, I).

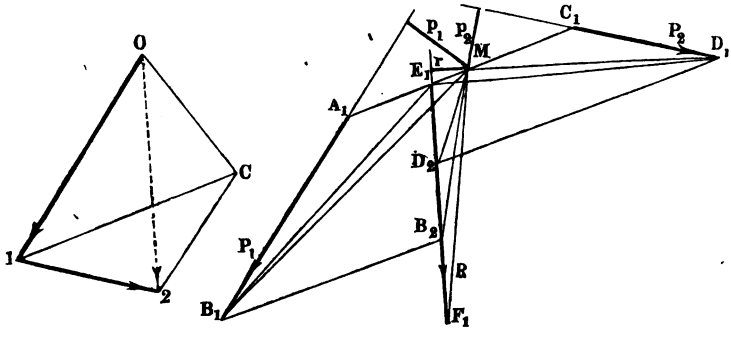
10. Denkt man den Linienzug $O_1 K_1 K_2 O_2$ mit dem System der gegebenen Kräfte P_1 und P_2 fest verbunden und durch materielle Linien dargestellt, welche in den Eckpunkten K_1 und K_2 durch Scharniere verbunden sind, die den in den Linien wirksamen Kräften zu widerstehen vermögen, so läßt sich die Ebene mit den Kräften durch diesen Linienzug ersetzen und es werden in den einzelnen Strecken durch die gegebenen Kräfte **innere** Kräfte hervorgerufen, welche als Zug- oder Druckspannungen erscheinen. In $K_1 K_2$ wirken die beiden sich gegenseitig vernichtenden Kräfte $C1$ und $1C$, in $O_1 K_1$ tritt die Kraft OC und in $O_2 K_2$ die Kraft $C2$ auf. Erleiden die einzelnen materiellen Linien Pressungen, so müssen sie als steif aufgefaßt werden, während sie für Zugspannungen beweglich wie ein Seil oder eine Kette sein können. Man nennt einen derartigen Linienzug ein **Seil-** oder **Gelenkpolygon**, dessen Ecken K heißen die **Knoten**, und es genügt mit dem Kräftepolygon O, 1, 2 und dem beliebig zu wählenden Punkte C, dem **Pole**, zur Bestimmung der

Resultante nach Lage, Größe und Richtung für zwei convergirende sowie für zwei parallele Kräfte. Die Verbindung des Kräftepolygons mit dem Pole und dem Gelenkpolygone wird Kräfteplan genannt.

Bilden die gegebenen Kräfte ein Kräftepaar, so erhalten wir durch Anwendung des Kräfteplanes die beiden parallelen Gelenkpolygon-Seiten $O_1 K_1$ und $O_2 K_2$, in welchen die beiden Kräfte OC und CO wirksam sind, die also wieder ein Kräftepaar $Q — Q$ bilden, welches das gegebene vollständig ersetzt. Macht man (Fig. 190 a. v. S.) $K_1 A = O1 = P$, $K_1 B = OC = Q$, so ist $BA \parallel 1C \parallel K_1 K_2$, und wird noch K_2 mit A und B verbunden, so ergeben sich die Dreiecke $K_1 K_2 A$ und $K_2 K_1 B$ als gleichflächig. Bezeichnet man den normalen Abstand der gegebenen Kräfte P mit p, den der erhaltenen Kräfte Q mit q, so sind die Inhalte dieser beiden Dreiecke beziehlich gleich $\frac{1}{2} Pp$ und $\frac{1}{2} Qq$, d. h. aber ein Kräftepaar $P — P$ läßt sich durch ein anderes Kräftepaar $Q — Q$ in derselben Ebene ersetzen, wenn die Producte Pp und Qq, d. h. die Momente der Kräftepaare (§. 34, 2, I.) einander gleich sind. Aus diesem Grunde kann das Moment als das Maß eines Kräftepaares angesehen werden.

11. Fällt man von einem beliebigen Punkte M in der Ebene der Kräfte gelegen, Normalen auf die Kraftrichtungen, so nennt man diese Normalen die Hebelarme oder schlechtweg die Arme der Kräfte, und das Product aus Kraft in Arm wird das Moment der Kraft in Bezug auf den beliebig angenommenen Punkt genannt, welches also als Maß des Drehungsbestrebens in Bezug auf diesen Punkt angesehen werden kann. In Fig. 191 stellen AB und CD

Fig. 191.



die Richtung zweier Kräfte P_1 und P_2, und EF die Richtung ihrer Resultante R vor, dann drehen in Bezug auf den Punkt M die Kräfte P_1 und R nach links, P_2 hat dagegen das Bestreben, nach rechts zu drehen. Denkt man durch M eine beliebige Linie gezogen, welche die drei Kraftrichtungen in den Punkten A_1, E_1, C_1 schneidet, und trägt man von diesen Punkten aus die

Größe der Kräfte auf bis B_1, F_1 und D_1, so können die Momente der drei Kräfte in Bezug auf den Punkt M durch ihre Hälften, d. h. die Inhalte der Dreiecke $A_1 B_1 M$, $E_1 F_1 M$ und $C_1 D_1 M$ gemessen werden, von denen die beiden ersten mit einem negativen, das letzte mit einem positiven Zeichen wegen des entgegengesetzten Drehungsbestrebens in Rechnung zu bringen sind. Verbindet man B_1 und D_1 mit E_1 und zieht von B_1 und D_1 außerdem noch die Parallelen $B_1 B_2$ und $D_1 D_2$ mit $A_1 C_1$, so ist

$$\triangle A_1 B_1 M = \triangle A_1 B_1 E_1 + \triangle B_1 E_1 M = \triangle A_1 B_1 E_1 + \triangle B_2 E_1 M$$
$$\triangle C_1 D_1 M = \triangle C_1 D_1 E_1 - \triangle D_1 E_1 M = \triangle C_1 D_1 E_1 - \triangle D_2 E_1 M$$

Führt man die algebraische Addition der Dreiecke $A_1 B_1 M$ und $C_1 D_1 M$ aus, subtrahirt also von dem letzteren das erstere und berücksichtigt, daß die beiden Dreiecke $A_1 B_1 E_1$ und $C_1 D_1 E_1$ gleichen Flächeninhalt haben, so erhält man $-(\triangle D_2 E_1 M + \triangle B_2 E_1 M)$. Das negative Zeichen zeigt nur, daß die algebraische Summe der Momente der beiden gegebenen Kräfte P_1 und P_2 negativ ist, daß sie also zusammen das Bestreben der Linksdrehung besitzen. Es ist aber weiter $E_1 D_2 + E_1 B_2$ gleich $E_1 F_1$ gleich der Größe der Resultante, daher ist auch

$$\triangle D_2 E_1 M + \triangle B_2 E_1 M \text{ gleich } \triangle E_1 F_1 M,$$

welches als Maß des Drehungsbestrebens der Resultante erscheint, und da diese ebenfalls links zu drehen beabsichtigt, so ergiebt sich das Gesetz: Das Moment der Resultante für irgend einen Punkt M ist gleich der algebraischen Summe der Componenten für denselben Punkt. Bezeichnet man die Hebelarme der Kräfte in Bezug auf den Punkt M mit p_1, p_2, r, so ist hiernach $Rr = P_1 p_1 + P_2 p_2$ (§. 37, F. 82 I.).

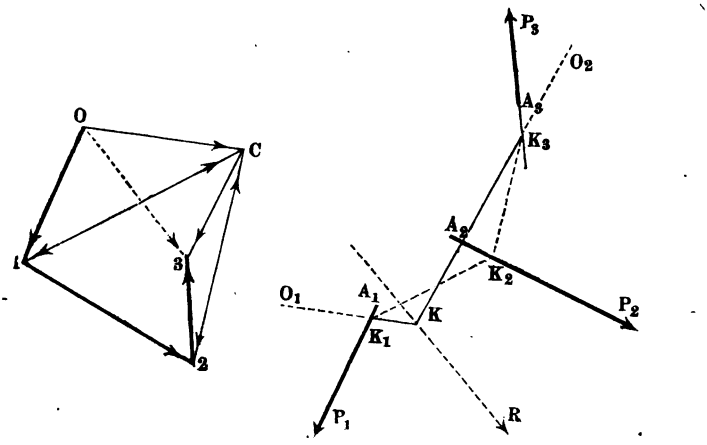
12. Das in dem letzten Paragraphen gezeigte Verfahren zur Vereinigung von zwei Kräften ist auf beliebig viele Kräfte leicht zu übertragen.

a) Es seien die drei Kräfte P_1, P_2, P_3 (Fig. 192 a. f. S.), die eine beliebige Richtung und Größe haben, zu vereinigen.

Man construire das Kräftepolygon, indem man $O1$ gleich und parallel P_1 macht, dann P_2 der Größe und Richtung nach bis 2 anträgt und hieran die Kraft P_3 nach Größe und Richtung bis 3 ansetzt, dann ist $O3$ die Resultante der drei gegebenen Kräfte nach Größe und Richtung, und es handelt sich demnach nur noch um einen Punkt, durch den dieselbe geht. Man wähle den Pol C beliebig und ziehe die Verbindungslinien OC, $C1$, $C2$, $C3$, welche die Componenten der gegebenen Kräfte vorstellen, und zwar sind OC und $C1$ die Componente von P_1, $1C$ und $C2$ die von P_2, $2C$ und $C3$ die von P_3. Hierbei vernichten sich die Componenten $C1$ und $1C$ sowie $C2$ und $2C$, und es bleiben anstatt der drei gegebenen Kräfte die beiden Kräfte OC und $C3$ übrig, deren Resultante $O3$ mit der der gegebenen Kräfte übereinstimmt. Zur Verzeichnung des Gelenkpolygons ziehen wir von einem beliebigen Punkte K_1 der Kraft P_1 die Linien $O_1 K_1$ und $K_1 K_2$ parallel mit CO und $C1$, ferner durch K_2 die Linie $K_2 K_3$ parallel mit $C2$, und durch K_3 die Linie $K_3 O_2$ parallel mit $C3$. Die drei gegebenen Kräfte sind nun durch die Kräfte

OC und $C3$ ersetzt, welche in den Richtungen O_1K_1 und O_2K_3 wirksam sind, da die Componenten in den Linien K_1K_2 und K_2K_3 sich gegenseitig aufheben.

Fig. 192.



Die beiden Seiten O_1K_1 und O_2K_3 schneiden sich in den Punkten K, durch welchen die Resultante R der Kräfte P_1, P_2, P_3 gehen muß, und welche der Größe und Richtung nach durch $O3$ bestimmt ist.

Denkt man P_1 und P_2 zu der Resultante R' vereinigt, so ist für jeden beliebigen Punkt der Ebene das Moment von R' gleich der algebraischen Summe der Momente von P_1 und P_2, und da auch ferner das Moment von R für jeden beliebigen Punkt gleich der algebraischen Summe der Momente von R' und P_3 ist, so folgt daraus, daß auch für drei Kräfte in der Ebene das oben für zwei Kräfte bewiesene Gesetz gilt:

Das Moment der Resultante für irgend einen Punkt der Ebene ist gleich der algebraischen Summe der Componenten.

b) Von den drei Kräften bilden P_2 und P_3 ein Kräftepaar, sind also gleich, parallel und entgegengesetzt gerichtet (Fig. 193).

Das Kräftepolygon liefert als Resultante $O1$, d. i. die Kraft P_1 der Größe und Richtung nach, und das Gelenkpolygon liefert in dem Punkte K den Angriffspunkt der Resultante. Ein Kräftepaar und eine Kraft in derselben Ebene gelegen, lassen sich hiernach zu einer Resultante vereinigen, welche gleich der gegebenen Kraft ist, derselben parallel wirkt und auch mit ihr gleiche Richtung hat, also allein parallel mit sich verschoben erscheint. Man darf demnach eine Kraft nur dann parallel mit sich verschieben, wenn man das dabei entstehende Kräftepaar berücksichtigt (§. 36 a. I.).

c) In Fig. 194 sind die drei Kräfte dergestalt angenommen worden, daß das Kräftepolygon sich schließt, d. h. die Resultante der drei Kräfte ist Null.

Das dem Punkte C als Pol gemäß conſtruirte Gelenkpolygon liefert aber die beiden parallel, entgegengeſetzt gerichteten und gleich großen Kräfte $CO = Q$, welche in $O_1 K_1$ und $O_2 K_3$ wirkſam ſind. Die drei gegebenen Kräfte ſind

Fig. 193.

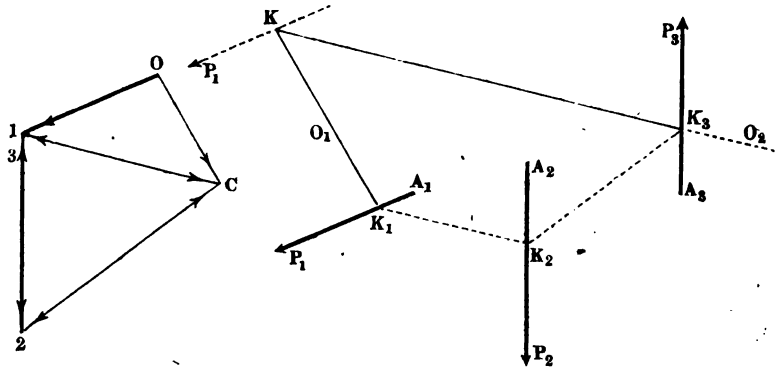
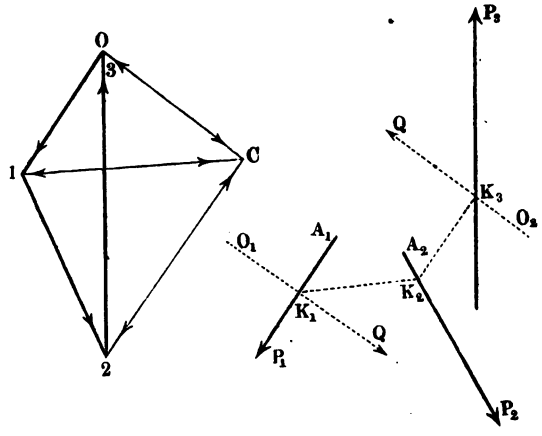


Fig. 194.

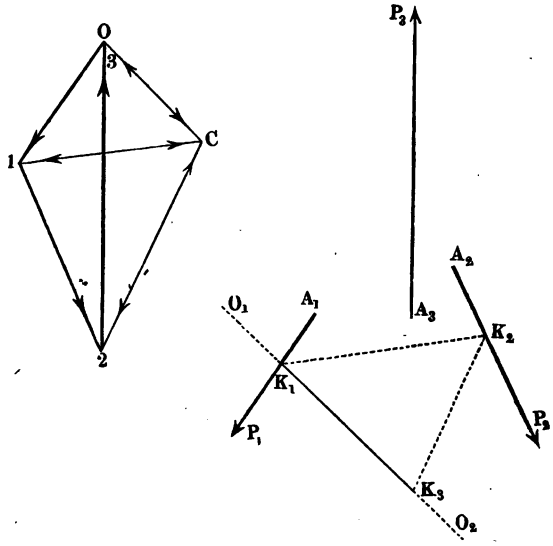


alſo nicht im Gleichgewicht, reduciren ſich vielmehr auf ein Kräftepaar, deſſen Moment Qq aus der Figur entnommen werden kann.

d) In Fig. 195 (a. f. S.) endlich ſchließt ſich nicht allein das Kräftepolygon, ſondern die letzte Richtung $K_3 O_2$ des Gelenkpolygons fällt auch mit

der ersten Richtung desselben $O_1 K_1$ zusammen, so daß auch das Gelenkpolygon geschlossen ist. In diesem Falle sind die drei Kräfte unter sich im Gleich-

Fig. 195.



gewicht, was sich leicht ersieht, wenn man die drei Kräfte P_1, P_2, P_3 nach Richtung der Gelenkpolygonseiten $O_1 K_1$, $K_1 K_2$, $K_2 K_3$ und $K_3 O_2$ zerlegt.

13. Die in dem Vorigen behandelten vier Fälle bei Annahme von drei Kräften sind die überhaupt möglichen, und können wir die erlangten Resultate unmittelbar auf beliebig viele Kräfte in einer Ebene übertragen, nachdem Kräfte- und Gelenkpolygon verzeichnet worden sind.

a) Die Resultante der Kräfte ergiebt sich aus dem Kräftepolygon der Größe und Richtung nach, und der Durchschnittspunkt K der beiden äußersten Seiten des Gelenkpolygons liefert einen Punkt der gesuchten Resultante, die hiernach vollständig bestimmt ist. Man kann aber auch mit Leichtigkeit aus dem Kräfteplan die Resultante von beliebig vielen, auf einander folgenden Kräften bestimmen. Die Größe und Richtung der gesuchten Resultante ergiebt sich in der Diagonale des Kräftepolygons, welche die in Betracht gezogenen Kräfte abschneidet, und ein Punkt der Resultante wird in dem Durchschnittspunkte zweier Gelenkpolygonseiten erhalten, von denen die eine der ersten in Betracht gezogenen Kraft vorangeht, und die andere der letzten zu berücksichtigenden Kraft folgt. Sind in dem Systeme von Kräften Kräftepaare vorhanden, so haben diese, wie oben gezeigt, nur ein paralleles Verschieben von ebensoviel Kräften zur Folge, als Kräftepaare vorhanden sind. Außerdem gilt auch hier das Gesetz: Das Moment der Mittelkraft für irgend einen Punkt der Ebene ist gleich der algebraischen Summe der Momente der Componenten (§. 37, F. 82, I.).

b) Erscheint das Kräftepolygon geschlossen, so haben die gegebenen Kräfte keine Resultante, es existirt also kein Bestreben auf fortschreitende Bewegung. Von der Form des Gelenkpolygons hängt es aber noch ab, ob vollkommenes Gleichgewicht vorhanden, oder ob ein Bestreben auf Drehung aus den gegebenen Kräften resultirt. Bei offenem Gelenkpolygon bleibt ein Kräftepaar übrig, dessen Kräfte in die letzten Seiten des Gelenkpolygons fallen und deren Größe sich in der Linie CO des Kräftepolygons ergeben. Denkt man die in dem ersten und letzten Knoten des Gelenkpolygons angreifenden äußeren Kräfte nach Richtung der beiden daran stoßenden Gelenkpolygonseiten zerlegt, so läßt sich der Drehungssinn des Kräftepaares erkennen, ob dasselbe nämlich rechts oder links zu drehen beabsichtigt. Die Richtung der Kräfte des Paares ergiebt sich aus dem Kräftepolygon, da OC die Richtung der im ersten und CO die Richtung der im letzten Knoten übrig gebliebenen Kraft sein muß. Ist bei geschlossenem Kräftepolygon das Gelenkpolygon ebenfalls geschlossen, so findet vollkommenes Gleichgewicht zwischen den gegebenen Kräften statt.

14. Die für beliebig gerichtete Kräfte nachgewiesenen Gesetze gelten in gleicher Weise für parallele Kräfte. Das Kräftepolygon wird hierbei zu einer geraden Linie parallel den Kraftrichtungen, und die Resultante ist gleich der algebraischen Summe der Kräfte und denselben parallel wirkend. Durch das Gelenkpolygon findet sich im Durchschnittspunkt der beiden äußeren Seiten desselben ein Punkt der Resultante, und damit ist diese selbst vollständig bestimmt.

Aus dem Gesetze von den Momenten der Kräfte für einen beliebigen Punkt M ergiebt sich, wenn wir zwei parallele Kräfte P_1 und P_2 an den Punkten A_1 und A_2 wirksam denken und den Punkt M in dem Durchschnittspunkt der Verbindungslinie $A_1 A_2$ mit der Resultanten-Richtung annehmen:

Die algebraische Summe der Momente der beiden Kräfte ist gleich Null, da die Resultante $R = P_1 + P_2$ in Bezug auf den in ihr liegenden Punkt M keinen Arm, also auch kein Moment hat.

Bezeichnen wir die Arme der Kräfte mit p_1 und p_2, so ist hiernach

$$P_1 p_1 - P_2 p_2 = 0$$

oder

$$P_1 : P_2 = p_2 : p_1,$$

und da auch die Verbindungslinie $A_1 A_2$ nach dem Verhältniß der Arme getheilt wird,

$$P_1 : P_2 = A_2 M : A_1 M.$$

Hieraus ergiebt sich, daß die Verbindungslinie der Angriffspunkte A_1 und A_2 durch die Resultante in zwei Theile getheilt wird, welche sich umgekehrt wie die gegebenen Kräfte verhalten (§. 32, F. 69, I.). Da dieser bestimmte Punkt M allein von der Größe der Kräfte abhängt, von der Richtung der Kräfte dagegen unabhängig ist, so lange die Kräfte parallel bleiben und dieselben Angriffspunkte behalten, so folgt daraus, daß die Resultante der beiden parallelen Kräfte jederzeit durch diesen Punkt M gehen muß, wenn man die gegebenen Kräfte unter Erhaltung des Parallelismus um ihre Angriffspunkte

dreht. Bei der Drehung der Componenten um ihre Angriffspunkte dreht sich also die Resultante um diesen Punkt M, und derselbe heißt deshalb Mittelpunkt der parallelen Kräfte. Fügt man zu den beiden Kräften P_1, P_2 noch eine dritte parallele Kraft P_3 am Angriffspunkt A_3 hinzu, verbindet A_3 mit M, so wird die neue Resultante R_1 die Verbindungslinie MA_3 im umgekehrten Verhältniß der Kräfte $P_1 \pm P_2$ und P_3 in dem Punkt M_1 theilen, und dieser Punkt wird für die drei gegebenen Kräfte Mittelpunkt der parallelen Kräfte sein, da sich um ihn R_1 dreht, wenn man die gegebenen Kräfte um ihre bestimmten Angriffspunkte bei Erhaltung des Parallelismus dreht. In gleicher Weise kann man die Existenz eines Mittelpunktes paralleler Kräfte für vier und mehr Kräfte finden und erhält dadurch das Gesetz:

Parallele Kräfte, die an bestimmten Angriffspunkten wirksam sind, besitzen einen Mittelpunkt (§. 37, F. 86, I.).

Zur Construction desselben bestimme man mittelst des Kräfteplanes einen Punkt V der Resultante R, drehe sämmtliche Kräfte in ihren Angriffspunkten um einen beliebigen Winkel α und construire für diese neue Lage der Kräfte mittelst eines zweiten Kräfteplanes einen Punkt W der Resultante R. Dann müssen sich die durch V und W gezogenen Resultanten R in dem gesuchten Mittelpunkte M schneiden. Sind die Kräfte Gewichte von fest mit einander verbundenen Massenelementen, welche diesen Gewichten als Angriffspunkte dienen, so heißt der Mittelpunkt der parallelen Gewichte der Schwerpunkt des vorgelegten Massenelementen-Systems (§. 41, I.).

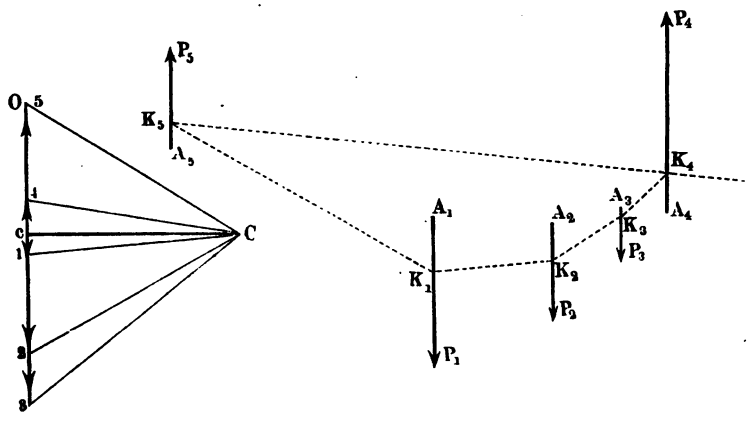
Für den Fall des Gleichgewichts zwischen parallelen Kräften müssen dieselben zum Theil entgegengesetzte Richtung haben, wobei natürlich die Summe der nach der einen Richtung wirksamen Kräfte gleich der Summe der nach der entgegengesetzten Richtung wirkenden Kräfte sein muß, da die Resultante, d. i. die algebraische Summe der Kräfte, gleich Null sein soll. Das Kräfte- und Gelenkpolygon ist für die Annahme des Gleichgewichts wie bei beliebig gerichteten Kräften geschlossen. Zerlegt man die in den Gelenkpolygonseiten auftretenden inneren Kräfte $C0, C1, C2 \ldots$ (Fig. 196) in jedem Knoten nach Richtung der äußeren Kräfte und normal dazu, so fallen die letzteren Componenten gleich groß aus, nämlich gleich der von C aus auf die Kraftlinie gefällten Normale Cc, welche man die Poldistanz nennt. Waren die äußeren Kräfte vertical gerichtet, so heißt diese constante Horizontal-Componente der inneren Kräfte allgemein Horizontal-Spannung.

Denkt man in dem letzten Falle die beiden entgegengesetzt wirksamen Kräfte P_4 und P_5 weggenommen, dafür aber die Knoten K_4 und K_5 als feste Punkte construirt, an welchen das Gelenkpolygon befestigt ist, so giebt die Verbindungslinie $K_4 K_5$ die Richtung von $C4$ in dem Kräftepolygon an, durch welche man die den äußeren Kräften entgegengesetzt wirkenden Reactionen der beiden festen Punkte, nämlich 3 — 4 und 4 O erhält. Auch hier ist wieder die zu den äußeren Kräften normal wirkende Componente der inneren Kräfte gleich der Poldistanz Cc.

In dem vorgelegten Gelenkpolygone werden die einzelnen Seiten sämmt-

lich auf Zug beansprucht, was sich leicht ersieht, wenn man die Zerlegung der Kräfte in den einzelnen Knoten nach Richtung der anstoßenden Seiten vor-

Fig. 196.



nimmt. Hätte man dagegen den Pol C auf der anderen Seite der Kraftlinie $O3$ angenommen, so würde das Gelenkpolygon seine convexe Seite nach oben kehren und die einzelnen Seiten würden auf Druck in Anspruch genommen werden. Die erstere Anordnung des Gelenkpolygons nennt man schlechtweg eine Kette, weil die einzelnen Seiten durch Seil- oder Kettenstücke ersetzt werden können, während bei der zweiten Anordnung, welche ein Bogen heißt, die Seiten als starr angenommen werden müssen.

Uebungen.

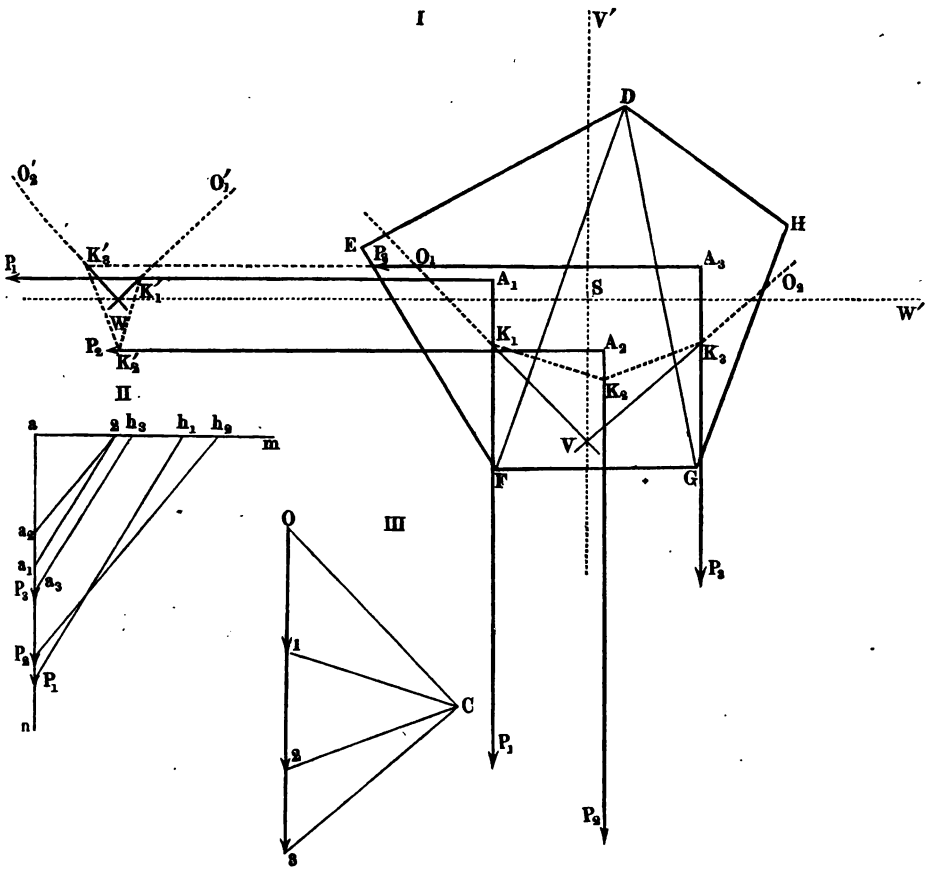
1. Es ist der Schwerpunkt des unregelmäßigen Fünfecks $DEFGH$ zu bestimmen.

Die von D aus gezogenen Diagonalen (Fig. 197 I.) liefern die Theildreiecke des Fünfecks, deren Inhalte den in Betracht zu ziehenden parallelen Kräften gleich sind. Zur Construction dieser Kräfte sei (Fig. 197 II.) am auf an normal. Mit Benutzung der Einheit $1/2$ Centimeter mache man $a2 = 2$, ah_1, ah_2 und ah_3 gleich den drei Höhen der Dreiecke EDF, FDG, GDH, sowie aa_1, aa_2 und aa_3 gleich den drei Grundlinien EF, FG, GH derselben Dreiecke. Verbindet man nun 2 mit a_1, a_2 und a_3 und zieht von h_1, h_2 und h_3 mit diesen Verbindungslinien Parallelen, so erhält man in den Linien aP_1, aP_2 und aP_3 die gesuchten Kräfte, welche in den Schwerpunkten der Theildreiecke angreifen.

Nachdem nun in (Fig. 197 III.) das Kräftepolygon $O, 1, 2, 3$ mit $1/4$ Centimeter als Einheit verzeichnet, der Pol C beliebig angenommen und die Verbindungslinien von C gezogen, construire man in (Fig. 197 I.) das zugehörige Gelenkpolygon $O_1 K_1 K_2 K_3 O_2$, so liefern die beiden äußersten Seiten desselben in ihrem Durchschnittspunkte V einen Punkt der Resultante, und die mit den Kräften parallel gezogene Linie VV' giebt die Richtung dieser Resultante an. Man drehe jetzt die drei Kräfte P_1, P_2, P_3 in (Fig. 197 I.) um 90^0, und benutze dasselbe Kräftepolygon, indem man es um den Pol C ebenfalls um 90^0 gedreht denkt. Dabei werden alle Strahlen des neuen Polygons normal zu denen des alten, und es sind demnach die Seiten des zweiten Gelenkpolygons nur normal zu den Strahlen des bereits gezeichneten Gelenkpolygons (Fig. 197, III.) zu zeichnen, ohne daß man die Zeichnung des neuen Kräftepolygons nothwendig hätte. Der Durchschnittspunkt W der beiden äußersten Seiten des zweiten Gelenkpolygons $O_1' K_1' K_2' K_3' O_2'$ ist wiederum ein Punkt

der gesuchten Resultante, deren Richtung in die mit den jetzigen Kraftrichtungen gezogene Parallele WW' fällt. Der Durchschnittspunkt S von VV' und WW' ist der gesuchte Schwerpunkt des vorgelegten Polygons, und die Strecke $O3$ im Kräftepolygon ist gleich der Summe der drei Kräfte, d. i.

Fig. 197.

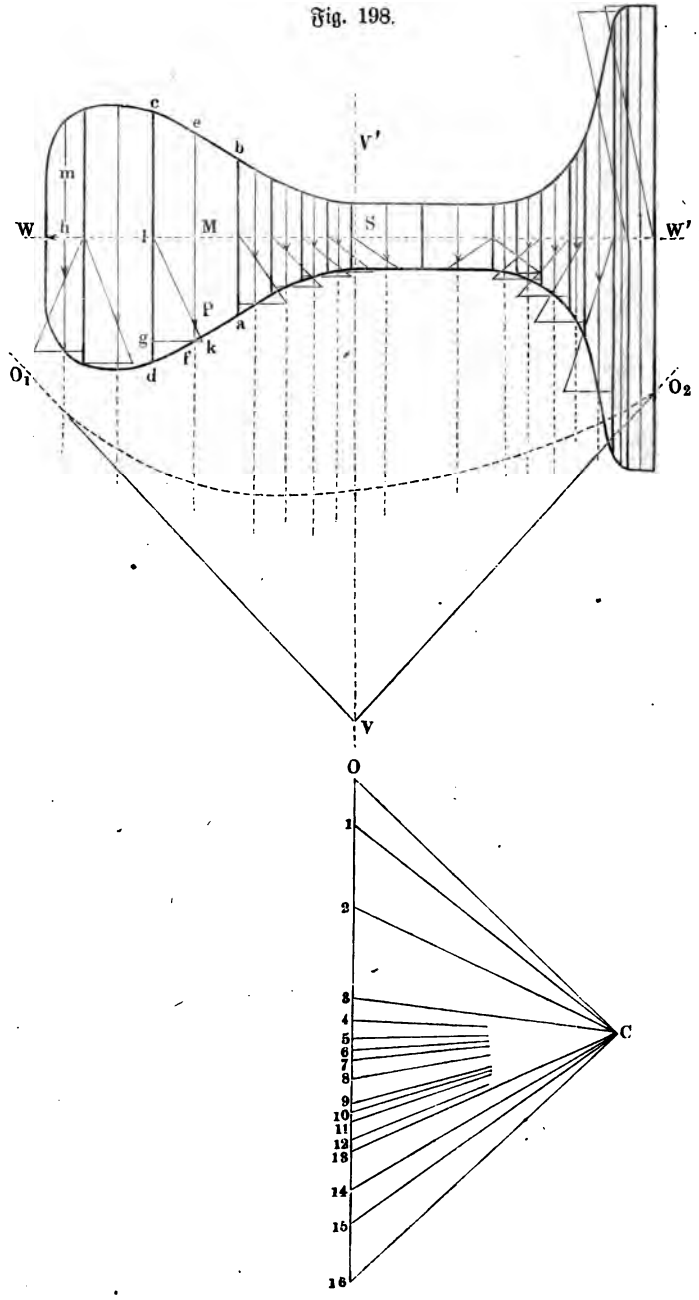


der Inhalt der gegebenen Figur. Bei der Einheit von $^1/_4$ Centimeter und da $O3 = 4{,}28^{cm}$, ergiebt sich als Inhalt des Fünfecks $4 . 4{,}28 = 17{,}12$ Quadratcentimeter.

2. Es ist der Schwerpunkt des in Fig. 198 (a. f. S.) vorgelegten Schienenprofils zu bestimmen.

Da die Figur in Bezug auf die Linie $W\,W'$ ſymmetriſch iſt, ſo iſt das in der vorigen Nummer angegebene Verfahren nur einmal in Bezug auf die zur Symmetrieachſe $W\,W'$ normal gerichteten Kräfte in Anwendung zu brin-

Fig. 198.



gen. Zu dem Ende denke man das Schienenprofil durch Linien normal zu WW' in Flächenstreifen zerlegt, welche als Paralleltrapeze angesehen werden können und deren Höhe so klein gewählt werden mag, daß man die beziehlichen Schwerpunkte in der Mittellinie der betreffenden Paralleltrapeze annehmen darf. Haben die nicht parallelen Seiten des Paralleltrapezes eine zu große Neigung, so ist der Schwerpunkt nach S. 153, Thl. I. zu bestimmen. Der Inhalt eines solchen Paralleltrapezes gleich $m.h$, unter m die Mittellinie und h die Höhe desselben verstanden, werde in ein Rechteck von der Seite a gleich der gemeinschaftlichen Flächenbasis verwandelt; dann ist also $mh = ax$ oder $a : m = h : x$, woraus sich x leicht construiren läßt. Nehmen wir $a = 2{,}6^{cm}$, so bestimmt man x aus der Proportion $\frac{a}{4} : \frac{m}{2} = \frac{h}{2} : x$ auf folgende Weise.

Durch den Endpunkt f der Mittellinie ef des Paralleltrapezes $abcd$ zieht man eine Parallele zur Symmetrieachse und trägt auf derselben von g aus bis k, $\frac{a}{4} = 0{,}65^{cm}$ ab, verbindet k mit der Mitte l von cd, so ist MP gleich x gleich der auf a reducirten Fläche des Paralleltrapezes, unter M die Mitte der Mittellinie verstanden.

Beträgt x mit dem Längenmaßstabe gemessen z. B. $0{,}75^{cm}$, so ist der Inhalt des Paralleltrapezes gleich $a.x = 2{,}6 . 0{,}75$ gleich $1{,}95\,\square^{cm}$.

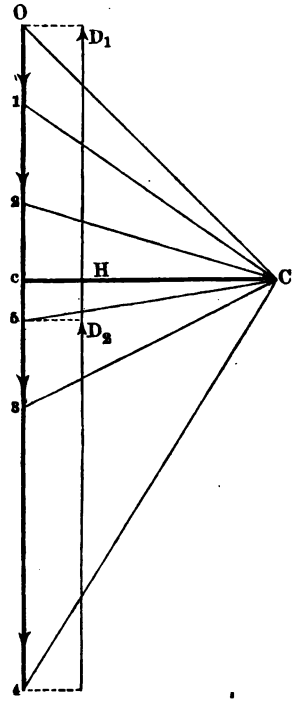
Auf die hier angegebene Weise sind die Inhalte der Paralleltrapeze, das sind die angreifenden Kräfte, bestimmt und darnach der Kräfteplan gezeichnet worden. Der Durchschnittspunkt V der äußersten Seiten des Seilpolygons ist ein Punkt der Resultante, welche normal zur Symmetrieachse WW' gerichtet ist, daher in der Linie VV' liegt, welche im Durchschnittspunkte S mit WW' den gesuchten Schwerpunkt liefert. Die Strecke $O - 16$ ist gleich der Summe der Kräfte gleich der Summe der 16 Paralleltrapeze, d. h. gleich dem Inhalte des Schienenprofils. In der vorgelegten Zeichnung ist $O - 16 = 6{,}7^{cm}$, daher der Inhalt des Schienenprofils gleich $2{,}6 . 6{,}7 = 17{,}42\,\square^{cm}$. Das Schienenprofil ist in 0,65 der natürlichen Größe gezeichnet, daher ist der wahre Inhalt

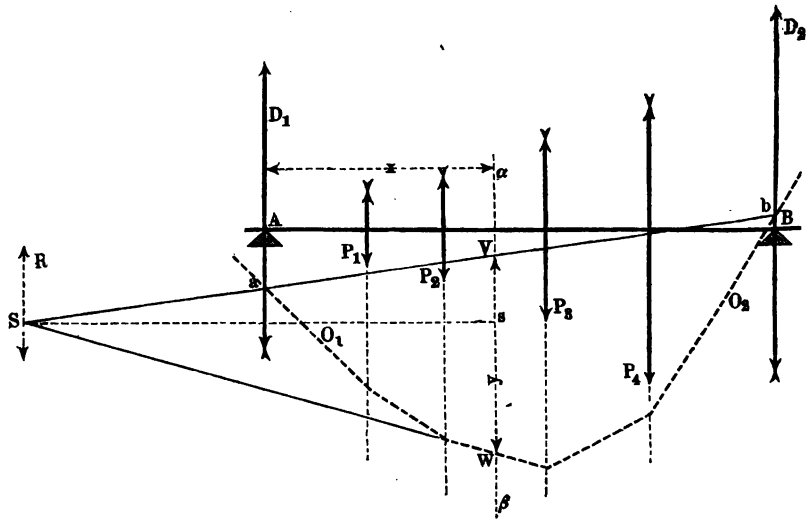
$$17{,}42 \cdot \left(\frac{1}{0{,}65}\right)^2 = 41\,\square^{cm}.$$

3. Ein Balken AB (Fig. 199) sei in horizontaler Lage an beiden Enden unterstützt, und rechtwinklig zur Achse des Balkens seien die Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 wirksam. Man soll behufs Berechnung der Querschnittsdimensionen für eine beliebige Stelle in der Entfernung x von dem Ende A das Moment Qq der äußeren Kräfte bestimmen.

Man zeichne den Kräfteplan, ziehe in dem Seilpolygon die Verbindungslinie ba und von dem Pole C aus in dem Kräftepolygon die Parallele $C5$, so ist $4 - 5 = D_2$ und $5\,O = D_1$ gleich den Reactionen in den Unterstützungspunkten B und A. Bezeichnet man die Arme der Kräfte D_1, P_1, P_2 für den Querschnitt $\alpha\beta$ mit d_1, p_1, p_2, so ist $Qq = D_1 d_1 - P_1 p_1 - P_2 p_2$ gleich dem Moment der Resultante R der Kräfte für denselben Querschnitt.

Fig. 199.





Der Durchschnittspunkt S der von $\alpha\beta$ durchschnittenen Seilpolygonseiten ist ein Punkt der Resultante, welche sich der Größe und Richtung nach aus dem Kräftepolygon gleich 5 — 2 ergiebt. Fällt man deshalb von S eine Normale Ss auf $\alpha\beta$, so ist $Qq = R.Ss = (5 - 2).Ss$. Es ist nun Dreieck $SWV \sim$ Dreieck $C25$, daher $\frac{5-2}{VW} = \frac{Cc}{Ss}$ und $(5 - 2).Ss = Cc.VW$, oder wenn man die Poldistanz Cc gleich der Horizontalspannung der inneren Kräfte mit H bezeichnet, so ist

$$Qq = R.Ss = (5 - 2).Ss = H.VW.$$

Benutzt man für die graphische Darstellung der Momente die Horizontalspannung H als Krafteinheit, als gemeinschaftliche Momentenbasis, und bezeichnet man die Ordinate VW im Seilpolygon mit y, so ist

$$Qq = y,$$

d. h. das Moment der äußeren Kräfte für eine beliebige Stelle des Balkens ist gleich der zugehörigen Ordinate des Seilpolygons, und es ersieht sich aus dem Seilpolygon, daß diese Momente für diejenigen Querschnitte am größten sind, welche den äußeren Kräften als Angriffspunkt dienen (S. 392, Thl. I.).

Die Lösung der Aufgabe bleibt dieselbe, wenn die parallelen äußeren Kräfte eine andere als verticale Richtung haben, immer ist die Ordinate des Seilpolygons, welche den Kraftrichtungen parallel läuft, gleich dem Moment der äußeren Kräfte für den in Betracht gezogenen Querschnitt.

Da hiernach die Momente der biegenden Kräfte durch Linien darstellbar sind, so lassen sie sich in derselben Weise wie Kräfte durch graphische Addition vereinigen. Wirken verschiedene Gruppen von Kräften auf Biegung des Balkens, so construire man für jede Gruppe das zugehörige Gelenkpolygon, vereinige die auf denselben Querschnitt fallenden Momente durch graphische Addition und bilde aus diesen resultirenden Momenten ein neues Gelenkpolygon, dann liefern die Ordinaten des letzteren die resultirenden Momente der äußeren Kräfte für die betreffenden Querschnitte.

Umgekehrt läßt sich nun auch ein Moment von gegebener Richtung in zwei andere Momente, deren Richtungen ebenfalls gegeben sind, zerlegen.

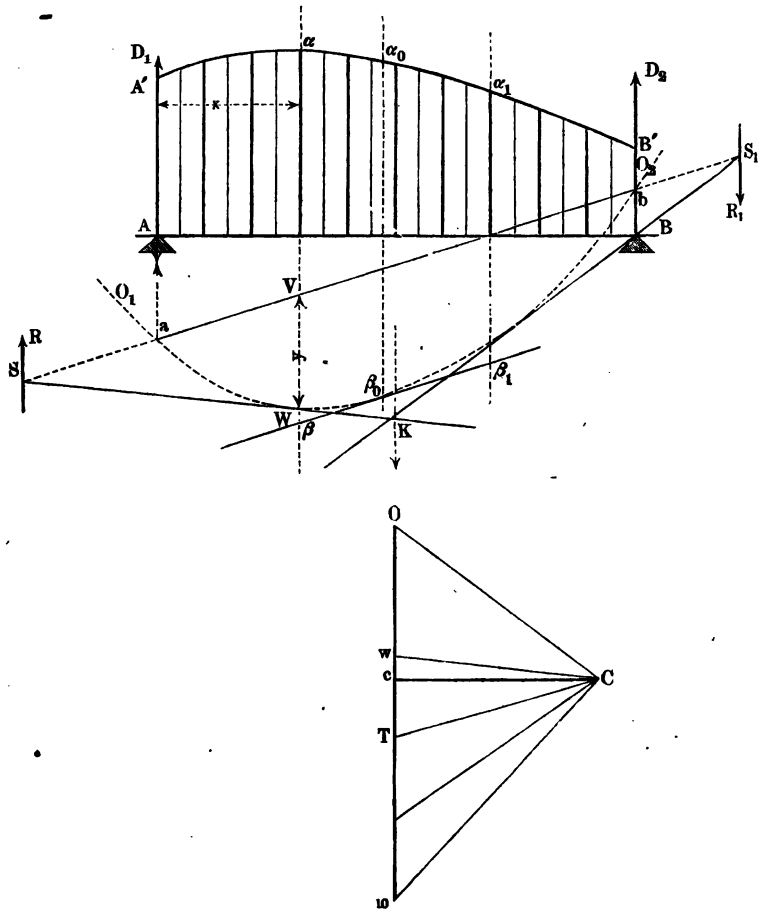
Ist ein Balken auf Biegung und Verdrehung in Anspruch genommen, so construire man wieder ein Gelenkpolygon für die biegenden, und ein zweites für die drehenden Kräfte und vereinige die auf denselben Querschnitt fallenden Momente nach der Formel $\frac{3}{8} Qq + \frac{5}{8}\sqrt{(Qq)^2 + (Vv)^2}$ (S. 470, I.).

4. Ein Balken AB (Fig. 200 a. f. S.) sei in horizontaler Lage an seinen Enden unterstützt und trage eine über seine ganze Länge stetig vertheilte Last.

Denkt man in jedem Punkte des Balkens AB eine Normale errichtet und dieselbe gleich der Belastung pro Längeneinheit für diese Stelle gemacht, so bilden die Endpunkte dieser Normalen eine Linie $A'B'$, welche das Gesetz der Lastvertheilung darstellt und deshalb Belastungscurve genannt wird. Ist dieselbe eine gerade, mit AB parallel laufende Linie, so ist die stetige Last

über den Balken gleichförmig vertheilt. Der Inhalt der Fläche, welche von der Belastungscurve, von AB und der ersten und letzten Ordinate eingeschlossen

Fig. 200.



wird, ist gleich der Gesammtbelastung des Balkens. Ebenso ist die zu einem Stück des Balkens gehörige Last gleich dem Inhalte der Fläche, welche durch die beiden Endordinaten dieses Stückes, den dazu gehörigen Theil der Belastungscurve und den entsprechenden Theil von AB begrenzt wird.

Das Seilpolygon für eine derartige stetig vertheilte Last geht in eine krumme Linie, Seilcurve genannt, über, welche sich annähernd dadurch erhalten läßt, daß man den Balken in eine größere Anzahl gleicher Stücke theilt,

die zu diesen Theilen gehörigen Belastungen in ihren Schwerpunkten wirksam denkt und diesen Gewichten gemäß den Kräfteplan verzeichnet.

In dem vorliegenden Falle ist die Belastung aus zehn Theilen bestehend gedacht, von denen jeder einzelne durch den Inhalt eines Paralleltrapezes bestimmt ist, dessen Schwerpunkt in der Mittellinie angenommen worden ist. Bezeichnet man mit m diese Mittellinie, und mit h die Höhe des Trapezes, so ist der Inhalt desselben gleich mh, welcher wieder wie in Aufgabe 2 auf dieselbe Flächenbasis a reducirt werden mag, wodurch sich in den ungleichen Seiten der betreffenden Rechtecke die Inhalte dieser Paralleltrapeze, d. h. die Belastungen darstellen. Nachdem das Kräftepolygon verzeichnet, der Pol C angenommen und die Strahlen von C aus gezogen, findet sich das Seilpolygon in bekannter Weise. Die Seiten desselben sind Tangenten der gesuchten Seilcurve, und zwar wird diese durch das Seilpolygon vollständig eingehüllt, CT ist parallel ab, woraus sich die Reactionen auf die Unterstützungspunkte A und B gleich TO und $10\,T$ ergeben. Denkt man für einen beliebigen Querschnitt $\alpha\beta$ in der Entfernung x vom Ende A die Tangente zur Seilcurve und schneidet diese ab in S, so ist dieser Punkt Angriffspunkt der Resultante der außerhalb von $\alpha\beta$, und zwar auf der linken Seite gelegenen Kräfte, und die Größe dieser Resultante, Transversalkraft für den Querschnitt $\alpha\beta$ genannt, ist gleich Tw, indem der Strahl Cw im Kräftepolygon parallel der Tangente WS gezogen worden ist. Das Moment Qq für diesen Querschnitt ist wieder gleich $VW = y$, wenn die Poldistanz Cc als Krafteinheit benutzt wird. Untersucht man die Größe der Transversalkräfte und Momente durch den ganzen Balken für die Querschnitte von A bis B, so ergiebt sich, daß für den Querschnitt A die Transversalkraft gleich TO und das Moment gleich Null ist. Von hier aus nehmen die Transversalkräfte ab, die Momente dagegen zu bis zu dem Querschnitt $\alpha_0\beta_0$, für den die an die Seilcurve construirte Tangente mit ab parallel läuft. Für diesen Querschnitt ist die Transversalkraft Null und das Moment am größten, der Querschnitt deshalb der gefährliche. Ueber diesen gefährlichen Querschnitt hinaus nimmt die Transversalkraft wieder zu, erhält aber das entgegengesetzte Zeichen und ihr Angriffspunkt erscheint auf der rechten Seite von dem betreffenden Querschnitt und wird für B gleich $T10$. Das Moment nimmt dagegen von dem gefährlichen Querschnitt aus ab und wird für B wieder zu Null (S. 448, I.).

Die für zwei Querschnitte $\alpha\beta$ und $\alpha_1\beta_1$ des Balkens an die Seilcurve construirten Tangenten schneiden sich in einem Punkte K, durch den die Resultante der über dem Balkenstück vertheilten Last gehen muß, d. h. in der durch K gezogenen Verticale liegt der Schwerpunkt der zwischen $\alpha\beta$ und $\alpha_1\beta_1$ vorhandenen Belastung.

Für eine gleichförmig vertheilte stetige Last geht die Seilcurve in eine Parabel über, deren Scheitel vertical unter der Mitte des Balkens liegt. Bezeichnet man nämlich die der Längeneinheit entsprechende Belastung mit p, und ist l die Länge des Balkens, so sind die Reactionen D für die Unterstützungspunkte gleich $\frac{1}{2}pl$, und das Moment Qq für den in der Entfernung x von A

angenommenen Querschnitt $\alpha\beta$ ist gleich $Dx - {}^1/_2 px^2$, d. h. aber $Qq = y = \frac{px}{2}(l - x)$. Für $x = \frac{l}{2}$ ist der Maximalwerth von $Qq = (Qq) = (y) = \frac{pl^2}{8}$. Verlegt man den Coordinaten-Anfangspunkt von A nach dem Endpunkte (y) und nimmt den positiven Theil der YAchse nach oben gerichtet an, so entsteht

$$-y + \frac{pl^2}{8} = \frac{p}{2}\left(\frac{l}{2} + x\right)\left(\frac{l}{2} - x\right), \text{ d. h. } x^2 = \frac{2}{p} \cdot y,$$

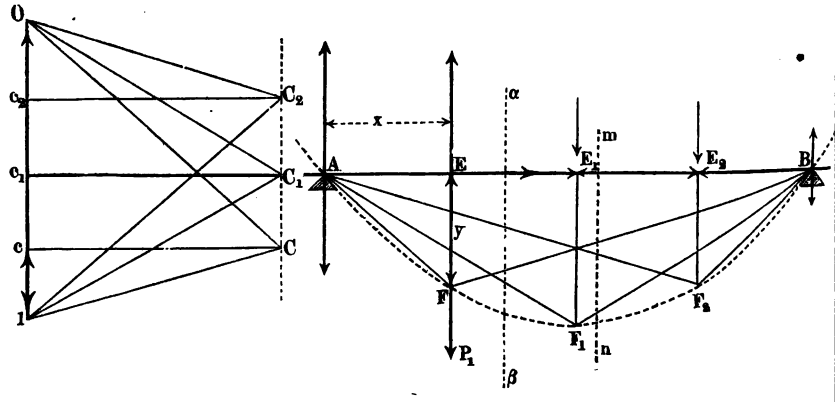
d. i. die Gleichung einer Parabel, deren Parameter $\frac{2}{p}$ und deren Scheitel vertical unter der Mitte des Balkens liegt. Die Transversalkraft nimmt von A aus von $\frac{pl}{2}$ gleichförmig ab, wird in der Mitte zu Null und ist in B gleich $-\frac{pl}{2}$.

5. Ein Balken in horizontaler Lage und an beiden Enden unterstützt trage außer einer stetig vertheilten Last in mehreren Punkten noch verticale Einzellasten.

Da parallele Kräfte behufs ihrer Vereinigung zu addiren sind und ebenso Momente für irgend einen Punkt der Ebene durch Addition vereinigt werden können, so wird man in diesem Falle zwei Kräftepläne, den einen für die concentrirten Lasten nach 3, den anderen für die stetige Belastung nach 4 construiren und für die einzelnen Querschnitte die Addition vornehmen.

6. Ein Balken AB sei in horizontaler Lage an beiden Enden unterstützt beliebig belastet, und es bewege sich außerdem eine Last P_1 von A nach B über den Balken fort (Fig. 201).

Fig. 201.



Man denke die Kraft P_1 in einer bestimmten Lage auf dem Balken, z. B. den Querschnitt in E angreifend, wobei AE gleich $^1/_4 AB$ sein mag, dann ist der von P_1 herrührende, in A wirksame Druck gleich $^3/_4 P_1$, und der in B wirksame gleich $^1/_4 P_1$. Bei der Zeichnung des Kräfteplanes ist $O1 = P_1$ und c auf $O1$ so gewählt, daß $Oc = {}^3/_4 O1$, also $1c$ und cO die Reactionen in B und A vorstellen. Errichtet man nun in c eine Normale cC und macht diese gleich der Momentenbasis, verbindet C mit O und 1, so sind CO, Cc und $C1$ die Richtungen der Seilpolygonseiten für den Pol C, und die angenommene Lage von P_1, die Schlußlinie des Seilpolygons ist daher mit AB parallel und kann in AB selbst gelegt werden, wodurch das Seilpolygon AFB entsteht.

Die in demselben mit EF parallel gezogenen Ordinaten stellen die von der beweglichen Last P_1 herrührenden Momente in den einzelnen Querschnitten vor, um welche sich also die in den Querschnitten bereits vorhandenen Momente, hervorgerufen durch stetig vertheilte und concentrirte Lasten, vergrößern. Zugleich ersieht sich, daß dieses hinzuzufügende Moment für den Querschnitt am größten ist, über dem sich die bewegende Kraft gerade befindet. Während der Bewegung von P_1 vergrößert sich also das Moment Qq der außerhalb eines beliebigen Querschnitts wirkenden äußeren Kräfte, und zwar desto mehr, je mehr sich P_1 diesem Querschnitt nähert. Denkt man in gleicher Weise für verschiedene Lagen von P_1 den Kräfteplan verzeichnet, indem man die Schlußlinie AB des Seilpolygons beibehält, so muß sich der Pol C des Kräftepolygons in einer zu $O1$ parallelen Linie bewegen. In der Figur sind unter dieser Voraussetzung noch die beiden Kräftepläne verzeichnet für den Fall, daß P_1 die Mitte E_1 des Balkens sowie den Punkt E_2 erreicht, welcher auf $^3/_4$ der Länge von AB angenommen worden ist. Nach dem Vorigen handelt es sich hauptsächlich um den geometrischen Ort der Punkte F, welcher zur Beurtheilung der größten Momente genügt und die Verzeichnung der Kräftepläne für die verschiedenen Lagen von P_1 erübrigt. Es sei $AE = x$, $EF = y$ und $AB = l$, so ist das Moment Qq für den Querschnitt in E

$$Qq = y = P_1 \frac{(l-x)x}{l}.$$

Verlegt man den Coordinaten-Anfangspunkt nach F_1 und nimmt den positiven Theil der YAchse nach oben gerichtet, so ergiebt sich als Gleichung des geometrischen Ortes für F

$$-y + \frac{P_1 l}{4} = \frac{P_1}{l}\left(\frac{l}{2} - x\right)\left(\frac{l}{2} + x\right)$$

oder

$$x^2 = \frac{l}{P_1} y,$$

woraus sich ergiebt, daß dieser geometrische Ort eine Parabel ist.

Behufs Untersuchung der Veränderung der Transversalkräfte in den einzelnen Querschnitten durch die von A nach B fortschreitende Last P_1 sei für

eine beliebige Stelle E des Balkens die Kraft P_1 mit dem zugehörigen Kräfteplane verzeichnet, und es stelle mn den durch die stetig vertheilten und concentrirten Lasten bestimmten gefährlichen Querschnitt vor, für welchen also, abgesehen von der beweglichen Last P_1, die Transversalkraft Null, das Moment Qq der äußeren Kräfte dagegen ein Maximum ist. Durch die bewegliche und in E angekommene Last vergrößert sich die in A bereits vorhandene Reaction um $c\,O$, und diese Vergrößerung ist in B gleich $1\,c$. Für irgend einen rechts von E gelegenen Querschnitt, z. B. $\alpha\beta$, kommt zu der bereits vorhandenen Transversalkraft durch die bewegliche Kraft die abwärts wirkende Kraft $c\,O - P_1$ hinzu. Sehen wir die nach aufwärts gerichtete Kraftrichtung als die positive an, so wird hiernach die Transversalkraft in allen Querschnitten zwischen E und mn, für welche die Mittelkraft der bereits vorhandenen äußeren Kräfte nach oben gerichtet ist, um $c\,O - P_1 = c\,1$ vermindert, in den Querschnitten zwischen mn und B dagegen, für welche die Mittelkraft der bereits vorhandenen äußeren Kräfte nach unten gerichtet ist, um denselben Werth $c\,1$ in absoluter Hinsicht vergrößert. Mit dem Fortschreiten von P_1 nimmt $c\,O$ ab, während sich $c\,1$ vergrößert. Je näher also P_1 dem in Betracht gezogenen Querschnitt kommt, desto größer wird $c\,1$, und diese Aenderung der Transversalkraft in $\alpha\beta$ erreicht ihr Maximum, sobald P_1 in den fraglichen Querschnitt rückt. Ueberschreitet jetzt die Last P_1 den Querschnitt $\alpha\beta$, ist sie also z. B. nach E_2 gekommen, so erfahren die in den Querschnitten von A bis mn auftretenden Transversalkräfte, welche von den vorhandenen Belastungen herrühren und nach oben gerichtet sind, eine Vermehrung um $c\,O$, während die in den Querschnitten von mn bis E_2 wirksamen Transversalkräfte in absoluter Hinsicht um denselben Werth $c\,O$ vermindert werden, da deren Resultante nach unten gerichtet ist. Auch diese Aenderung war am größten, als sich die Last in dem in Betracht gezogenen Querschnitt befand. Hiernach tritt in den einzelnen Querschnitten, sobald die Last darüber fortgeht, eine plötzliche Aenderung der zugehörigen Transversalkraft ein, indem die vor dem gefährlichen Querschnitte gelegenen Querschnitte eine Verminderung ihrer Transversalkraft erleiden, bis die Last an den betreffenden Querschnitt gelangt, in welchem Augenblicke die größte Verminderung sich plötzlich in die größte Vermehrung umsetzt, d. h. für diese Querschnitte springen die Transversalkräfte von ihrem Minimal- zu ihrem Maximalwerthe. Für die Querschnitte, welche hinter dem gefährlichen liegen, tritt das umgekehrte Verhalten ein, indem beim Ueberschreiten der Last der Maximalwerth der Transversalkraft sich plötzlich in seinen Minimalwerth verwandelt.

Da beim Bewegen der Last P_1 die Summe der Transversalkräfte für die vor dem gefährlichen Querschnitte gelegenen Querschnitte kleiner, für die nach demselben gelegenen aber größer wird, der gefährliche Querschnitt aber jederzeit die Stelle einnimmt, für welche diese Summe gleich Null ist, so folgt daraus, daß der gefährliche Querschnitt der von dem einen Ende herkommenden Last entgegenrückt. Sobald sich Last und gefährlicher Querschnitt getroffen, bewegt sich derselbe mit der Last vorwärts, überschreitet mit ihr seine ursprüngliche Lage und bleibt mit derselben bis zu der Stelle verbunden, wo er mit der von

der entgegengesetzten Seite herkommenden Last zusammentreffen würde. Von hier aus bewegt sich der gefährliche Querschnitt wieder zurück und erreicht seine ursprüngliche Lage in dem Augenblicke, wo die Last den Balken verläßt (S. 449, Thl. I.).

Wird der Kräfteplan der mobilen Last mit dem der stetig vertheilten und der concentrirten Belastung in gehöriger Weise verbunden, so lassen sich die Gesammt-Transversalkräfte, sowie das Moment der biegenden Kräfte für jeden Querschnitt auf leichte Weise bestimmen, sowie sich dann auch die Querschnitte des Balkens ergeben, zwischen welchen der gefährliche Querschnitt hin- und hergeht.

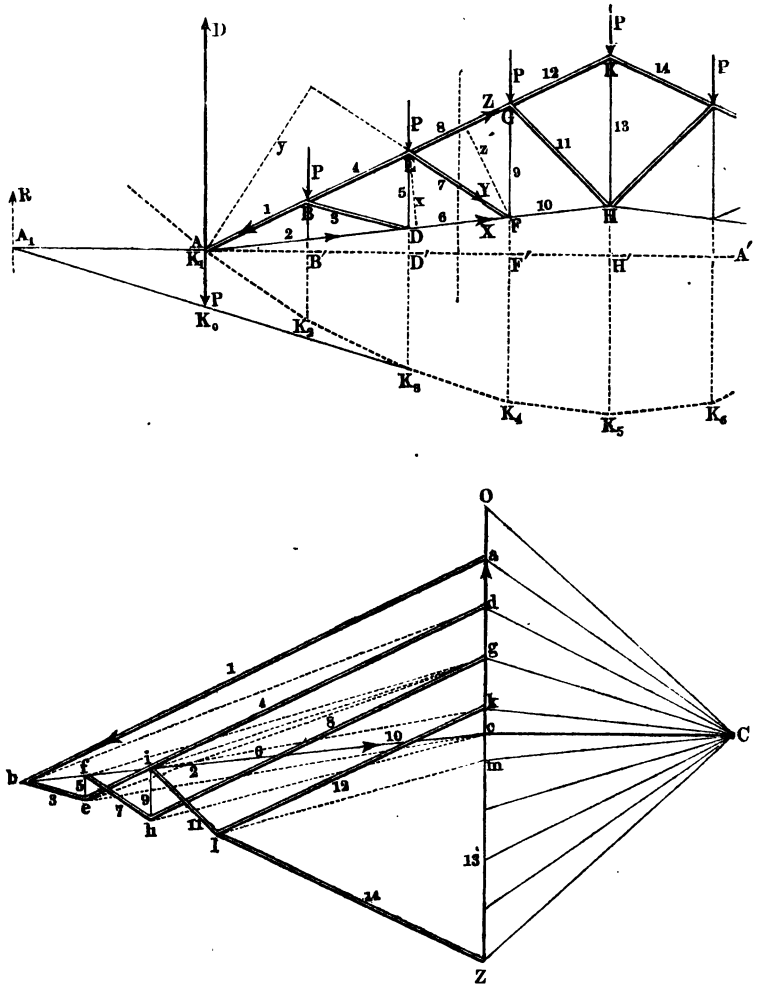
7. Ein einfaches Fachwerk besteht in seiner allgemeinsten Form aus zwei Gurtungen, welche durch Stangen zu einer Reihe fester Dreiecke in der Weise verbunden sind, daß die einzelnen Glieder nur nach ihrer Längenrichtung in Anspruch genommen werden, also Zug oder Druck erleiden (S. 207, Thl. I.). Diese Bedingung erfordert, daß die Stangen in den Verbindungspunkten durch Scharniere gehalten werden, welche die Drehung der Stangen gestatten und es möglich machen, daß die Stangen in die Kraftrichtungen des Kräftepolygons fallen. In diesem Falle bilden die Stangenverbindungen das zugehörige Gelenkpolygon, und die Angriffspunkte der Belastungen fallen mit den Scharnier- oder Knotenpunkten zusammen.

Der auf S. 207, Thl. I. verzeichnete Dachbinder soll graphostatisch behandelt werden. Die dort für jedes Feld angenommene Belastung $\frac{Q}{8}$ ist gleich P gesetzt, und das Kräftepolygon $O\varkappa$ in Fig. 202 (a. f. S.) gezeichnet worden.

Wegen der gleichmäßigen Vertheilung der Belastung auf beide Hälften des Dachbinders sind die Auflager-Reactionen D gleich der halben Belastung gleich $^9/_2\ P = Zc = c\,O$, und es ist in A eine aufwärts wirkende Kraft gleich $^7/_2\ P = ca$ wirksam. Man zerlege ca nach Richtung von BA und DA, indem man $ab \parallel BA$ und $cb \parallel DA$ zieht. Denkt man die Pfeile der Componenten in die Stangenverbindungen getragen, so ersieht sich, daß BA auf Druck, AD auf Zug in Anspruch genommen wird. An dem Knoten B wirken jetzt die beiden Kräfte 1 und P, welche sich zur Resultante bd vereinigen. Diese wird zerlegt nach Richtung BE und BD, wodurch sich die Componenten de und be, welche Druckkräfte sind, ergeben. Die an dem Knoten D wirksamen Kräfte 2 und 3 werden zur Mittelkraft ec vereinigt und dann nach Richtung von DE und DF zerlegt, wodurch die Zugkräfte $ef = 5$ und $fc = 6$ entstehen. An dem Knoten E vereinigt sich 4, 5 und P zu fg, indem zuerst P mit 4 zu eg und eg mit ef zu fg vereinigt wird. Diese Kraft wird nach Richtung von EG und EF zerlegt, wodurch die Druckkräfte 7 und 8 entstehen. Die Vereinigung von 7 und 6 zu hc wird nach Richtung von FG und FH zerlegt, wodurch sich die Zugkräfte $hi = 9$ und $ic = 10$ ergeben. Die Vereinigung von 8, 9 und P liefert die Kraft ik an dem Knoten G, welche nach Richtung von GK und GH zerlegt, die Druckkräfte $il = 11$ und $lk = 12$ liefert. Für den Knoten K vereinigt man 12 und P zur Kraft lm

und zerlegt diese nach Richtung von KH und KG', so entsteht die Druckkraft $lZ = 14 = lk$ und die Zugkraft $mZ = 13$. Auf der anderen Seite der

Fig. 202.



Figur erleiden die entsprechend gelegenen Stangen dieselbe Inanspruchnahme, wie die für die erste Hälfte bestimmten Stangen.

Man wähle den Pol C im Kräftepolygon so, daß Cc gleich der Kräfteeinheit, ziehe die Strahlen von C nur nach den äußeren Kräften und construire das denselben zugehörige Gelenkpolygon, dessen Schlußseite parallel mit Cc oder

mit AA' ausfällt, dann geben die Ordinaten im Gelenkpolygone die Momente der auf den betreffenden Querschnitt einwirkenden äußeren Kräfte. Wir denken ein Feld des Trägers durchschnitten, den rechts liegenden Theil der Figur entfernt und in den drei durchschnittenen Stangen die Kräfte Z, Y, X angebracht, welche das gestörte Gleichgewicht wieder herstellen. Es werde zur Berechnung der drei Kräfte Z, Y, X, den Bemerkungen auf S. 207, Thl. I. gemäß, der Momentenpunkt in F, A und E angenommen, so ist für F das Moment der äußeren Kräfte gleich $F'K_4$, und die Resultante R hat ihren Angriffspunkt in A_1. Es muß demnach $R.A_1F' = Z\varepsilon = F'K_4$ sein, da die Kräfte Y und X verschwinden, unter ε den Arm von Z in Bezug auf F verstanden. Mißt man nun ε auf den Längenmaßstab, so ergiebt sich $Z = \frac{F'K_4}{\varepsilon}$ und zwar muß Z dem in der Figur angebrachten Pfeile entgegen wirksam sein, d. h. Z stellt einen Druck vor. Für E als Momentenpunkt ist $R.A_1D' = X.x = D'K_3$, daher $X = \frac{D'K_3}{x}$, und zwar stellt diese Kraft eine Zugspannung vor. Für A als Momentenpunkt ist $R.AA_1 = Y.y = AK_0$, der Aehnlichkeit der Dreiecke gemäß, daher $Y = \frac{AK_0}{y}$, für welche Kraft der Pfeil wiederum umgedreht werden muß, da FE auf Druck beansprucht wird. In ähnlicher Weise lassen sich mittelst der Momentenmethode die inneren Kräfte für die verschiedenen Felder berechnen, bloß für die Stangen AB und AD wird man zweckmäßigerweise die oben durchgeführte Methode der Zerlegung anwenden.

In der Figur sind diejenigen Stangen, welche einen Druck zu erleiden haben, mit doppelten Linien ausgezogen. Als Einheiten wurden benutzt: für die Längenabmessungen $^1/_3{}^{cm} = 1^m$, für die Belastungen $1^{cm} = 4500$ Kilogrm. Die auf jeden Knoten wirkende Last P ist nach dem Kräftepolygon gleich $Oa = {}^2/_3{}^{cm}$, also gleich 3000 Kilogramm, und die gemeinschaftliche Momentenbasis Cc gleich $3^1/_3{}^{cm}$, repräsentirt deshalb 15000 Kilogrm. Ferner ergiebt sich aus der Figur: $F'K_4 = 2^{cm}$, $D'K_3 = 1{,}6^{cm}$, $AK_0 = 7^2/_3{}^{mm}$, $x = 1^{cm}$, $y = 2^5/_9{}^{cm}$, $\varepsilon = 1^1/_3{}^{cm}$. Multiplicirt man diese Abmessungen dem Längenmaßstabe gemäß mit 3, so erhält man die wirklichen Längen in Metern. Hiernach ist also $Xx = 15000$. $D'K_3 = 72000^{km}$, $Yy = -15000$. $AK_0 = -34500^{km}$, $Z\varepsilon = -15000$. $F'K = -90000^{km}$;

$$X = \frac{72000}{3} = 24000 \text{ Kilogrm.}; \quad Y = -\frac{34500}{7^2/_3} = -4500 \text{ Kilogrm};$$

$$Z = -\frac{90000}{4} = -22500 \text{ Kilogrm.}$$

Die letzten drei Werthe lassen sich durch Abmessen der Linien $6 = cf = 5^1/_3{}^{cm}$, $7 = fh = 1^{cm}$ und $8 = hg = 5^{cm}$ direct erhalten, wenn man diese Abmessungen dem Belastungsmaßstabe gemäß mit 4500 multiplicirt.

Verbeſſerungen.

Seite	20	Zeile	1	von unten	ſtatt c	lies c_p.
„	24	„	1	„ oben	„	zwiſchen Spannung, lies zwiſchen der Spannung.
„	27	Gleichung	5)	ſtatt α	lies a.	
„	28	Zeile	20	von unten	ſtatt $a\nu_m$	lies $a\nu^m$.
„	118	„	23	„ „	fehlt T.	
„	126	„	1	„ oben	ſtatt L^{km}	lies $L^{\frac{km}{=}}$.
„	156	„	1	„ „	„	$fd(p_{r-1} - p_r)$ lies $fd(p_{r-1} - p_r)$.
„	158	„	6	„ „	„	d. h. lies das.
„	206	„	11	„ unten	„	$H>$ lies $H<$.
„	224	„	10	„ oben	„	$\left(\frac{v}{\varphi}\right)^2$ lies $\left(\frac{v}{\varphi}\right)^2$.
„	259	„	5	„ „	„	Fx lies $F; x$.
„	273	„	1	„ unten	„	ξ lies ζ.
„	321	„	4	„ „	„	Kubikmeter lies $\frac{km}{=}$.
„	351	„	1	„ oben	„	e^2 lies c^2.
„	357	„	7	„ unten	„	Die lies die
„	363	„	11	„ „	„	R derſelben Kraft lies derſelben Kraft R.